Laurent Schwartz

THÉORIE DES DISTRIBUTIONS

Hermann

Laurent Schwartz

PROFESSEUR A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Théorie des distributions

NOUVELLE ÉDITION, ENTIÈREMENT CORRIGÉE, REFONDUE ET AUGMENTÉE

Hermann

La théorie des distributions *a paru d'abord en deux volumes dans les* Publications de l'Institut de Mathématique de l'Université de Strasbourg *de la collection* Actualités scientifiques et industrielles.

Le tome I a été publié en 1950 et a été réédité avec des corrections en 1957 : le tome II, publié d'abord en 1951, a été réédité en 1959 et en 1961.

La présente édition, entièrement revue et corrigée par l'auteur, est augmentée des chapitres VIII et IX.

Nouveau tirage, décembre 1978
ISBN 2 7056 5551 4

Introduction 3

CHAPITRE I DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

Sommaire 13

§ 1. Une généralisation de la notion de fonction : la notion de mesure 14
Notations 14
Mesures 15
Supports 17
Fonctions et mesures 17
Restriction à un ouvert 19

§ 2. Généralisation de la notion de mesure. Les distributions 20
Doublet 20
L'espace ($\mathcal{D}$) 21
Partition de l'unité 22
Les distributions 24
Distributions et mesures 25

§ 3. Principe de localisation. Support d'une distribution 26
Distribution nulle dans un ouvert 26
Principe du recollement des morceaux 27
Support d'une distribution 28

§ 4. Distributions positives 28

§ 5. Généralisations diverses 30
Distributions vectorielles 30
Distributions sur une variété indéfiniment différentiable 31

CHAPITRE II DÉRIVATION

Sommaire 33

§ 1. Définition de la dérivée 34
Dérivée d'une fonction régulière 34
Dérivée d'une distribution 35

§ 2. Exemples de dérivation. Cas d'une variable ($n = 1$) 36
Fonctions discontinues. Dérivées successives de la fonction d'Heaviside $Y(x)$ 36
Dérivées successives d'une fonction régulière par morceaux... 37
Pseudo-fonctions. Parties finies de Hadamard 38
Pseudo-fonctions monômes 41

§ 3. Exemples de dérivation. Cas de plusieurs variables 43
Fonctions discontinues sur une surface 43
Fonctions de la distance 44
Fonctions méromorphes 48
Distances hyperboliques 49
Dérivations sur une variété 51

§ 4. Primitives des distributions. Cas d'une variable 51
Primitives d'une distribution 51
Primitives d'une mesure 53

§ 5. Primitives des distributions. Cas de plusieurs variables 54
Distribution indépendante de x_1 55
Recherche des primitives 56
Fonctions ayant pour dérivée une fonction 57

§ 6. Distributions dont on connait plusieurs dérivées partielles. 59
Distributions dont les dérivées sont des fonctions continues... 61

CHAPITRE III ESPACES TOPOLOGIQUES DE DISTRIBUTIONS STRUCTURE DES DISTRIBUTIONS

Sommaire 63

§ 1. L'espace topologique $(\mathfrak{D})$ 64
La topologie des $(\mathfrak{D}_K)$ 64
La topologie de $(\mathfrak{D})$ 65
Rapports entre les topologies des $(\mathfrak{D}_K)$ et la topologie de $(\mathfrak{D})$ .. 66

§ 2. Les ensembles bornés dans $(\mathfrak{D})$ 68
Topologie d'un dual 68
Ensembles bornés dans $(\mathfrak{D})$ 69
Ensembles bornés et ensembles compacts 70

§ 3. L'espace topologique $(\mathfrak{D}')$ des distributions 71
Convergence dans $(\mathfrak{D}')$ 71
Propriétés de la topologie 71
Ensembles bornés et ensembles compacts dans $(\mathfrak{D}')$; réflexivité 74
Un théorème d'approximation 75
Un critère de convergence 75

§ 4. Définition topologique de la dérivation 77

Dérivées premières 77
Dérivées d'ordre quelconque 78
Fonctions monotones 79

§ 5. La dérivation, opération linéaire continue 80
Continuité de la dérivation 80
Critère de convergence 81

§ 6. Structure locale d'une distribution 82
Distributions et dérivées des fonctions continues 82
Ensembles bornés de distributions 85
Suites convergentes de distributions 86

§ 7. Distributions a support compact 87
Définition de T (φ) lorsque φ a un support quelconque 87
Espaces (ℰ), (ℰ') 88
Dualité entre (ℰ) et (ℰ') 89
Structure d'une distribution à support compact 90

§ 8. Structure globale d'une distribution 95

§ 9. Supports réguliers 98

§ 10. Structure des distributions dont le support est contenu dans une sous-variété 100
Distributions à support ponctuel 100
Distributions dont le support est un sous-espace vectoriel de R^n. 100
Distributions portées par une sous-variété indéfiniment différentiable U^k régulièrement plongée dans une variété indéfiniment différentiable V^n 102

CHAPITRE IV PRODUITS TENSORIELS DE DISTRIBUTIONS

Sommaire 104

§ 1. Intégrales dépendant d'un paramètre 104
Position du problème 104
Continuité par rapport au paramètre 105
Différentiabilité 105

§ 2. Produit tensoriel de 2 distributions 106

§ 3. Unicité, existence, calcul du produit tensoriel 108
Un théorème d'approximation. Unicité du produit tensoriel... 108
Existence et calcul du produit tensoriel 109

§ 4. Propriétés du produit tensoriel 110
Support 110
Continuité 110
Dérivation 112
Un théorème d'approximation 112

§ 5. Exemples ... 113
Distributions indépendantes de x_1 ... 113
Extension à l'espace d'une distribution définie sur un sous-espace vectoriel ... 114
Fonctions d'Heaviside et mesures de Dirac ... 114

CHAPITRE V MULTIPLICATION DES DISTRIBUTIONS

Sommaire ... 116
§ 1. Produit multiplicatif d'une distribution par une fonction indéfiniment dérivable ... 117
Impossibilité de définir le produit de 2 distributions quelconques ... 117
Définition ... 117
§ 2. Propriétés du produit multiplicatif ... 118
Support. Ordre ... 118
Continuité ... 119
Dérivation ... 120
Produit tensoriel et produit multiplicatif ... 120
Produit de plusieurs distributions ... 120
§ 3. Exemples ... 121
§ 4. Problème de la division, cas d'une variable ($n = 1$) ... 123
Position du problème ... 123
Division par x ... 123
Division par x^l ... 125
Division par une fonction H ... 125
§ 5. Esquisse du problème de la division dans le cas de plusieurs variables ... 126
§ 6. Applications aux équations différentielles et aux dérivées partielles ... 128
Définition ... 128
Équations différentielles ... 130
Une propriété des solutions des équations aux dérivées partielles ... 132
Problème de Cauchy ... 133
Solution élémentaire ... 135
Noyau élémentaire ... 138
Régularité des solutions des systèmes elliptiques ... 142

CHAPITRE VI PRODUIT DE CONVOLUTION

Sommaire ... 149
§ 1. Définition du produit de convolution usuel ... 150
Produit de convolution de deux fonctions ... 150
Convolution d'une fonction et d'une mesure ... 152
Convolution de deux mesures ... 152

§ 2. Produit de convolution de deux distributions sur R^n 153
Définition fonctionnelle. Cas de 2 fonctions 153
Cas de 2 distributions 154
Restriction sur les supports 154
Existence et calcul 155

§ 3. Propriétés du produit de convolution 156
Support 156
Continuité 157
Produit de convolution et produit tensoriel 158
Associativité, commutativité 158
Convolution, translation, dérivation 159
Convolution, combinaison de translations 161
Opérations permutant avec les dérivations 162
Polynomes de dérivation 164

§ 4. Régularisation des distributions 165
Définition 165
Continuité 167
Produit scalaire et trace du produit de convolution 167
Formules 169

§ 5. Produit de convolution dans le cas de supports non compacts. 170
Définition et propriétés 170
Commutativité, associativité 170
Les opérations du calcul symbolique à une variable ($n = 1$) ... 171
Application : dérivation d'ordre non entier 174
Les opérations du calcul symbolique à plusieurs variables 176

§ 6. Application du produit de convolution a l'étude de l'intégration 180
Application à la recherche des primitives 180
Distributions dont les dérivées premières sont des mesures 181
Conditions de Lipschitz 185
Dérivées d'ordre supérieur 188
Problèmes posés 191

§ 7. Application du produit de convolution a l'étude de la régularité d'une distribution ou d'une famille de distributions 192
Caractérisation des mesures et des distributions d'ordre fini ... 192
Remarques et conséquences 193
Ensembles bornés de distributions 194
Suites convergentes de distributions 197
Application : caractérisation des fonctions analytiques 198

§ 8. Nouveaux espaces de distributions, les $(\mathcal{D}'_{L^p})$ 199
Les espaces $(\mathcal{D}_{L^p})$ 199
Les espaces de distributions $(\mathcal{D}'_{L^p})$ 200

Caractérisation des distributions de $(\mathcal{D}'_{L^p})$ 201
Remarques 202
Dualité entre $(\mathcal{B})$ et $(\mathcal{D}'_{L^1})$ 202
Multiplication et convolution dans les $(\mathcal{D}'_{L^p})$ 203
Autre définition des distributions bornées. Extensions 205

§ 9. DISTRIBUTIONS PRESQUE-PÉRIODIQUES 206
Définition 206
Opérations et propriétés 206
Moyennes et convolution 207
Développement de Fourier 208

§ 10. APPLICATION AUX ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ET AUX ÉQUATIONS INTÉGRALES 208
Équations de convolution 208
Propriétés générales des solutions des équations de convolution 210
Solution élémentaire 210
Utilisation de la solution élémentaire 211
Potentiels newtoniens. Formule de Poisson 214
Analyticité des solutions des systèmes elliptiques homogènes . 215
Cas particuliers : fonctions harmoniques et holomorphes 216
Inéquations de convolution. Formule de décomposition de F. Riesz 218
Applications aux fonctions surharmoniques 220
Remarques et généralisations 221

CHAPITRE VII TRANSFORMATION DE FOURIER

Sommaire 223

§ 1. SÉRIES DE FOURIER 224
Distributions sur le tore 224
Série de Fourier 225
Exemples et applications. 1° Séries de Fourier des fonctions elliptiques 228
2° Équations aux différences finies 228
Distributions sur le tore et distributions périodiques sur R^n... 229

§ 2. LA TRANSFORMATION DE FOURIER USUELLE DANS L'ESPACE A n DIMENSIONS 231
Transformation de Fourier usuelle 231
Cas des distributions 232

§ 3. L'ESPACE $(\mathcal{S})$ DES FONCTIONS INDÉFINIMENT DÉRIVABLES A DÉCROISSANCE RAPIDE SUR R^n 233
L'espace $(\mathcal{S})$ 233
Interprétation géométrique 235

§ 4. L'espace $(\mathcal{S})$ des distributions a croissance lente ou tempérées 237
$(\mathcal{S}')$, dual de $(\mathcal{S})$ 237
Interprétation géométrique de $(\mathcal{S}')$ 238
Caractérisation des distributions tempérées par leur croissance 239
Mesures positives tempérées 241
Un théorème de prolongement 243

§ 5. Opérations algébriques dans l'espace $(\mathcal{S}')$ des distributions tempérées 243
Les fonctions indéfiniment dérivables à croissance lente, l'espace $(\mathcal{O}_M)$ 243
Les distributions à décroissance rapide, l'espace $(\mathcal{O}'_C)$ 244
Remarque importante 244
La multiplication dans $(\mathcal{S}')$ 245
La convolution dans $(\mathcal{S}')$ 246

§ 6. Transformation de Fourier des distributions tempérées 248
Transformation de Fourier et automorphismes de X^n et $\acute{Y}^n$ ... 251
Remarque 252

§ 7. Exemples 253
Exemple 1 253
Exemple 2. Série et intégrale de Fourier 253
Exemple 3. Transformée de Fourier d'une mesure 254
Exemple 4. Transformation de Fourier dans les $(\mathcal{D}'_{L^p})$ 256
Exemple 5. Fonctions de la distance 257
Exemple 6. Fonctions méromorphes 260
Exemple 7. Transformation de Fourier des Polynomes d'Hermite 260
Exemple 8. Distances hyperboliques 263
Exemple 9. Un calcul par intégrations successives 266

§ 8. Propriétés de la transformation de Fourier 268
Produits directs 268
Multiplication et convolution 268
Exemples 270
Distributions à spectre compact. Théorème de Paley-Wiener généralisé 271

§ 9. Distributions de type positif 274
Fonctions $\gg 0$ 274
Distributions $\gg 0$ 275
Distributions $\gg 0$ et mesures $\gg 0$ 276
Opérations sur les distributions $\gg 0$ 277
Structure des distributions $\gg 0$ 279
Exemples 280

§ 10. Applications aux équations aux dérivées partielles et aux équations intégrales 281
Transformation de Fourier des équations de convolution 282
Équations de convolution homogènes 282
Recherche d'une solution élémentaire 286
Exemple 1. Équations elliptiques 286
Exemple 2. Équations de Laplace itérées 288
Exemple 3. Équation de la chaleur itérée 288
Exemple 4. Équations hyperboliques 290
Exemple 5. Équations intégrales 291
Exemple 6. 292
Exemple 7. Théorème de Fredholm 293
Résolution d'équations avec seconds membres tempérés quelconques 296
Exemple 1 296
Exemple 2. 296
Conséquences de la solution du problème de la division 298

CHAPITRE VIII TRANSFORMATION DE LAPLACE

Sommaire 299
§ 1. Produits d'une distribution par des exponentielles 300
§ 2. L'espace de distributions $\mathcal{S}'_x(\Gamma)$ associé a un ensemble convexe non vide Γ de Ξ^n 303
§ 3. Transformation de Laplace sur $\mathcal{S}'_x(\Gamma)$ 305
Remarques diverses 307
§ 4. Étude de support d'une distribution à partir de sa transformée de Laplace 308

CHAPITRE IX COURANTS SUR UNE VARIÉTÉ

Sommaire 312
§ 1. Formes paires et impaires sur une variété indéfiniment différentiable 313
Formes ordinaires ou paires 313
Formes impaires ou tordues 315
Formes paires et impaires sur une variété orientée 317
Produits extérieurs de formes 318
Formes sur R^n 318
Image réciproque d'une forme 320
Cohomologie des formes C^∞ 321
§ 2. Courants pairs et impairs sur une variété 322
Courants 322
Exemples 323

Courants $\geqslant 0$ 337
Courants pairs et impairs sur une variété orientée 337
Courants et distributions 338
Sections-distributions d'un espace fibré à fibres vectorielles 339

§ 3. Opérations élémentaires sur les courants 341
Première opération : produit extérieur d'un courant par une forme C^∞ 341
Deuxième opération : multiplication intérieure par un champ C_∞ de multivecteurs 343
Troisième opération : cobord d'un courant 343
Cobord d'un courant sur une variété V avec bord 350
Quatrième opération : dérivation d'un courant par une transformation infinitésimale 351
Théorèmes de de Rham en cohomologie 353

§ 4. Image directe d'un courant par une application C^∞ 362
Cas de variétés orientées 369
Cas d'un difféomorphisme. Transport de structure 370

§ 5. Changement de variables. Images réciproques de courants 373
Changements de variables 373
Image directe des formes impaires indéfiniment différentiables 374
Image réciproque des courants pairs 374
Propriétés élémentaires de l'image réciproque : transitiviste, support, multiplication, cobord 375
Cas où H est un difféomorphisme local 378
Image réciproque des courants dans le cas d'une application de rang n de V^m dans V^n 390
Applications et exemples 391

§ 6. Transformation de Fourier des courants tempérés sur un espace vectoriel de dimension finie 396

Index bibliographique 401
Index terminologique 415
Index des notations 419

1. Il y a plus de 50 ans que l'ingénieur Heaviside [1] introduisit ses règles de calcul symbolique, dans un mémoire audacieux où des calculs mathématiques fort peu justifiés sont utilisés pour la solution de problèmes de physique. Ce calcul symbolique, ou opérationnel, n'a cessé de se développer depuis, et sert de base aux études théoriques des électriciens. Les ingénieurs l'utilisent systématiquement, chacun avec sa conception personnelle, avec la conscience plus ou moins tranquille ; c'est devenu une technique « qui n'est pas rigoureuse mais qui réussit bien ». Depuis l'introduction par Dirac [2] de la fameuse fonction $\delta(x)$, qui serait nulle partout sauf pour $x = 0$ et serait infinie pour $x = 0$ de telle sorte que $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,dx = +1$, les formules du calcul symbolique sont devenues encore plus inacceptables pour la rigueur des mathématiciens. Ecrire que la fonction d'Heaviside $Y(x)$ égale à 0 pour $x < 0$ et à 1 pour $x \geqslant 0$ a pour dérivée la fonction de Dirac $\delta(x)$ dont la définition même est mathématiquement contradictoire, et parler des dérivées $\delta'(x)$, $\delta''(x)$, ... de cette fonction dénuée d'existence réelle, c'est dépasser les limites qui nous sont permises. Comment expliquer le succès de ces méthodes ? Quand une telle situation contradictoire se présente, il est bien rare qu'il n'en résulte pas une théorie mathématique

[1] Heaviside [1]
[2] Dirac [1]

nouvelle qui justifie, sous une forme modifiée, le langage des physiciens ; il y a même là une source importante de progrès des mathématiques et de la physique. En fait de nombreuses justifications du calcul symbolique ont été réalisées ; les principales sont dues à Carson et van der Pol (1). Mais, si elles sont mathématiquement parfaitement rigoureuses, elles ne satisfont pas les physiciens, car ou bien elles passent par la transformation de Laplace, ce qui modifie complètement la question, ou bien elles éliminent la fonction δ et ses dérivées et interdisent des méthodes dont le succès était incontestable.

2. Nous avons généralisé la notion de fonction, d'abord par celle de mesure, puis par celle de distribution. δ sera une mesure et non une fonction, δ' une distribution et non une mesure. Il y a d'ailleurs bien longtemps que les théoriciens du potentiel magnétique utilisent les doublets ou dipôles, les feuillets ou doubles couches, etc... ; mais ce sont là des êtres à part, de définition d'ailleurs douteuse, sans liaison avec ceux du calcul symbolique des électriciens. Notre chapitre I donne une définition générale des distributions.

3. Il est ensuite nécessaire d'établir les règles de calcul sur les distributions de façon à concilier les règles usuelles du calcul différentiel et celles du calcul symbolique. Et avant tout, il faut introduire une bonne définition de la dérivée. Il est assez curieux que cette nouvelle définition ait été peu à peu introduite, tout à fait indépendamment des considérations précédentes, dans la théorie des équations aux dérivées partielles. On peut écrire l'expression générale d'une solution de l'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$ sous la forme $U = f(x + y) + g(x - y)$; mais une telle fonction U ne peut vérifier l'équation aux dérivées partielles que si f et g sont deux fois dérivables. Dans le cas contraire, on peut convenir de dire que U est « solution généralisée » de l'équation. Des définitions générales de ces solutions généralisées ont été données par divers auteurs, assez indépendamment les uns des autres (elles coïncident avec notre définition quand la solution généralisée est une fonction) : Leray (2) (dans sa thèse, sur les

(1) Carson [1] ; van der Pol et Niessen [1]
(2) Leray [1], p. 204-209

solutions « turbulentes » des équations aux dérivées partielles), Hilbert-Courant [1], Bochner [2] (« solutions faibles ») et moi-même [3]. Remarquons qu'on définit ainsi U comme solution généralisée de $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$ sans donner pour cela un sens précis à $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ et à $\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$. Dans le même ordre d'idées, également à propos d'équations aux dérivées partielles, Soboleff, Friedrichs et, récemment, Kryloff [4] ont étudié une « dérivée généralisée » d'une fonction (la définition est identique à la nôtre, mais limitée au cas où la dérivée généralisée de la fonction est elle-même une fonction). Notre chapitre II définit la dérivation des distributions et ses propriétés. Nous retrouvons par là d'une façon naturelle les « parties finies » introduites par M. Hadamard [5] également dans la théorie des équations aux dérivées partielles : les parties finies des intégrales divergentes définissent de nouvelles distributions, assez différentes des couches multiples de la théorie du potentiel.

4. La théorie de la série et de l'intégrale de Fourier a toujours introduit de grandes difficultés et nécessité un appareil mathématique important pour mettre au point les questions de convergence. La série de Fourier a engendré le développement des procédés de sommation, sans que ceux-ci aboutissent à une solution satisfaisante puisqu'il faut toujours distinguer entre séries de Fourier et séries trigonométriques qui ne sont pas des séries de Fourier. Pour l'intégrale de Fourier, l'introduction des distributions est inévitable, sous une forme directe ou camouflée. Les méthodes de Bochner, de Carleman (transformée de Fourier analytique), de Beurling (transformée de Fourier harmonique) [6] sont très proches des nôtres.

(1) Hilbert-Courant [1], p. 469 tome II

(2) Bochner [2] ; et [3] p. 158-182.

(3) Schwartz [5]. Cet article est juste antérieur aux distributions et est l'origine même des distributions

(4) Soboleff [1], [2] ; Friedrichs [1] ; Kryloff [1]. Certains articles signalés dans les notes précédentes sont postérieurs aux distributions, mais les auteurs ignoraient les distributions par suite de la lenteur de l'impression, des communications internationales, ou de ma publication. Voir aussi les fonctionnelles de Soboleff [4]

(5) Hadamard [1], p. 184-215

(6) Bochner [1], p. 110-144 ; Carleman [1], p. 36-52 ; Beurling [1], p. 9-14

Les « distributions » de Bochner sont, au fond, définies comme dérivées de fonctions continues n'ayant pas nécessairement de dérivée usuelle ; notre théorème XXI du chapitre III exprime justement qu'une distribution est, localement, une dérivée d'une fonction continue. Il nous paraît bien préférable d'avoir cette propriété plutôt comme théorème que comme définition (à cause de l'indétermination de l'ordre de dérivation et de la fonction continue, surtout pour plusieurs variables) (1). Notre chapitre VII traite de la transformation de Fourier des distributions : le résultat ne laisse rien à désirer au point de vue de la continuité et de la réciprocité des opérations $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$.

5. Enfin il est un domaine tout différent où les distributions jouent aussi un rôle. En topologie algébrique, l'homologie d'une variété différentiable est donnée soit par les « chaînes singulières », soit par les formes différentielles, avec d'un côté l'opération « bord », de l'autre l'opération « différentielle extérieure ». D'où l'idée naturelle de faire une synthèse entre ces deux catégories d'êtres. C'est M. de Rham (2) qui eut l'idée d'introduire les « courants », comprenant à la fois comme cas particuliers les chaînes et les formes, et une opération de dérivation qui était (au signe près éventuellement) le bord pour une chaîne et la différentielle extérieure pour une forme. La théorie des courants est simplifiée et perfectionnée par celle des distributions-formes différentielles sur une variété, qui englobe aussi les résultats de P. Gillis (3). Une théorie complète des courants (au sens : distributions-formes différentielles) est exposée dans un livre récent de de Rham (4). Nous traitons des courants au chapitre IX de cette nouvelle édition.

6. Notre énumération des ancêtres ou proches parents des distributions est certainement incomplète (par exemple les surfaces généralisées de L. C. Young (5) utilisées en calcul des variations, les fonctionnelles analytiques de Fantappié (6), les opérateurs de Mikusinski (7), procèdent d'idées analogues).

(1) Les travaux de H. König [1] et S. Silva [1] utilisent à nouveau la définition de Bochner pour une introduction purement algébrique des distributions.

(2) de Rham [1], [2]

(3) Gillis [1]

(4) de Rham [3]. Voir aussi Kodaira-de Rham [1]

(5) Young [1]

(6) Fantappié [1]

(7) Mikusinski [1], [2], entre autres

Nous voudrions avoir montré par ces exemples que la théorie des distributions n'est pas absolnment une « nouveauté révolutionnaire ». Beaucoup de lecteurs y retrouveront des idées qui leur étaient familières. Cette théorie englobe, de façon à la fois simple et correcte, des procédés très hétérogènes et souvent incorrects utilisés dans des domaines trés divers ; c'est une synthèse et une simplification. Naturellcment cette synthèse était entièrement à fairc. Il fallait définir correctement ces êtres nouveaux, les distributions, les étudier assez systématiquement pour pouvoir leur donner droit de cité dans l'usage courant. Il y a plus. Dans les exemples que nous avons donnés, les distributions apparaissent de façon généralement peu visible dans des raffinements destinés aux spécialistes (et c'est ce qui fait que les mêmes distributions, utilisées dans des théories différentes, n'étaient pas reconnues comme identiques parfois par le même auteur). Nos distributions ont au contraire un caractére très élémentaire qui leur permet de jouer le rôle de fondement, au début de chaque théorie. Nous pensons que, du point de vue pédagogique, les équations aux dérivées partielles, les potentiels et fonctions harmoniques, le produit de convolution, la série et l'intégrale de Fourier, ont avantage à être étudiés par les débutants d'abord sous l'angle des distributions. En particulier dans les chapitres où nous traitons de ces questions, bien peu de connaissances préalables sont cxigées. Nous avons d'ailleurs publié un cours de Méthodes Mathématiques de la Physique de Licence (Schwartz [15]), contenant un exposé élémentaire des distributions et de leurs principales propriétés, pour les ingénieurs et physiciens.

7. Cet ouvrage n'est pas un mémoire, c'est un livre, un traité des distributions. C'est ce qui explique sa longueur. De ce point de vue il n'est même pas assez long ; bien des propriétés sont énoncées sans démonstration. Notamment il arrive souvent que beaucoup de théorèmes se démontrent par des méthodes trés analogues, avec seulement de petites modifications techniques ; la démonstration ne figure alors qu'une fois, mais bien entendu, si nous laissons au lecteur le soin de faire les modifications nécessaires, nous n'avons rien énoncé sans l'avoir, pour nous, complètement démontré. La démonstration des théorèmes importants est faite dans tous les détails, celle des théorémes plus fins et plus secondaires est faite plus rapidement ; on aboutit parfois ainsi à démontrer en détail ce

qui est facile et à esquisser seulement ce qui est difficile, ce qui est un peu paradoxal, mais on y gagne une plus grande clarté de l'exposé, une vue d'ensemble plus aisée. Nous avons de même préféré à des énoncés de théorème très forts (et par là incompréhensibles) des énoncés plus simples et moins forts ; les raffinements figurent en remarque ou dans le cours de la démonstration.

Il y a lieu de signaler que, dans les exemples, nous n'avons pas explicité les calculs. Certains sont faits dans des ouvrages classiques [1], d'autres ne sont faits nulle part. Nous aurions dû pour les faire allonger beaucoup cet ouvrage, alors que les seules difficultés sont d'ordre technique.

Des sommaires au début de chaque chapitre indiquent les résultats les plus importants, les autres pouvant être passés en première lecture ou n'ayant qu'une valeur de document à consulter au moment de s'en servir.

Les paragraphes et théorèmes sont numérotés par chapitre. Les formules ont une triple numérotation indiquant successivement le chapitre, le paragraphe et le numéro de la formule.

8. Toutes les parties d'aspect théorique de ce livre exigent d'assez bonnes connaissances de topologie générale et d'analyse fonctionnelle (espaces vectoriels topologiques). Les techniciens pourront négliger ces questions. Il y a de ce côté une difficulté sérieuse ; les espaces vectoriels rencontrés ici ne sont jamais des espaces de Banach, mais des espaces vectoriels complets, localement convexes, à base dénombrable de voisinages (espaces de Fréchet) ou même plus compliqués (limites inductives d'espaces de Fréchet), et les duals de ces espaces.

Nous avons dû souvent utiliser des théorèmes, classiques dans les espaces de Banach, vrais encore dans ces espaces plus généraux, mais de démonstration non encore publiée lors de la parution de la première édition de cet ouvrage. Cette lacune est maintenant comblée, et nous donnerons toujours des références précises. Il y a aujourd'hui un grand nombre de livres d'analyse fonctionnelle qui traitent de ces espaces.

9. Il y a lieu à ce sujet de préciser ici le sens de certaines expressions. Pour être absolument correct, il faudrait utiliser les filtres

[1] Par exemple dans Watson [1].

d'H. Cartan [1] dans toutes les questions de convergence. Pour ne pas alourdir le texte, nous avons employé le langage « naïf ».

Nous dirons : « des distributions T_j convergent vers o », comme s'il s'agissait d'une suite T_j (dépendant du paramétre entier j et tendant vers o pour $j \to \infty$), mais on devra comprendre qu'il s'agit d'un filtre convergent quelconque. Au contraire certains théorémes seront valables exclusivement pour les suites, alors nous dirons : « si une suite de distributions T_j converge vers o ». Dans beaucoup de questions pratiques, les suites (ou du moins les filtres à base bornée ou dénombrable) seront suffisantes, et les théorèmes seront plus difficiles à démontrer pour les filtres généraux que pour les suites ; alors nous nous bornons parfois à énoncer le théorème pour des filtres quelconques et à n'écrire la démonstration que pour les suites.

Nous avons dû introduire, pour les formes bilinéaires, la notion d'hypocontinuité [2] (chapitre III, théoréme XI) ; la plupart des formes bilinéaires rencontrées sont hypocontinues, mais non continues. Vraisemblablement l'hypocontinuité suffit dans toutes les applications. C'est pourquoi parfois, lorsqu'il y a en outre continuité, nous l'avons indiqué dans l'énoncé, mais nous n'avons montré que l'hypocontinuité, plus simple. D'ailleurs dans un article de Dieudonné-Schwartz [3] figure le moyen de passer de l'une à l'autre (*Toute application bilinéaire hypocontinue de* $E \times F$ *dans* G *est continue, si* E, F, G, *sont tous les* 3 *des espaces de Frechet ou tous les* 3 *des duals d'espaces de Frechet reflexifs*).

10. Nos publications antérieures sur les distributions sont des résumés [4] contenant, sans aucune démonstration, les principaux résultats. On peut y ajouter le livre de Halperin [5]. D'autre part des articles de König et e Silva [6] donnent la définition et les propriétés des distributions par une voie algébrique abstraite.

Il ne nous semble pas utile de donner ici une liste des travaux où sont utilisées les distributions, mais nous indiquerons ceux qui étudient les distributions elles-mêmes.

[1] Bourbaki [1], chapitre I, § 2, 6.

[2] Nous appelons maintenant hypocontinuité ce que nous appelions continuité séparée dans la 1re édition.

[3] Dieudonné-Schwartz [1], p. 96, théorème 9.

[4] Schwartz [1], [2], [3].

[5] Halperin [1].

[6] König [1], e Silva [1].

1° Les courants, ou distributions-formes différentielles, sur une variété indéfiniment différentiable, sont traités en détail dans un livre de de Rham [1], où l'on trouvera en outre une étude des variétés différentiables elles-mêmes, et des formes harmoniques sur les espaces de Riemann; ils font, dans cette nouvelle édition, l'objet du chapitre IX.

2° Les distributions sur des groupes localement compacts ont été étudiées par Riss, puis par Bruhat [2]

3° Le changement de variables dans les distributions a été étudié par Cugiani et Albertoni, Scarfiello [3] et est traité, dans cette nouvelle édition, au § 5 du chapitre IX.

4° Au sujet de la multiplication des distributions nous signalerons une note personnelle montrant son impossibilité dans le cas général (et même dans toute théorie, éventuellement différente de celle des distributions, mais où existe une dérivation toujours possible et un élément δ [4]), et un article de König [5], donnant une multiplication fondée sur des idées toute différentes. Il apparaît bien aujourd'hui que l'impossibilité générale de la multiplication est une des principales difficultés mathématiques de la théorie quantique des champs.

5° La transformée de Laplace des distributions est parue postérieurement à la première édition; elle a été publiée dans le livre en hommage à Marcel Riesz [6]. Nous remercions l'Université de Lund d'avoir bien voulu nous autoriser à reproduire cet article sous forme de chapitre VIII de cette nouvelle édition.

6° Les noyaux, ou distributions à deux variables en relation avec les opérateurs, les produits tensoriels topologiques et les espaces nucléaires, ont été étudiés par Grothendieck et nous-même [7].

7° Les « fonctions généralisées » de Gelfand et son école sont des extensions des distributions, utlisées notamment dans les équations aux dérivées partielles. Plusieurs volumes remarquables leurs sont consacrés et donnent un exposé trés riche de leurs propriétés en même temps que celles des distributions [8].

(1) de Rham [3]
(2) Riss [1] Bruhat [1].
(3) Albertoni-Cugiani [1] Scarfiello [1].
(4) Schwartz [6].
(5) König [2].
(6) Schwartz [7].

8° Les fonctionnelles analytiques de Martineau, (9) les distributions généralisées de Roumieu (10) et les ultradistributions de Sato (11) sont des extensions diverses des distributions ou des théories parallèles, parues postérieurement à la 1re édition, et qui complètent la liste des développements antérieurs ou comtemporains, donnée aux n° 1,2,3,4,5,6. En outre, de nombreux livres modernes exposent les distributions soit pour elles-mêmes, soit en vue de certaines applications (12).

11. Cette troisième édition est identique à la deuxième, en ce qui concerne les chapitres II à VII; les chapitres VIII et IX sont nouveaux.

(7) Schwartz [7], [9], [10], [11]; Grotrendieck [1], [2].
(8) Gelfand-Shilov-Graev-Vilenkin [1].
(9) Martineau [1].
(10) Roumieu [1].
(11) Sato [1].
(12) Sans prétendre être exhaustifs, indiquons, en plus de tous ceux qui ont été cités dans cette page et les précédentes : Arsac [1], A. Friedman [1], B. Friedman [1], Courant-Hilbert [1], Edwards [1], Erdelyi [1], [2], Garsoux [1], Hormander [3], Liverman [1], Marinescu [1], Treves [1], Yosida [1].

Définition et propriétés générales des distributions

SOMMAIRE Ce chapitre contient les notations et les définitions essentielles à la compréhension de la suite.

Une fois introduites des notations à 1 variable dans l'espace à n dimensions, le § 1 introduit les mesures. Une mesure μ était autrefois définie comme une fonction complètement additive d'ensembles, on la définit aujourd'hui comme une fonctionnelle $\mu(\varphi) = \int\int \ldots \int \varphi \, d\mu$, sur l'espace $(\mathcal{C})$ des fonctions φ continues nulles en dehors d'ensembles compacts. Cette fonctionnelle doit être linéaire et continue, en un sens précisé p. 16. L'espace des mesures est le dual $(\mathcal{C}')$ de l'espace $(\mathcal{C})$. On définit le support d'une fonction continue φ et d'une mesure μ (p. 17), support qui s'étendra aux distributions et permettra des études purement locales. La notion de mesure est une extension de la notion de fonction (p. 17), car on peut biunivoquement associer la fonction $f(x)$ localement sommable à la mesure μ de densité $f(x)$, telle que

$$\mu(\varphi) = \int\int \ldots \int f(x) \; \varphi(x) \; dx.$$

La mesure de Dirac δ (p. 19), introduite en mécanique ondulatoire sous le nom de fonction de Dirac, n'est pas une fonction.

Le § 2 définit les distributions. Si l'on veut définir le « doublet » (p. 20) on est amené à lui associer la fonctionnelle $T(\varphi) = \varphi'(0)$, ce qui suppose φ dérivable. On est ainsi amené à introduire, à la place de $(\mathcal{C})$, l'espace $(\mathcal{D})$ des fonctions φ indéfiniment dérivables à support compact, espace dont les théorèmes I et II (p. 22) donnent des propriétés qui seront utilisées constamment dans la suite (densité de $(\mathcal{D})$ dans $(\mathcal{C})$ et partition de l'unité) ; une distribution T est alors (p. 24) une fonctionnelle linéaire $T(\varphi)$ définie pour $\varphi \in (\mathcal{D})$ et continue en un sens convenable. L'espace des distributions est le dual $(\mathcal{D}')$ de $(\mathcal{D})$. Une mesure et a fortiori une fonction est une distribution particulière (théorème III, p. 25).

Le § 3 étend aux distributions la notion de support (p. 28) et de propriété locale. Le principe de « recollement des morceaux » (théorème IV, p. 27) permet le passage du local au global : une distribution connue au voisinage de chaque point est connue dans son ensemble.

Le § 4 étudie les distributions $\geqslant 0$, qui sont nécessairement des mesures (théorème V, p. 29), d'où un critère permettant de prouver que certaines distributions sont des mesures.

Le § 5 est un peu à part. Il contient des généralisations qui ne sont qu'esquis-

sées et ne seront utilisées dans la suite qu'exceptionnellement, sauf toutefois le (3°), p. 31, dont il sera parfois fait usage.

§ 1 Une généralisation de la notion de fonction : la notion de mesure

Notations Nous nous proposons de généraliser la notion fonction complexe $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ de n variables réelles $x_1, x_2, \dots x_n$ (1).

Appelons R^n l'espace vectoriel de dimension n dont chaque point x est défini par les n coordonnées $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Nous ferons une fois pour toutes les conventions suivantes :

1° $x + y$ est le point de coordonnées $x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots x_n + y_n$; kx (k nombre réel) est le point de coordonnées $kx_1, kx_2, \dots kx_n$.

2° $x \geqslant 0$ signifiera $x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \dots x_n \geqslant 0$.

$x \geqslant y$ signifiera $x - y \geqslant 0$.

3° $|x|$ désignera la norme euclidienne $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$; on l'appellera aussi r s'il n'y a aucune ambiguïté. $|x - y|$ est la distance euclidienne des points x et y.

Nous désignerons l'élément d'hypervolume $dx_1\, dx_2 \dots dx_n$ par dx. Nous aurons également besoin de simplifier la notation des symboles de dérivation partielle des fonctions : p sera un systéme d'entiers $\geqslant 0$, $\{p_1, p_2, \dots p_n\}$. Nous appellerons P le plus grand des entiers $p_1, p_2, \dots p_n$ (rang de p), et $|p|$ la somme $p_1 + p_2 + \dots + p_n$ (ordre de p) ; D^p sera alors le symbole de dérivation partielle

$$D^p = \frac{\partial^{p_1 + p_2 + \dots + p_n}}{\partial x_1^{p_1} \partial x_2^{p_2} \dots \partial x_n^{p_n}}.$$

Nous poserons

$$\text{(I, 1 ; 1)} \qquad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}; \qquad \frac{\partial^m}{\partial x^m} = \frac{\partial^{mn}}{\partial x_1^m \partial x_2^m \dots \partial x_n^m}.$$

Bien évidemment, $p + q$ est le système d'entiers

$$p_1 + q_1, p_2 + q_2, \dots p_n + q_n ;$$

$p \geqslant q$ signifie $p_1 \geqslant q_1, \dots p_n \geqslant q_n$. Enfin il y aura lieu d'appeler $p\,!$

(1) Il est d'usage d'utiliser le symbole f pour la fonction, et le symbole $f(x_1, \dots x_n)$ pour sa valeur au point $(x_1, \dots x_n)$. Nous écrirons cependant parfois, lorsqu'aucune confusion ne sera possible : la fonction $f(x_1, \dots x_n)$, au lieu de la fonction f

le nombre $p_1!\,p_2!\ldots p_n!$ et x^p le nombre $x_1^{p_1}x_2^{p_2}\ldots x_n^{p_n}$. Le développement de Maclaurin de $f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ prend alors la forme simplifiée

$$f(x) = \sum_p D^p f(0)\,\frac{x^p}{p\,!}. \tag{I, 1 ; 2}$$

Nous poserons aussi $C_p^q = C_{p_1}^{q_1}C_{p_2}^{q_2}\ldots C_{p_n}^{q_n}$ avec $C_{p_i}^{q_i} = \dfrac{p_i\,!}{q_i\,!\,(p_i - q_i)\,!}$.

Ces notations ne sont pas très cohérentes, mais elles simplifieront notablement les écritures dans la suite.

Mesures Une mesure μ définie dans R^n, à valeurs complexes, est une « fonction complètement additive d'ensembles »; à tout ensemble borélien (1) borné A de R^n (en particulier à tout ensemble ouvert ou fermé borné) elle fait correspondre un nombre complexe μ (A), dit mesure de cet ensemble, et possédant la propriété suivante :

Si A est un ensemble borélien borné, réunion d'une infinité dénombrable d'ensembles boréliens A_i, deux à deux sans point commun, on a $\mu(A) = \sum_i \mu(A_i)$, la somme du deuxième membre étant absolument convergente. Si alors φ est une fonction continue complexe sur R^n, nulle en dehors d'un ensemble compact, la mesure μ lui fait correspondre un nombre complexe, qui est l'intégrale :

$$\mu(\varphi) = \iint\ldots\int_{R^n} \varphi\,d\mu. \tag{I, 1 ; 3}$$

Nous désignerons par $(\mathcal{C})$ (2) l'ensemble de toutes ces fonctions φ. On peut naturellement définir $\mu(\varphi)$ pour d'autres fonctions φ discontinues et pouvant être $\neq 0$ dans tout l'espace ; les fonctions φ pour lesquelles on peut définir $\mu(\varphi)$ par les méthodes de prolongement classiques sont dites *sommables* pour la mesure μ.

La famille des fonctions sommables pour la mesure μ dépend naturellement de μ ; mais on est sûr que si φ est continue (ou même borélienne) et nulle en dehors d'un ensemble compact, elle est sommable pour toute mesure μ.

(1) On appelle tribu borélienne le plus petit ensemble de fonctions qui d'une part contienne toutes les fonctions continues, qui, d'autre part, ne puisse contenir une suite convergente de fonctions sans contenir leur limite. Une fonction est borélienne si elle appartient à la tribu borélienne. Un ensemble est borélien si sa fonction caractéristique est borélienne.

(2) Les espaces désignés dans les premières éditions de ce livre par $(\mathcal{C})$, $(\mathcal{D})$, $(\mathcal{E})$, $(\mathcal{S})$, etc., ont perdu leurs parenthèses dans l'usage courant et sont de ce fait, à partir des nouveaux chapitres VIII et IX désignés par $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E}$, $\mathcal{S}$, etc.

Une mesure μ est dite réelle si la mesure de tout ensemble est réelle, ou, ce qui revient au même, si $\mu(\varphi)$ est réel pour φ réelle $\in (\mathcal{C})$.

Si μ est une mesure complexe quelconque, elle est décomposable en parties réelle et imaginaire, $\mu = \mu_1 + i\mu_2$, μ_1 et μ_2 étant des mesures réelles définies pour φ réelle par

(I, 1 ; 4) $$\mu(\varphi) = \mu_1(\varphi) + i\mu_2(\varphi).$$

Une mesure μ est dite $\geqslant 0$ si la mesure de tout ensemble est réelle $\geqslant 0$, ou, ce qui revient au même, si $\mu(\varphi) \geqslant 0$ pour φ réelle $\geqslant 0$ et $\in (\mathcal{C})$. Toute mesure réelle est différence de deux mesures $\geqslant$ o.

La fonctionnelle $\mu(\varphi)$ définie lorsque φ appartient à $(\mathcal{C})$ possède les propriétés suivantes :

1° Elle est linéaire :

(I, 1 ; 5) $$\begin{cases} \mu(\varphi_1 + \varphi_2) = \mu(\varphi_1) + \mu(\varphi_2) \\ \mu(k\varphi) = k\mu(\varphi), \quad k \text{ nombre complexe.} \end{cases}$$

2° Elle est « continue » au sens suivant :

Si des fonctions continues φ_j sont nulles en dehors d'un ensemble compact fixe K de R^n et convergent uniformément vers $\varphi \in (\mathcal{C})$, les $\mu(\varphi_j)$ convergent vers $\mu(\varphi)$.

Nous introduirons au chapitre III une topologie sur $(\mathcal{C})$, telle que les mesures soient les formes linéaires continues sur l'espace topologique $(\mathcal{C})$. Comme cette topologie offre certaines complications, nous nous bornerons ici aux considérations suivantes. Soit $(\mathcal{C}_K)$ l'espace vectoriel des fonctions φ continues sur R^n, nulles en dehors de l'ensemble compact K de R^n. $(\mathcal{C})$ est la réunion des $(\mathcal{C}_K)$ lorsque K varie. Nous munirons $(\mathcal{C}_K)$ de la topologie de la convergence uniforme : des $\varphi_j \in (\mathcal{C}_K)$ convergent vers 0 dans $(\mathcal{C}_K)$ si elles convergent vers 0 uniformément sur R^n. $(\mathcal{C}_K)$ est un espace de Banach, pour la norme $\|\varphi\| = \underset{x \in R^n}{\text{Max}} |\varphi(x)|$. Alors la « continuité » donnée plus haut revient exactement à dire que la restriction de μ à chaque $(\mathcal{C}_K)$ est continue. Nous garderons, lorsqu'aucune confusion ne sera à craindre, la formulation abrégée : μ est continue sur $(\mathcal{C})$.

Réciproquement, d'aprés un célèbre théorème de F. Riesz (1), à toute forme linéaire continue $L(\varphi)$ sur $(\mathcal{C})$, on peut attacher une mesure μ, bien déterminée et unique, telle que $L(\varphi) = \mu(\varphi)$.

Le théoréme de Riesz a pris une importance de plus en plus grande. Aujourd'hui, il est devenu indispensable de *définir* une

(1) Voir F. Riesz [1], et Banach [1], page 60

mesure μ comme forme linéaire continue sur $(\mathcal{C})$; c'est à partir de la fonctionnelle $\mu(\varphi)$ qu'on retrouvera, quand ce sera nécessaire, la fonction complètement additive d'ensembles $\mu(A)$, à l'inverse des anciennes méthodes ; mais le plus souvent ce sera même inutile et les propriétés de μ sont plus faciles à voir sur $\mu(\varphi)$, $\varphi \in (\mathcal{C})$, que sur $\mu(A)$ (¹).

Les mesures μ forment un espace vectoriel (on peut ajouter deux mesures et multiplier une mesure par un nombre complexe) ; nous le noterons $(\mathcal{C}')$.

Supports On appelle *support* d'une fonction continue f sur R^n un ensemble fermé F de R^n qui est l'adhérence de l'ensemble des points $x \in R^n$ tels que $f(x) \neq 0$. Un point de F est un point de R^n tel que, dans aucun voisinage de ce point, f ne soit $\equiv 0$; et réciproquement.

Le complémentaire de F est le plus grand des ensembles ouverts de R^n (la réunion des ensembles ouverts de R^n) dans lesquels f est nulle.

Une fonction $\varphi \in (\mathcal{C})$ n'est autre chose qu'une fonction continue à support compact.

Si maintenant μ est une mesure sur R^n, on dit que μ est nulle dans un ouvert Ω de R^n si $\mu(\varphi) = 0$ toutes les fois que φ a son support dans Ω. On démontre qu'une mesure nulle dans une famille d'ouverts est nulle dans leur réunion.

On appelle *support* d'une mesure μ sur R^n un ensemble fermé F de R^n (on dira aussi que la mesure μ est supportée ou portée par F) défini comme suit : *un point de* F *est un point de* R^n *tel que dans aucun voisinage ouvert de ce point* μ *ne soit nulle, et réciproquement.*

Le complémentaire de F *est le plus grand des ensembles ouverts (la réunion des ensembles ouverts) dans lesquels* μ *est nulle.*

On voit que $\mu(\varphi) = 0$ toutes les fois que le support de μ et le support de φ sont sans point commun ; il en est même encore ainsi toutes les fois que φ s'annule sur le support de μ.

Fonctions et mesures En quoi la notion de mesure généralise-t-elle la notion de fonction ? Faisons jouer, dans R^n, un rôle spécial

(¹) C'est cette méthode qui est employée dans Bourbaki [7]

à une mesure particulière, la mesure de Lebesgue ; nous désignerons l'élément d'hypervolume par dx ou $dx_1 dx_2 \dots dx_n$.

Soit μ une mesure « absolument continue ». Elle a une « densité » $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, fonction sommable pour la mesure de Lebesgue sur tout ensemble compact ; pour tout ensemble borélien borné A on a alors

$$\text{(I, 1 ; 6)} \qquad \mu(A) = \iint \dots \int_A f(x)dx = \iint \dots \int_A f(x_1, x_2, \dots, x_n)dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

et pour $\varphi \in (\mathcal{C})$

(I, 1 ; 7)

$$\begin{cases} \mu(\varphi) = \iint \dots \int_{R^n} f(x)\varphi(x)dx = \\ \qquad = \iint \dots \int_{R^n} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)\, dx_1 dx_2 \dots dx_n. \end{cases}$$

La fonction f n'est pas définie partout, mais seulement *presque partout* (sauf sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle).

Inversement à toute fonction f, sommable sur tout compact de R^n, on peut sans ambiguïté faire correspondre une mesure μ absolument continue de densité f ; cette mesure est définie par

$$\text{(I, 1 ; 8)} \qquad \mu(\varphi) = \iint \dots \int_{R^n} f(x)\varphi(x)dx, \qquad \varphi \in (\mathcal{C}).$$

Nous avons ainsi établi une correspondance biunivoque entre le sous-espace vectoriel de $(\mathcal{C}')$ formé des mesures absolument continues et l'espace vectoriel des « classes » de fonctions sommables sur tout compact (une classe étant l'ensemble de toutes les fonctions presque partout égales à une même fonction).

Nous profiterons de cette correspondance pour faire une identification complète. *Nous identifierons, dans la suite, une mesure μ absolument continue à sa densité f.* Nous écrirons toujours $\mu = f$, et indifféremment $\mu(\varphi)$ ou $f(\varphi)$. Cela signifiera que l'on a (I, 1 ; 8). Une fonction, sommable sur tout compact, et définie à un ensemble de mesure nulle près, est bien alors un cas particulier d'une mesure.

Remarquons qu'une fonction continue f peut être étudiée de deux points de vue absolument distincts et qu'il ne faut pas confondre :

d'une part, c'est une *fonction* au sens usuel du mot, prenant une valeur définie $f(x)$ en chaque point x ; elle est ainsi identifiée à un élément φ de $(\mathcal{C})$, si son support est compact ;

d'autre part c'est la densité d'une mesure absolument continue μ ;

elle est alors définie comme une fonctionnelle $\mu(\varphi) = f(\varphi)$ (formule (I, 1 ; 8)) ; elle est ainsi identifiée à un élément μ de $(\mathcal{C}')$.

Avec l'une ou l'autre conception, le support de f dans R^n est le même.

Nous conviendrons d'appeler δ, *mesure de Dirac* [1], la mesure formée d'une masse $+1$ à l'origine $x = 0$ de R^n. Pour $\varphi \in (\mathcal{C})$,

(I, 1 ; 9) $$\delta(\varphi) = \varphi(0).$$

Nous désignerons de même par $\delta_{(x_\nu)}$ la mesure formée d'une masse $+1$ au point x_ν de R^n.

Pour $\varphi \in (\mathcal{C})$,

(I, 1 ; 10) $$\delta_{(x_\nu)}(\varphi) = \varphi(x_\nu).$$

Il résulte de ce qui précède que δ est l'exemple le plus simple d'une mesure qui ne soit pas une fonction. Si les physiciens tiennent à l'appeler *fonction de Dirac* c'est pour pouvoir faire sur elles certaines opérations qui ne sont définies que sur des fonctions et non sur des mesures (la dérivation par exemple) ; mais justement nous rendrons toutes ces opérations possibles sur des mesures, et nous conserverons soigneusement la distinction entre les mesures qui sont ou ne sont pas des fonctions. Une mesure « singulière » portée par une courbe ou une surface, avec une densité linéaire ou superficielle, n'est pas une fonction.

Remarquons bien aussi que la notion de mesure n'est pas à proprement parler une généralisation de la notion de fonction, mais seulement une généralisation de la notion de classe de fonctions sommables sur tout compact. A une fonction d'une variable ($n = 1$) telle que $1/x$ ne correspond aucune mesure, car $1/x$ n'est pas sommable au voisinage de l'origine $x = 0$. D'autre part, rappelons que, considérées comme mesures, 2 fonctions presque partout égales ne devront jamais être distinguées. Si f et g sont presque partout égales, nous écrirons $f = g$. Si, après modification sur un ensemble de mesure nulle, f devient une fonction continue, ou convexe, ou harmonique, nous dirons que f est continue, ou convexe, ou harmonique.

Restriction à un ouvert Tout ce que nous venons de dire s'étend aux mesures définies sur un ouvert Ω_0 de R^n.

[1] Cette mesure, appelée usuellement fonction de DIRAC, a été introduite pour les besoins de la Mécanique Ondulatoire. Voir DIRAC [1]

Appelons $(\mathcal{C}_{\Omega_0})$ le sous-espace de $(\mathcal{C})$ formé des fonctions φ à support contenu dans l'ouvert Ω_0. Une mesure sur Ω_0 est alors une forme linéaire sur $(\mathcal{C}_{\Omega_0})$ dont la restriction à chaque $(\mathcal{C}_K)$, K compact contenu dans Ω_0, est continue. L'espace de ces mesures sera noté $(\mathcal{C}'_{\Omega_0})$. Les mesures sur Ω_0 possèdent des propriétés analogues aux mesures sur R^n ; aussi prendrons-nous $\Omega_0 = R^n$, sans apporter par là aucune restriction réelle à la généralité de notre étude. Naturellement une mesure sur Ω_0 n'est pas, en général, prolongeable en une mesure sur R^n. Ainsi la fonction $1/x$ (1 variable, $n = 1$) définit une mesure sur l'ouvert Ω_0 complémentaire de l'origine dans R^1 ; elle n'est pas prolongeable en une mesure sur R^1, puisque non sommable au voisinage de l'origine. Pour qu'une mesure sur Ω_0 soit prolongeable en une mesure sur R^n, il faut et il suffit que, quel que soit le compact K de R^n, $\iint \dots \int_{K \cap \Omega_0} |d\mu|$ soit fini.

§ 2 Généralisation de la notion de mesure. Les distributions

Il y a longtemps que, dans la théorie du potentiel, les physiciens emploient des notions plus compliquées que celle de masse : les « couches multiples » (multipôles, feuillets). Leur considération ne prend un sens net que si l'on abandonne définitivement la définition d'une mesure comme fonction d'ensembles pour adopter sa définition comme fonctionnelle.

Le doublet Qu'est-ce qu'un « doublet », de « moment » (moment électrique ou magnétique) $+ 1$, placé à l'origine O, sur la droite réelle ($n = 1$) ?

C'est la « limite [1] » d'un système de deux masses, $+ 1/\varepsilon$ au point d'abscisse ε, et $- 1/\varepsilon$ à l'origine, lorsque $\varepsilon > 0$ tend vers 0. C'est donc une « limite de mesures », mais ce n'est pas une mesure. Si on voulait définir un doublet comme mesure-fonction additive d'ensembles, il y aurait d'insurmontables difficultés : la mesure de tout intervalle serait nulle, sauf s'il a une extrémité à l'origine, auquel cas elle serait indéterminée.

Utilisons la définition fonctionnelle de la mesure. Le système T_ε des 2 masses est défini par

(1) Il s'agira d'une vraie limite quand nous aurons établi (chapitre III) une topologie dans l'espace des distributions

$$(I, 2 ; 1) \qquad T_\varepsilon(\varphi) = \frac{\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)}{\varepsilon}, \qquad \varphi \in (\mathcal{C}).$$

On voit alors que, *si* φ *est dérivable*, le doublet devra être défini par un passage à la limite, $\varepsilon \to 0$, comme la fonctionnelle

$$(I, 2 ; 2) \qquad T(\varphi) = \varphi'(0).$$

Ainsi la forme linéaire $T(\varphi)$ associée au doublet n'est définie que sur un sous-espace vectoriel dense dans $(\mathcal{C})$, formé des fonctions φ dérivables à l'origine ; de plus c'est une forme linéaire « discontinue », car, si des $\varphi_j(x)$ convergent uniformément vers 0, leurs dérivées $\varphi'_j(0)$ ne convergent pas nécessairement vers 0. Nous sommes donc amenés à considérer des sous-espaces vectoriels de $(\mathcal{C})$. Pour pouvoir considérer des « couches-multiples » d'ordre quelconque, nous serons amenés à ne considérer que des fonctions φ *indéfiniment dérivables.*

L'espace $(\mathcal{D})$. Nous appellerons $(\mathcal{D})$ l'espace vectoriel des fonctions complexes φ de n variables réelles, indéfiniment dérivables et à support compact. Si $(\mathcal{D}^m)$ est l'espace vectoriel des fonctions ayant des dérivées continues jusqu'à l'ordre m inclusivement, et de support compact, $(\mathcal{D})$ est l'intersection de tous les $(\mathcal{D}^m)$.

Remarquons qu'il est classique, mais non absolument évident, qu'il existe des fonctions $\varphi \in (\mathcal{D})$ en dehors de la fonction 0. Les fonctions $\varphi \not\equiv 0$, qui ont cependant toutes leurs dérivées successives nulles à la frontière de leur support, n'ont rien d'élémentaire ! Donnons sur ces fonctions quelques propriétés.

LEMME. *Quel que soit* $\varepsilon > 0$, *on peut trouver une fonction* $\geqslant 0$ $\rho_\varepsilon(x) \in (\mathcal{D})$, *dont le support est la boule* $B_\varepsilon : r \leqslant \varepsilon$, *qui est* > 0 *pour* $r < \varepsilon$, *et vérifie*

$$(I, 2 ; 3) \qquad \iint \cdots \int \rho_\varepsilon(x) dx = +1.$$

Il suffit en effet de prendre la fonction

$$(I, 2 ; 4) \qquad \rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 \text{ pour } r \geqslant \varepsilon \\ \dfrac{k}{\varepsilon^n} \exp.\left(\dfrac{-\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - r^2}\right) \text{ pour } r < \varepsilon \end{cases}$$

la constante k étant choisie de façon que

$$(I, 2 ; 5) \qquad k \iint \cdots \int_{r \leqslant 1} \exp.\left(\frac{-1}{1 - r^2}\right) dx = 1.$$

THÉORÈME I *Si* K *est un compact de* R^n, H *un voisinage compact de* K *dans* R^n, *alors tout élément de* $(\mathcal{C}_K)$ *est, dans* $(\mathcal{C}_H)$, *limite d'une suite d'éléments de* $(\mathcal{D})$.

On peut dire, par abus de langage, que $(\mathcal{D})$ est dense dans $(\mathcal{C})$.

Si en effet $\varphi \in (\mathcal{C})$, sa « régularisée » (¹)

(I, 2 ; 6)

$$\left\{ \begin{aligned} \varphi * \rho_\varepsilon &= \iint \cdots \int \varphi(\xi)\, \rho_\varepsilon(x - \xi)\, d\xi \\ &= \iint \cdots \int \varphi(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n)\, \rho_\varepsilon(x_1 - \xi_1, \ldots x_n - \xi_n)\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_n \end{aligned} \right.$$

est à support compact contenu dans le voisinage d'ordre ε du support K dc φ, et indéfiniment dérivable (dérivation immédiate sous le signe d'intégration), donc dans $(\mathcal{D})$. De plus, compte tenu de (I, 2 ; 3) :

$$\text{(I, 2 ; 7)} \quad (\varphi * \rho_\varepsilon) - \varphi = \iint \cdots \int [\varphi(\xi) - \varphi(x)]\, \rho_\varepsilon(x - \xi)\, d\xi.$$

Comme $\rho_\varepsilon(x - \xi)$ n'est $\neq 0$ que pour $|x - \xi| < \varepsilon$, et qu'il existe un nombre $\eta_\varepsilon > 0$, tendant vers 0 avec ε (oscillation de φ), tel que $|x - \xi| \leqslant \varepsilon$ entraîne $|\varphi(\xi) - \varphi(x)| \leqslant \eta_\varepsilon$, on voit que le 2ᵉ membre de (I, 2 ; 7) est majoré par η_ε. Ainsi $\varphi \in (\mathcal{C}_K)$ est bien limite dans $(\mathcal{C}_H)$ de $\varphi * \rho_\varepsilon \in (\mathcal{D})$ lorsque $\varepsilon \to 0$.

Partition de l'unité (²) THÉORÈME II *Quel que soit le recouvrement* $\{\Omega_i\}$ *d'un ouvert* Ω *de* R^n *par des ouverts* Ω_i, *i parcourant un ensemble fini ou infini d'indices* I, *on peut trouver des fonctions* α_i *définies et indéfiniment dérivables sur* Ω, *dépendant du même ensemble d'indices et vérifiant les propriétés suivantes* :

(I, 2 ; 8)
- *a*) $\alpha_i \geqslant 0$; le support de α_i (dans Ω) est dans Ω_i ;
- *b*) sur tout compact de Ω, un nombre fini seulement des α_i ne sont pas identiquement nulles, et $\sum_i \alpha_i(x) \equiv 1$ dans Ω.

Les α_i constituent une *partition de l'unité*, un partage de la fonction 1 en somme de fonctions $\geqslant 0$ indéfiniment dérivables de supports très petits. Cette partition est dite *subordonnée au recouvre-*

(¹) La régularisation est une application courante du produit de convolution qui sera étudiée en détail au chapitre VI pour les distributions. Voir A. WEIL [1], chapitre III

(²) Pour tous les problèmes de recouvrement, théorème d'Urysohn, partition de l'unité voir DIEUDONNÉ [2], et BOURBAKI [2], § 4

ment $\{\Omega_i\}$, $i \in \mathrm{I}$. Supposons d'abord le recouvrement $\{\Omega_i\}$ localement fini [1] et tous les Ω_i relativement compacts dans Ω. On sait qu'alors on peut trouver un nouveau recouvrement localement fini $\{\Omega'_i\}$, dépendant du même ensemble d'indices, et subordonné au premier, c'est-à-dire tel que $\overline{\Omega}'_i \subset \Omega_i$. Nous considérerons encore un recouvrement $\{\Omega''_i\}$ subordonné au recouvrement $\{\Omega'_i\}$. Soit alors β_i une fonction continue sur R^n (définie par la méthode de prolongement d'Urysohn) comprise entre 0 et 1, égale à $+1$ sur $\overline{\Omega}''_i$, à 0 sur le complément de Ω'_i. $\overline{\Omega}'_i$ étant compact, pour ε_i assez petit, le voisinage fermé d'ordre ε_i de $\overline{\Omega}'_i$ est contenu dans Ω_i, de sorte que, si nous utilisons la fonction ρ_{ε_i} définie au lemme ci-dessus, la régularisée $\in (\mathcal{D})$

$$\text{(I, 2 ; 9)} \qquad \gamma_i = \beta_i * \rho_{\varepsilon_i}$$

est certainement > 0 dans $\overline{\Omega}''_i$ et son support dans R^n est contenu dans Ω_i. La somme $\sum\limits_\nu \gamma_\nu(x)$ est définie en tout point x de Ω et même un nombre fini seulement des termes de cette somme sont $\not\equiv 0$ sur un voisinage compact de x dans Ω ; elle est indéfiniment dérivable et partout > 0 dans Ω puisque les Ω''_i forment un recouvrement de Ω. Alors

$$\text{(I, 2 ; 10)} \qquad \alpha_i(x) = \gamma_i(x) \Big/ \Big(\sum_\nu \gamma_\nu(x)\Big)$$

satisfait à toutes les propriétés voulues.

Supposons maintenant le recouvrement $\{\Omega_i\}$ arbitraire. Comme Ω est paracompact, on peut trouver un recouvrement plus fin (Ω_j) localement fini, dépendant d'un autre ensemble d'indices J, et une application $j \to i(j)$ de J dans I, tels que tout Ω_j soit relativement compact dans Ω et que, pour tout $j \in \mathrm{J}$, $\Omega_j \subset \Omega_{i(j)}$. D'après ce que nous venons de voir, il existe une partition de l'unité (α_j) correspondant au recouvrement (Ω_j). Posons alors, pour tout $i \in \mathrm{I}$, $\alpha_i = \sum\limits_{i(j)=i} \alpha_j$. Tout x de Ω a un voisinage sur lequel un nombre fini seulement des α_j sont $\not\equiv 0$, donc α_i est encore indéfiniment dérivable dans Ω, et son support (dans Ω) est exactement la réunion des supports des α_j, pour lesquels $i(j) = i$, donc dans Ω_i. Alors les α_i ont toutes les propriétés voulues.

[1] Un recouvrement par des ensembles ouverts est dit localement fini si tout compact est rencontré par un nombre fini seulement de ces ouverts

Les espaces topologiques $(\mathcal{D}_K)$ Nous appellerons $(\mathcal{D}_K)$ le sous-espace de $(\mathcal{D})$ formé des fonctions φ ayant leur support dans le compact K de R^n. Nous allons mettre sur $(\mathcal{D}_K)$ une topologie plus fine que la topologie induite par $(\mathcal{E}_K)$. On dira que des fonctions $\varphi_j \in (\mathcal{D}_K)$ convergent vers 0 dans $(\mathcal{D}_K)$, si les fonctions φ_j convergent vers 0 uniformément sur R^n, ainsi que chacune de leurs dérivées. Autrement dit, pour chaque système fixe d'entiers $p_1 \geqslant 0$, $p_2 \geqslant 0, \ldots$ $p_n \geqslant 0$, les dérivées $\dfrac{\partial^{p_1 + p_2 + \cdots p_n}}{(\partial x_1)^{p_1}(\partial x_2)^{p_2}\ldots(\partial x_n)^{p_n}}\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$ convergent vers 0 uniformément par rapport à $x_1, x_2, \ldots x_n$ (mais aucune uniformité n'est exigée pour l'ensemble des dérivées de tous les ordres). Cette topologie est définie par la famille des semi-normes N_p :

$$N_p(\varphi) = \operatorname*{Sup}_{x \in R^n} |D^p \varphi(x)|, \quad \text{où} \quad p = (p_1, p_2, \ldots p_n).$$

On peut de même introduire le sous-espace $(\mathcal{D}^m_K)$ de $(\mathcal{D}^m)$ et le munir d'une topologie analogue, ne faisant intervenir que les dérivées d'ordre $\leqslant$ m. Si l'on reprend la démonstration du théorème I, on voit, par dérivation sous le signe $\int$, que, si D^p est une dérivation partielle d'ordre $|p| \leqslant$ m, et si φ est dans $(\mathcal{D}^m_K)$, on a $D^p(\varphi * \rho_\varepsilon) = D^p \varphi * \rho_\varepsilon$; de sorte que la démonstration du théorème, appliquée à $D^p \varphi$, montre que, lorsque ε tend vers 0, les dérivées d'ordre $\leqslant m$ de $\varphi * \rho$ convergent uniformément vers les dérivées correspondantes de φ ; autrement dit, $(\mathcal{D})$ est « dense dans $(\mathcal{D}^m)$ » comme il était déjà dense dans $(\mathcal{D}^0) = (\mathcal{C})$.

Les distributions. Une distribution T est alors une forme linéaire sur $(\mathcal{D})$, *dont la restriction à chaque* $(\mathcal{D}_K)$, *K compact de* R^n, *est continue.* Nous dirons encore, par abréviation, que c'est une forme linéaire continue sur $(\mathcal{D})$.

En langage ordinaire, une distribution T sera donc une fonctionnelle $\varphi \rightarrow T(\varphi)$ ou $T.\varphi$ où $< T, \varphi >$ (nombre complexe attaché à chaque fonction φ), définie pour toutes les fonctions $\varphi \in (\mathcal{D})$ (fonctions indéfiniment dérivables à support compact), et possédant les propriétés suivantes :

a) T est linéaire :

$$(I, 2\,;\, 11) \quad \begin{cases} T(\varphi_1 + \varphi_2) = T(\varphi_1) + T(\varphi_2), \\ T(k\varphi) = kT(\varphi), \quad k \text{ nombre complexe ;} \end{cases}$$

b) T est « continue » :

si des $\varphi_j \in (\mathcal{D})$ ont leurs supports contenus dans un compact fixe de R^n, et si elles convergent uniformément vers 0 dans R^n ainsi que chacune de leurs dérivées, alors les nombres complexes $T(\varphi_j)$ convergent vers 0.

Les distributions T forment elles-mêmes un espace vectoriel (on peut additionner deux distributions et multiplier une distribution par un nombre complexe) qu'on désignera par $(\mathcal{D}')$.

Une mesure μ sur R^n définit bien une distribution particulière, car pour $\varphi \in (\mathcal{D})$, $\mu(\varphi)$ est linéaire, et $\mu(\varphi)$ est continue non seulement sur $(\mathcal{D}_K)$, muni de la topologie définie ci-dessus, mais même sur $(\mathcal{D}_K)$ muni de la topologie induite par $(\mathcal{C}_K)$, qui est moins fine. Autrement dit, si des $\varphi_j \in (\mathcal{D})$, à supports contenus dans un compact fixe de R^n, convergent uniformément vers 0 dans R^n, sans qu'on sache rien sur leurs dérivées, les $\mu(\varphi_j)$ convergent vers 0. La réciproque est vraie :

Distributions et mesures THÉORÈME III *Pour qu'une distribution* T *puisse être définie par une mesure* μ, *il faut et il suffit qu'elle soit continue sur chaque* $(\mathcal{D}_K)$ *muni de la topologie induite par* $(\mathcal{C}_K)$. *Dans ce cas,* μ *est bien déterminée et unique.*

La condition est, comme il est dit plus haut, nécessaire. Elle est aussi suffisante. Soit en effet H un compact de R^n. Si T est continue sur $(\mathcal{D}_H)$ muni de la topologie induite par $(\mathcal{C}_H)$, elle se prolonge, et d'une manière unique, en une forme linéaire $\overline{T}_H$ sur l'adhérence $\overline{(\mathcal{D}_H)}$ de $(\mathcal{D}_H)$ dans $(\mathcal{C}_H)$, continue pour la topologie induite par $(\mathcal{C}_H)$. Si $H_1 \supset H_2$, $\overline{(\mathcal{D}_{H_1})} \supset \overline{(\mathcal{D}_{H_2})}$, et $\overline{T}_{H_1}$ prolonge $\overline{T}_{H_2}$. Alors les divers prolongements $\overline{T}_H$ définissent un prolongement $\overline{T}$ de T à la réunion des $\overline{(\mathcal{D}_H)}$; cette réunion n'est autre que $(\mathcal{C})$ d'après le théorème I, et $\overline{T}$ est une forme linéaire sur $(\mathcal{C})$ dont la restriction à chaque $(\mathcal{C}_K)$ est continue (puisque $\overline{(\mathcal{D}_H)}$ contient $(\mathcal{C}_K)$ si H est un voisinage de K) c'est-à-dire une mesure μ, et T est bien la distribution définie à partir de cette mesure ; de plus, une telle mesure est unique.

Nous montrons ainsi l'existence d'une correspondance biunivoque entre l'espace $(\mathcal{C}')$ des mesures et un sous-espace de l'espace $(\mathcal{D}')$ des distributions. Comme au § 1, nous ferons une *identification complète* entre une distribution définie par une mesure et cette mesure. Une mesure est une distribution particulière ; une fonction f sommable sur tout compact (définie à un ensemble de mesure

nulle près) est une mesure particulière, donc a fortiori une distribution particulière, définie par

$$(\text{I}, 2\,; 12) \quad f(\varphi) = \iint \dots \int f(x)\, \varphi(x)\, dx, \qquad \varphi \in (\mathcal{D}).$$

Le doublet, formule (I, 2 ; 2), est l'exemple le plus simple d'une distribution qui ne soit pas une mesure, car c'est une forme linéaire discontinue sur $(\mathcal{D}_K)$ muni de la topologie induite par $(\mathcal{C}_K)$, si l'origine est intérieure à K. On voit de même que l'espace $(\mathcal{D}'^m)$ des formes linéaires sur $(\mathcal{D}^m)$, dont les restrictions aux $(\mathcal{D}^m_K)$ sont continues, peut être identifié à un sous-espace de $(\mathcal{D}')$. Le doublet appartient à $(\mathcal{D}'^1)$. Une distribution appartenant à $(\mathcal{D}'^m)$ sera dite d'ordre $\leqslant m$.

§ 3 Principe de localisation. Support d'une distribution

Distribution nulle dans un ouvert On dit qu'une distribution T est nulle dans un ensemble ouvert Ω de R^n si $T(\varphi) = 0$ toutes les fois que $\varphi \in (\mathcal{D})$ a son support contenu dans Ω. Deux distributions T_1, T_2, sont dites égales dans Ω si $T_1 - T_2$ est nulle dans Ω. Cette définition permet de considérer les distributions, comme les mesures ou les fonctions, *d'un point de vue local* ; on pourra écrire des égalités entre distributions pour un ouvert Ω de R^n, sans préjuger en rien de ce qui se passe dans l'espace R^n entier.

Comme pour les mesures, on pourra étudier les distributions sur un ouvert Ω_0 de R^n. On appellera $(\mathcal{D}_{\Omega_0})$ le sous-espace de $(\mathcal{D})$ formé des fonctions φ dont le support est contenu dans Ω_0. Une distribution sur Ω_0 est une forme linéaire sur $(\mathcal{D}_{\Omega_0})$, dont la restriction à chaque $(\mathcal{D}_K)$, K compact contenu dans Ω_0, est continue. L'espace de ces distributions sera noté $(\mathcal{D}'_{\Omega_0})$.

Naturellement une distribution T sur Ω_0 ne peut pas nécessairement se prolonger en une distribution T sur R^n. Ainsi on peut montrer qu'une fonction telle que $\exp\left(\frac{1}{x}\right)$, définie pour $x > 0$, n'est pas prolongeable en une distribution sur la droite réelle R^1.

Une distribution est nulle au voisinage d'un point si elle est nulle dans un ouvert contenant ce point.

Il ne suffit pas de pouvoir considérer une distribution dans un ouvert, il faut encore pouvoir, de la connaissance locale d'une distribution, en déduire une connaissance globale par « recollement des morceaux ».

Principe du « recollement des morceaux » THÉORÈME IV. — *Soit* $\{\Omega_i\}$ *une famille finie ou infinie d'ouverts, de réunion* Ω ; *soit d'autre part* $\{T_i\}$ *une famille de distributions dépendant du même ensemble d'indices* I. *La distribution* T_i *est définie dans l'ouvert* Ω_i ; *on suppose de plus que, si* Ω_i *et* Ω_j *ont une intersection non vide,* T_i *et* T_j *coïncident dans cette intersection. Alors il existe une distribution et une seule,* T, *définie dans* Ω, *qui coïncide avec* T_i *dans chaque ouvert* Ω_i.

Appliquons le théorème II (partition de l'unité) ; on peut trouver des fonctions $\alpha_i \in (\mathcal{D}_\Omega)$ satisfaisant aux conditions (I, 2 ; 8) dans Ω. Soit K_i le support de α_i. Soit maintenant $\varphi \in (\mathcal{D}_\Omega)$. On peut écrire

$$\text{(I, 3 ; 1)} \qquad \varphi = \sum_i (\alpha_i \varphi)$$

dans R^n.

La somme du 2e membre n'a qu'un nombre fini de termes $\not\equiv 0$, car un nombre fini seulement des α_i sont $\not\equiv 0$ sur le support compact de φ. Alors, si T existe, elle est entièrement connue, car elle vérifie

$$\text{(I, 3 ; 2)} \qquad T(\varphi) = \sum_i T(\alpha_i \varphi) = \sum_i T_i(\alpha_i \varphi).$$

Réciproquement cette formule définit $T(\varphi)$ comme une forme linéaire sur $(\mathcal{D}_\Omega)$. La restriction de cette forme linéaire à $(\mathcal{D}_K)$, K compact $\subset \Omega$, est continue ; car si φ converge vers 0 dans $(\mathcal{D}_K)$, chacun des $\alpha_i \varphi$ converge vers 0 dans $(\mathcal{D}_{K \cap K_i})$, donc $T_i(\alpha_i \varphi)$ converge vers 0 ; φ gardant son support dans K compact, un nombre fini seulement de valeurs fixes de i intervient dans la formule (I, 3 ; 2), de sorte que $T(\varphi)$ tend vers 0 ; T est donc une distribution dans Ω. Montrons que, dans Ω_i, $T = T_i$. Soit en effet φ une fonction $\in (\mathcal{D}_\Omega)$ ayant son support dans Ω_i ; $\alpha_j \varphi$ a son support dans l'intersection $\Omega_i \cap \Omega_j$, et comme dans cette intersection T_j et T_i coïncident, on a $T_i(\alpha_j \varphi) = T_j(\alpha_j \varphi)$, et par suite on a bien

$$\text{(I, 3 ; 3)} \qquad T_i(\varphi) = \sum_j T_i(\alpha_j \varphi) = \sum_j T_j(\alpha_j \varphi) = T(\varphi).$$

La distribution T a donc toutes les propriétés demandées.

Dans le cas particulier où toutes les T_i sont nulles, $T = 0$ est la seule distribution répondant à la question ; autrement dit, *une distribution nulle dans une famille d'ouverts est nulle dans leur*

réunion. Ou encore : *une distribution nulle au voisinage de chaque point d'un ouvert* Ω *est nulle dans* Ω.

Remarque Le théorème démontré pour $(\mathcal{D}')$ est aussi vrai pour $(\mathcal{D}'^m)$. *Si une distribution* $T \in (\mathcal{D}')$ *est d'ordre* $\leqslant m$ *dans une famille d'ouverts* Ω_i, *elle est d'ordre* $\leqslant m$ *dans leur réunion* Ω.

Support d'une distribution Le théorème IV permet de définir le support d'une distribution T. La réunion des ouverts où T est nulle est en effet un ouvert où T est nulle, et c'est le plus grand ; son complémentaire est le support de T, qui est ainsi le plus petit ensemble fermé en dehors duquel T soit nulle. On peut encore dire, comme nous l'avons dit pour les mesures : un point x de R^n appartient au support F de T si T n'est nulle dans aucun voisinage ouvert de x, et réciproquement.

Le support d'une distribution est un ensemble fermé quelconque de R^n. Si le support de T et le support de φ sont sans point commun, $T(\varphi) = 0$. Nous montrerons même plus loin que si φ est nulle ainsi que toutes ses dérivées sur le support de T, $T(\varphi) = 0$ (théorème XXXIII du chapitre III). Si T est une mesure μ, le support de T est le support de cette mesure, déjà défini. En effet : si Ω_1 et Ω_2 sont les ouverts complémentaires des supports de μ, considérée respectivement comme mesure et comme distribution, on a

a) $\mu(\varphi) = 0$ si $\varphi \in (\mathcal{C}_{\Omega_1})$, donc a fortiori si $\varphi \in (\mathcal{D}_{\Omega_1})$, ce qui prouve que $\Omega_2 \supset \Omega_1$.

b) $\mu(\varphi) = 0$ si $\varphi \in (\mathcal{D}_{\Omega_2})$; mais, si $\varphi \in (\mathcal{C}_{\Omega_2})$, et si H est un voisinage compact dans Ω_2 du support K de φ, il résulte du théorème I que φ est, dans $(\mathcal{C}_{_H})$, adhérente à $(\mathcal{D}_{_H})$, et comme μ est nulle sur $(\mathcal{D}_{_H})$, $\mu(\varphi)$ est nulle. Donc $\Omega_1 \supset \Omega_2$.

Pour tous les problèmes ayant une définition locale, les distributions sur Ω_0 ont les mêmes propriétés que les distributions sur R^n. Nous prendrons toujours $\Omega_0 = R^n$, sans apporter par là aucune restriction réelle à la généralité de notre étude.

§ 4 Distributions positives

Nous dirons qu'une distribution T est *réelle* si $T(\varphi)$ est réel pour φ réelle $\in (\mathcal{D})$. Toute distribution T est, comme toute mesure, décomposable en parties réelle et imaginaire, $T = T_1 + iT_2$, T_1 et T_2 étant des distributions réelles définies pour φ réelle par

$$T(\varphi) = T_1(\varphi) + iT_2(\varphi).$$

Nous dirons que la distribution T est $\geqslant 0$ (positive) si $T(\varphi) \geqslant 0$ lorsque $\varphi \in (\mathcal{D})$ est $\geqslant 0$. Nous dirons qu'une distribution T_1 est supérieure à une distribution T_2, $T_1 \geqslant T_2$, si $T_1 - T_2 \geqslant 0$, c'est-à-dire si $T_1(\varphi) \geqslant T_2(\varphi)$ lorsque φ est $\geqslant 0$.

THÉORÈME V. *Une distribution $\geqslant 0$ est une mesure $\geqslant 0$.*

Soit en effet T une distribution $\geqslant 0$. Montrons qu'elle est une forme linéaire continue sur $(\mathcal{D}_K)$, muni de la topologie induite par $(\mathcal{E}_K)$. Supposons que des $\varphi_j \in (\mathcal{D}_K)$ convergent vers 0 dans $(\mathcal{E}_K)$: elles ont leurs supports contenus dans le compact fixe K de R^n, et convergent uniformément vers 0. Soit $\psi \in (\mathcal{D})$ une fonction fixe $\geqslant 0$ sur R^n et $\geqslant 1$ sur K. On a alors :

(I, 4 ; 1) $$|\varphi_j(x)| \leqslant \varepsilon_j \psi(x),$$

les ε_j convergeant vers 0.

Posons $\varphi_j = u_j(x) + iv_j(x)$, u_j et v_j réelles.

Les 2 fonctions u_j et v_j sont $\in (\mathcal{D})$ et

(I, 4 ; 2) $$-\varepsilon_j\psi \leqslant u_j \leqslant \varepsilon_j\psi, \qquad -\varepsilon_j\psi \leqslant v_j \leqslant \varepsilon_j\psi,$$

d'où, puisque $T \geqslant 0$:

(I, 4 ; 3) $$-\varepsilon_j T(\psi) \leqslant T(u_j) \leqslant \varepsilon_j T(\psi), \quad -\varepsilon_j T(\psi) \leqslant T(v_j) \leqslant \varepsilon_j T(\psi)$$

et par conséquent

(I, 4 ; 4) $$|T(u_j)| \leqslant \varepsilon_j T(\psi), \quad |T(v_j)| \leqslant \varepsilon_j T(\psi), \quad |T(\varphi_j)| \leqslant 2\,\varepsilon_j T(\psi).$$

Cela prouve, comme nous voulions le montrer, que les $T(\varphi_j)$ convergent vers 0.

Alors, d'après le théorème III, T est une mesure μ. On a d'autre part $\mu(\varphi) \geqslant 0$ pour $\varphi \in (\mathcal{D})$ et $\geqslant 0$; si φ est une fonction quelconque $\in (\mathcal{C})$ et $\geqslant 0$, sa régularisée $\varphi * \rho_\varepsilon$ (voir théorème I) est dans $(\mathcal{D})$ et $\geqslant 0$, donc $\mu(\varphi * \rho_\varepsilon) \geqslant 0$; lorsque $\varepsilon \to 0$, les $\varphi * \rho_\varepsilon$ convergent vers φ dans un $(\mathcal{C}_0)$, donc $\mu(\varphi) \geqslant 0$, μ est une mesure $\geqslant 0$, c. q. f. d.

Ce théorème est important parce qu'il permettra de montrer que certaines distributions sont des mesures. Si une fonction est surharmonique, son Laplacien est $\leqslant 0$ c'est donc une mesure $\leqslant 0$, d'où la décomposition de Riesz (voir chapitre VI, § 10, théorème XXX).

Mais il montre en même temps que la structure d'ordre introduite dans $(\mathcal{D}')$ n'a qu'un intérêt limité : elle ne sort pas du cadre des mesures. Si T n'est pas une mesure, non seulement elle n'a pas de

signe, mais elle n'est comparable à aucune mesure, et n'est pas une différence de 2 distributions $\geqslant 0$.

La comparaison des distributions est possible localement. Une distribution $\geqslant 0$ au voisinage de chaque point est $\geqslant 0$; une distribution $\geqslant 0$ dans un ouvert Ω est une mesure $\geqslant 0$ dans Ω. (Mais une distribution T, définie dans R^n, et $\geqslant 0$ dans Ω, peut être égale dans Ω à une mesure $\mu \geqslant 0$ *non prolongeable en une mesure sur* R^n. Voir exemple à la remarque de la page 41.)

§ 5 Généralisations diverses

1° *Distributions vectorielles* Soit E un espace vectoriel topologique localement convexe complet, dont les éléments seront appelés vecteurs, et désignés par des lettres grasses. On utilise fréquemment la notion de fonction vectorielle sur R^n, $\mathbf{f}(x)$; pour tout $x \in R^n$, $\mathbf{f}(x)$ est un vecteur $\in$ E. La notion de fonction continue, différentiable, analytique s'étend immédiatement. Il est alors possible de généraliser ces fonctions en *distributions* vectorielles **T**, telles que, pour toute fonction *numérique* $\varphi(x)$, indéfiniment différentiable à support compact, donc élément du même espace vectoriel $(\mathcal{D})$ considéré jusqu'à présent, $\mathbf{T}(\varphi)$ soit un vecteur $\in$ E. Une telle distribution vectorielle est une application linéaire continue de $(\mathcal{D})$ dans E. Une fonction vectorielle continue $\mathbf{f}(x)$ définit une telle distribution vectorielle par la formule habituelle

$$\text{(I, 5 ; 1)} \qquad \mathbf{f}(\varphi) = \iint \dots \int \mathbf{f}(x)\, \varphi(x)\, dx.$$

La plupart des résultats algébriques que nous donnerons dans ce livre pour des distributions à valeurs numériques complexes s'étendent aux distributions à valeurs vectorielles, moyennant d'éventuelles hypothèses supplémentaires sur E [1]. Au contraire, pour les questions topologiques, il y a bien des difficultés nouvelles.

2° E étant toujours un espace vectoriel complet et localement convexe, soir E' son dual. Nous noterons par $< e, e' >$ le produit scalaire de $e \in$ E par $e' \in$ E'. Soit alors T une distribution numérique, donc appartenant à l'espace $(\mathcal{D}')$ de distributions considéré jusqu'ici. Il est alors possible, non seulement de définir $T(\varphi)$ pour une fonction φ numérique $\in (\mathcal{D})$, mais aussi pour une fonction $\boldsymbol{\varphi}(x)$, à valeurs

[1] Voir Schwartz [9] et [10]

dans E, pourvu qu'elle soit indéfiniment dérivable, à support compact. Dans ce cas, $T(\varphi) = T.\varphi$ est un vecteur $\in$ E. Il devra vérifier

$$(\mathrm{I}, 5\,;\,2) \qquad <(T.\varphi), e'> = T.<\varphi(x), e'>,$$

pour tout $e' \in E'$.

Réciproquement cette formule définit $T.\varphi$ comme élément du complété faible de E, ou dual algébrique E'^* de E' ; on démontre que $T.\varphi$ est bien dans E [1].

Si T est une fonction numérique $f(x)$ ou la mesure de Dirac δ, on aura

$$(\mathrm{I}, 5\,;\,3) \qquad f.\varphi = \iint \ldots \int f(x)\,\varphi(x)dx$$

$$(\mathrm{I}, 5\,;\,4) \qquad \delta.\varphi = \varphi(0).$$

3° *Distributions sur une variété indéfiniment différentiable* Soit V^n une variété à n dimensions indéfiniment différentiable. On peut y définir des distributions généralisant les fonctions ou même les formes différentielles ou les champs de tenseurs de nature quelconque. Les distributions-formes différentielles s'appellent courants. Elles seront étudiées au chapitre IX. Bornons-nous ici à considérer l'espace $(\mathcal{D})_{V^n}$ des fonctions numériques indéfiniment dérivables à support compact sur V^n. A partir de $(\mathcal{D})_{V^n}$ on définira l'espace $(\mathcal{D}')_{V^n}$ des distributions sur V^n ; il possédera des propriétés analogues à celles de $(\mathcal{D}')_{R^n}$. Cependant il y a des différences importantes :

a) On ne peut définir de dérivations partielles sur V^n, qu'aprés définition de champs de dérivations ou champs de vecteurs indéfiniment différentiables sur V^n [voir formule (II, 3 ; 35)].

b) Une mesure μ est une distribution particulière, mais une fonction $f(x)$ ne définit plus une distribution particulière. Il ne pourra en être ainsi que si on a fixé un élément de volume privilégié dx.

Soient U^m et V^n deux variétés indéfiniment différentiables, à m et n dimensions respectivement. Si $y = H(x)$ est une application indéfiniment différentiable de U^m dans V^n continue à l'∞, c'est-à-dire telle que l'image réciproque de tout compact de V^n soit un

[1] Voir Schwartz [9]

compact de U^m, on peut définir une image transposée $H'\varphi$ de toute fonction $\varphi \in (\mathcal{D})_{V^n}$; c'est une fonction $\in (\mathcal{D})_{U^m}$:

$$(\text{I}, 5\,;\,5) \qquad H^*\varphi(x) = \varphi\,[H(x)], \quad \text{pour} \quad x \in U^m.$$

On peut alors définir l'image directe par H de toute distribution T sur U^m ; c'est une distribution HT sur V^n :

$$(\text{I}, 5\,;\,6) \qquad HT.\varphi = T.H^*\varphi, \quad \text{pour toute} \quad \varphi \in (\mathcal{D})_{V^n}.$$

En particulier, si H est un homéomorphisme indéfiniment différentiable ainsi que son inverse, il définit un isomorphisme entre $(\mathcal{D}')_{U^m}$ et $(\mathcal{D}')_{V^n}$. Si U^m est une variété régulièrement plongée dans V^n, on peut prendre pour H l'application identique de U^m dans V^n. $\varphi = H^*\overline{\varphi}$ est alors la restriction à U^m d'une fonction $\overline{\varphi}$ définie sur V^n et $\overline{T} = HT$ est l'extension à V^n d'une distribution T définie sur U^m ; pour $\overline{\varphi} \in (\mathcal{D})_{V^n}$, $\overline{T}(\overline{\varphi})$ est par définition égal à $T(\varphi)$.

CHAPITRE II

Dérivation des distributions

Sommaire Le § 1 définit la dérivation des distributions de façon qu'elle coïncide avec la dérivation usuelle dans le cas de fonctions continuement différentiables : $\frac{\partial T}{\partial x_k}(\varphi) = - T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right)$ [formule (II, 1 ; 6)]. Toute distribution (en particulier toute fonction localement sommable) est indéfiniment dérivable et on peut intervertir l'ordre des dérivations (p. 35). C'est la propriété essentielle qui justifie l'introduction des distributions.

Le § 2 donne des exemples de dérivées dans le cas d'une variable, ($n = 1$). Le plus important est le 1[er], qui montre l'influence des discontinuités d'une fonction, qu'on retrouve sous forme de masses ponctuelles dans sa dérivée : la fonction d'Heaviside $Y(x)$ (p. 36) a pour dérivée la mesure de Dirac δ (II, 2 ; 3), dont les dérivées δ', δ'',... sont définies de façon rigoureuse : $\delta^{(p)}(\varphi) = (-1)^p \varphi^{(p)}(0)$ (II, 2 ; 5). Ainsi sont justifiés de nombreux procédés classiques du calcul symbolique.

Le 2[e] exemple est plus subtil (p. 38) ; il introduit d'une façon naturelle les parties finies de M. Hamadard, utilisées dans la théorie des équations aux dérivées partielles, et la valeur principale de Cauchy ; les pseudo-fonctions Y_m de la formule (II, 2 ; 31) seront utilisées au chapitre VI, § 5, dans la dérivation d'ordre non entier, et sont l'expression la plus simple de formules qu'on rencontre dans la théorie des équations aux dérivées partielles.

Le § 3 donne des exemples de dérivation dans l'espace à n dimensions. Les diverses formules d'Ostrogradsky, Stokes, Green, ont ainsi des interprétations nouvelles. L'exemple 2 a une importance particulière. On sait que la fonction $(1/r)^{n-2}$ [$\log (1/r)$ pour $n = 2$] est harmonique en dehors de l'origine ; nous calculons ici son laplacien, et nous trouvons qu'il est égal à $- N\delta$ (une masse $- N$ placée à l'origine) (II, 3 ; 9) ; cette formule sera la base de la formule de Poisson et de l'étude des potentiels et fonctions surharmoniques. Les autres exemples de ce paragraphe sont également importants dans les applications, mais il est préférable de les passer en première lecture et de se borner à les consulter lorsqu'il y sera fait référence.

Le § 4 traite de la recherche des primitives pour 1 dimension ($n = 1$). Le théorème I (p. 51) étend aux distributions un résultat classique pour les fonctions. Toute distribution a une infinité de primitives, deux d'entre elles diffèrent d'une constante.

Le § 5 est la généralisation à n quelconque, le théorème IV (p. 54) généralise le théorème I.

Le § 6 traite de la recherche d'une distribution T dont on connaît plusieurs

dérivées partielles $\frac{\partial T}{\partial x_j} = S_j$; il introduit la condition classique de compatibilité $\frac{\partial S_i}{\partial x_j} = \frac{\partial S_j}{\partial x_i}$ (II, 6 ; 2) (théorème VI, p. 59).

A côté des propriétés générales que nous venons de signaler, les §§ 4, 5, 6, contiennent des théorèmes particuliers (II, III, V, VII) qui donnent des propriétés d'une distribution à partir de celles de ses dérivées. L'ensemble du problème de la recherche des primitives (§§ 4, 5, 6) est autonome et ne sera pas utilisé dans la suite.

§ 1. Définition de la dérivée

Dérivée d'une fonction régulière A toute distribution T nous ferons correspondre des distributions « dérivées partielles » par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$; nous emploierons la notation T'_{x_k} ou $\frac{\partial T}{\partial x_k}$ pour la dérivée partielle de T par rapport à x_k (Si $n = 1$, nous écrirons $\frac{dT}{dx}$ ou T'). Pour que la notion de dérivée soit intéressante, il faut que, si T est une fonction f continue à dérivées partielles continues (au sens usuel), $\frac{\partial T}{\partial x_k}$ soit la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_k}$. Nous donnerons ici une définition directe, mais un peu artificielle, de la dérivée. Nous en redonnerons une définition plus conforme aux notions habituelles, au § 4 du chapitre III.

Pour $\varphi \in (\mathcal{D})$, on a d'après (I, 2 ; 12)

(II, 1 ; 1)
$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\varphi) &= \iint\cdots\int \frac{\partial f}{\partial x_k}(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n) \\ &\qquad\qquad \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_k \ldots dx_n \\ &= \int\cdots\int dx_1\, dx_2 \ldots dx_{k-1}\, dx_{k+1} \ldots dx_n \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_k}\varphi\, dx_k\right). \end{aligned}\right.$$

L'intégrale entre parenthèses peut se calculer par parties ; comme φ est nul en dehors d'un compact, la partie tout intégrée disparaît :

(II, 1 ; 2)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x_k}\varphi\, dx_k = -\int_{-\infty}^{+\infty} f\,\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\, dx_k.$$

(II, 1 ; 3)

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_k}(\varphi) &= -\int\cdots\int dx_1 dx_2 \ldots dx_{k-1}\, dx_{k+1} \ldots dx_n \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\, dx_k\right) \\ &= -\iint\cdots\int f \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\, dx.\end{aligned}\right.$$

Finalement

(II, 1 ; 4) $$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\varphi) = -f\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right)$$

[toujours avec la définition (I, 2 ; 12)].

Dérivée d'une distribution Mais cette relation entre f et $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ conserve un sens si au lieu de f on considère une distribution quelconque T. La fonctionnelle S définie par

(II, 1 ; 5) $$S(\varphi) = -T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right)$$

est manifestement une forme linéaire sur $(\mathcal{D})$, continue sur chaque $(\mathcal{D}_K)$. Car si des $\varphi_j \in (\mathcal{D}_K)$ convergent vers 0, il en est de même des $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}$, et, T étant continue sur $(\mathcal{D}_K)$, les $-T\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}\right)$ convergent vers 0. S est donc une nouvelle distribution, qui sera, par définition $\frac{\partial T}{\partial x_k}$; $\frac{\partial T}{\partial x_k}$ est donc *définie* par la formule

(II, 1 ; 6) $$\frac{\partial T}{\partial x_k}(\varphi) = -T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right); \quad \text{ou} \quad T'_{x_k}(\varphi) = -T(\varphi'_{x_k}).$$

La relation exprime que les transformations

$$\varphi \to -\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \quad \text{et} \quad T \to \frac{\partial T}{\partial x_k}$$

sont transposées l'une de l'autre dans la dualité entre $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$.

Naturellement on pourra ensuite considérer les dérivées successives : *toute distribution est indéfiniment dérivable. On peut d'ailleurs intervertir l'ordre des dérivations* [puisqu'on le peut pour des fonctions $\varphi \in (\mathcal{D})$] et l'on aura

(II, 1 ; 7) $$D^p T(\varphi) = (-1)^{|p|} T(D^p \varphi).$$

Remarques Une fonction f sommable sur tout compact apparaît ainsi comme indéfiniment dérivable. Mais, si elle n'a pas

de dérivée au sens usuel, sa dérivée n'est ni une fonction ni même en général une mesure, c'est une distribution. D'ailleurs si f est une fonction continue ayant une dérivée (au sens usuel) $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ très irrégulière (par exemple non sommable), il n'y a pas de rapport simple entre cette fonction dérivée et la distribution dérivée $\frac{\partial f}{\partial x_k}$. C'est ce qui fait que les *fonctions dérivées* de f (au sens usuel) peuvent vérifier, si elles sont irrégulières, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}$, alors qu'on a toujours, pour les *distributions dérivées*, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}$.

La dérivation est une opération de caractère local. Si on connaît une distribution dans un ouvert Ω de R^n sans la connaître dans R^n entier, on connaît toutes ses dérivées dans Ω. Le support des distributions dérivées de T est contenu dans le support de T.

§ 2 Exemples de dérivation. Cas d'une variable ($n = 1$)

Nous avons vu que si f est une fonction continue, à dérivée (au sens usuel) continue f', sa distribution dérivée coïncide avec sa fonction dérivée. Il n'en est plus du tout de même si f ou f' (définie au sens usuel) sont discontinues.

Exemple 1 *Fonctions discontinues. Dérivées successives de la fonction d'Heaviside* $Y(x)$

On appelle, en électricité et en calcul symbolique, échelon-unité ou fonction d'Heaviside la fonction $Y(x)$ égale à 0 pour $x < 0$, à $+1$ pour $x > 0$. Elle n'est pas définie pour $x = 0$, ce qui n'a aucune importance, puisque, considérée comme distribution, une fonction n'a besoin que d'être définie presque partout.

$$(II, 2 ; 1) \qquad Y(\varphi) = \int_0^{\infty} \varphi(x)\,dx.$$

La dérivée Y' est définie par

$$(II, 2 ; 2) \qquad Y'(\varphi) = -Y(\varphi') = -\int_0^{\infty} \varphi'(x)\,dx = \varphi(0) = \delta(\varphi),$$

δ désignant la mesure de Dirac. On a donc

$$(II, 2 ; 3) \qquad Y' = \delta.$$

Cette formule est connue et utilisée depuis longtemps en calcul symbolique ; mais sans justification correcte.

Remarquons que dans l'ouvert Ω complémentaire de l'origine, Y est une fonction continue, à dérivée (au sens usuel) continue et nulle ; donc on peut prévoir avant tout calcul que Y' a son support ponctuel, réduit à l'origine.

Il est facile de calculer les dérivées suivantes.

(II, 2 ; 4) $$Y''(\varphi) = \delta'(\varphi) = -\delta(\varphi') = -\varphi'(0).$$

$Y'' = \delta'$ est donc un doublet placé à l'origine, de « moment » -1. Les dérivées ultérieures sont des « multipôles » ; la dérivée p-ième $\delta^{(p)}$ est définie par

(II, 2 ; 5) $$\delta^{(p)}(\varphi) = (-1)^p \varphi^{(p)}(0).$$

On peut généraliser immédiatement :

Dérivées successives d'une fonction régulière par morceaux

Soit f une fonction « régulière par morceaux ». Dans une succession d'intervalles $(x_{\nu-1}, x_\nu)$ $(\lim\limits_{\nu\to\pm\infty} x_\nu = \pm\infty)$, c'est une fonction indéfiniment dérivable au sens usuel du mot ; en chaque point x_ν, f et ses dérivées (au sens usuel) ont des discontinuités de première espèce. Soit $f_\nu^{(p)}$ le saut de la dérivée usuelle d'ordre p au point x_ν. f est donc une fonction presque partout définie (partout sauf sur l'ensemble dénombrable des x_ν). Il y a lieu de distinguer les distributions $f', f'', \ldots, f^{(n)}$, dérivées de la distribution f, et les distributions $[f'], [f''], \ldots, [f^{(n)}]$, qui sont des fonctions, égales aux dérivées successives au sens usuel de f dans les intervalles $(x_{\nu-1}, x_\nu)$ (et non définies aux points x_ν). Ainsi pour $f = Y$, on aura $f' = \delta$ et $[f'] = 0$. Une intégration par parties montre aussitôt que

(II, 2 ; 6) $$f'(\varphi) = -f(\varphi') = \sum \varphi(x_\nu) f_\nu + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\ [f'(x)]\ dx$$

ce qui s'écrit

(II, 2 ; 7) $$f' = [f'] + \sum f_\nu \delta_{(x_\nu)}.$$

Les discontinuités de f apparaissent dans sa dérivée sous forme de masses ponctuelles. Dans les dérivations ultérieures, elles ne disparaîtront plus jamais. En effet on en déduit, de proche en proche :

(II, 2 ; 8)
$$f^{(p)} = [f^{(p)}] + \sum f_\nu^{(p-1)} \delta_{(x_\nu)} + \sum f_\nu^{(p-2)} \delta'_{(x_\nu)} + \cdots + \sum f_\nu \delta_{(x_\nu)}^{(p-1)}.$$

EXEMPLE 2 *Pseudofonctions. Parties finies de Hadamard.*
Calculons la dérivée de la fonction $f(x)$ égale à 0 pour $x < 0$, à $1/\sqrt{x}$ pour $x > 0$ (non définie pour $x = 0$).

Cette dérivée est sûrement nulle dans l'ouvert $]-\infty, 0[$, égale à la fonction $-\frac{1}{2}x^{-3/2}$ dans l'ouvert $]0, +\infty[$, car dans chacun de ces 2 ouverts, $f(x)$ est une fonction continue à dérivée (au sens usuel) continue.

$$\text{(II, 2 ; 9)} \quad \begin{cases} f'(\varphi) = -f(\varphi') = -\displaystyle\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\, x^{-1/2}\, dx, \\ \quad = -\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty} \varphi'(x)\, x^{-1/2}\, dx. \end{cases}$$

Intégrons par parties :

$$\text{(II, 2 ; 10)} \quad f'(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{\varphi(\varepsilon)}{\sqrt{\varepsilon}} + \int_\varepsilon^\infty \varphi(x)\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right) dx\right].$$

Comme $\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + O(\varepsilon)$ pour $\varepsilon \to 0$, on a finalement

$$\text{(II, 2 ; 11)} \quad f'(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\int_\varepsilon^{+\infty} \varphi(x)\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right) dx + \varphi(0)\, \varepsilon^{-1/2}\right].$$

Nous trouvons là une notion introduite par M. Hadamard [1] pour les besoins de la théorie des équations aux dérivées partielles : celle de « partie finie » d'une intégrale divergente.

Soit g une fonction sommable dans tout intervalle $(a + \varepsilon, b)$, $\varepsilon > 0$, mais non sommable dans (a, b). Il peut arriver que $g(x)$ soit la somme d'un polynôme en $1/(x\text{-}a)$, et d'une fonction $h(x)$ sommable dans (a, b) :

$$\text{(II, 2 ; 12)} \quad g(x) = \mathrm{P}(1/(x-a)) + h(x) = \sum \frac{\mathrm{A}_\nu}{(x-a)^{\lambda_\nu}} + h(x).$$

Nous entendrons le mot polynôme dans un sens étendu : une somme de monomes à exposants complexes quelconques λ_ν, $\mathcal{R}(\lambda_\nu) \geqslant 1$. *Nous devrons même supposer d'abord que ces exposants ne soient pas des entiers.* On voit alors que l'on peut écrire

$$\text{(II, 2 ; 13)} \quad \int_{a+\varepsilon}^b g(x)\, dx = \mathrm{I}(\varepsilon) + \mathrm{F}(\varepsilon).$$

$\mathrm{I}(\varepsilon)$, « partie infinie » de l'intégrale, est un polynôme en $1/\varepsilon$, somme de monômes à exposants complexes non entiers

(1) HADAMARD [1], pages 184-215

$$\text{(II, 2 ; 14)} \qquad I(\varepsilon) = \sum \frac{A_\nu}{\lambda_\nu - 1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\lambda_\nu - 1},$$

et $F(\varepsilon)$ a une limite finie F lorsque $\varepsilon \to 0$. C'est cette quantité F que M. Hadamard appelle la « partie finie » de l'intégrale $\int_a^b g(x)\,dx$ et que nous noterons

(II, 2 ; 15)

$$F = \mathrm{Pf.}\int_a^b g(x)\,dx = -\sum \frac{A_\nu}{\lambda_\nu - 1}\left(\frac{1}{b-a}\right)^{\lambda_\nu - 1} + \int_a^b h(x)\,dx.$$

Les principales propriétés d'une telle intégrale généralisée sont les suivantes :

1° La définition est invariante par changement de variables. Si $x = x(t)$, $t = t(x)$, est un *homéomorphisme indéfiniment différentiable*, on a

$$\text{(II, 2 ; 16)} \qquad \mathrm{Pf.}\int_a^b g(x)\,dx = \mathrm{Pf.}\int_{t(a)}^{t(b)} g\,[x(t)]\,x'(t)\,dt.$$

2° Calculons l'intégrale $\int_a^b g(x)\,(x-a)^\lambda\,dx$. Lorsque λ est un nombre complexe, de partie réelle > 0 assez grande, c'est l'intégrale ordinaire d'une fonction sommable.

$$\text{(II, 2 ; 17)} \qquad \begin{aligned} F(\lambda) &= \int_a^b g(x)\,(x-a)^\lambda\,dx \\ &= -\sum \frac{A_\nu}{\lambda_\nu - \lambda - 1}\left(\frac{1}{b-a}\right)^{\lambda_\nu - \lambda - 1} + \int_a^b h(x)\,(x-a)^\lambda\,dx. \end{aligned}$$

Le premier terme est analytiquement prolongeable; c'est une fonction méromorphe de λ dans tout le plan complexe, ayant un nombre fini de pôles, les $\lambda = \lambda_\nu - 1$. Le 2e terme est holormophe pour $\mathcal{R}(\lambda) > 0$, et continu pour $\lambda \to 0$.

Alors $F(\lambda)$ est méromorphe pour $\mathcal{R}(\lambda) > 0$; comme les λ_ν ne sont pas entiers, elle est continue pour $\lambda \to 0$ et a pour limite

(II, 2 ; 18)

$$F(0) = -\sum \frac{A_\nu}{\lambda_\nu - 1}\left(\frac{1}{b-a}\right)^{\lambda_\nu - 1} + \int_a^b h(x)\,dx = \mathrm{Pf.}\int_a^b g(x)\,dx.$$

La partie finie d'une intégrale apparaît ainsi comme le prolongement analytique d'une intégrale ordinaire.

3° Si $\varphi(x)$ est indéfiniment dérivable, la fonction $g(x)\,\varphi(x)$ a dans (a, b) des propriétés analogues à g et l'on peut définir la partie finie

Pf. $\int_a^b g(x)\,\varphi(x)\,dx$. On voit sans aucune peine que c'est là *une forme linéaire continue de* $\varphi \in (\mathcal{D})$. Ainsi $g(x)$, quoique non sommable sur (a, b), définit une distribution que nous appellerons une *pseudo-fonction* et désignerons par Pf. g.

$$\text{(II, 2 ; 19)} \qquad \text{Pf. } g(\varphi) = \text{Pf.} \int_a^b g(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Tout ce que nous venons de dire pour une fonction g nulle en dehors d'un intervalle fini (a, b) et singulière en a s'étend à des fonctions g définies sur tout l'axe réel. Si $g(x)$ est une fonction sommable sur tout compact, sauf au voisinage de certains points a_i, en nombre fini sur tout intervalle fini ; et si au voisinage de chaque point a_i, à droite et à gauche de a_i, g est somme d'un polynôme en $(1/|x - a_i|)$ à exposants complexes non entiers, et d'une fonction sommable (ce polynôme n'étant pas nécessairement le même à droite et à gauche de a_i), alors on peut définir sans ambiguïté l'intégrale

$$\text{(II, 2 ; 20)} \quad \text{Pf. } g(\varphi) = \text{Pf.} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\varphi(x)\,dx, \quad \varphi \in (\mathcal{D})$$

(cette intégrale se calculant comme somme d'intégrales étendues à des intervalles finis où g ne soit singulière qu'en une extrémité).

Nous voyons alors que si $g(x)$ est la fonction $[f']$, fonction dérivée au sens usuel de la fonction $f(x)$ définie page 38 $\left([f'] = 0 \text{ pour } x < 0\right.$ $\left.[f'] = -\dfrac{1}{2}x^{-3/2} \text{ pour } x > 0\right)$, la distribution dérivée f' définie par la formule (II, 2 ; 11) n'est autre que la pseudo-fonction Pf. $[f']$.

$$\text{(II, 2 ; 21)} \; f'(\varphi) = \text{Pf.} \int_0^{+\infty} \varphi(x)\left(-\frac{1}{2}x^{-3/2}\right)dx = \text{Pf. } [f']\,(\varphi).$$

Remarque importante La fonction $[f']$ est $\leqslant 0$, au sens usuel du mot. Mais la distribution pseudo-fonction $f' = \text{Pf. } [f']$ n'est nullement une distribution $\leqslant 0$. On n'a pas nécessairement $f'(\varphi) \leqslant 0$ pour $\varphi \geqslant 0$. D'ailleurs f' n'est pas une mesure $\leqslant 0$, puisque $[f']$ n'est pas sommable au voisinage de l'origine. Par contre f' est bien une distribution $\leqslant 0$ (mesure $\leqslant 0$) dans l'ouvert Ω complémentaire de l'origine. Ainsi f', définie dans R^1, est $\leqslant 0$ dans Ω ; elle est égale dans Ω à une mesure $\leqslant 0$ définie dans Ω non prolongeable en une mesure sur R^1.

Voyons maintenant ce qui se passe si certains des exposants λ_ν sont entiers.

1° Posons toujours

(II, 2 ; 22)

$$g(x) = \sum_\nu \frac{A_\nu}{(x-a)^{\lambda_\nu}} + h(x) = \sum_{\nu \neq 1} \frac{A_\nu}{(x-a)^{\lambda_\nu}} + \frac{A_1}{x-a} + h(x).$$

On devra prendre alors

(II, 2 ; 23) $$I(\varepsilon) = \sum_{\nu \neq 1} \frac{A_\nu}{\lambda_\nu - 1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\lambda_\nu - 1} + A_1 \log \frac{1}{\varepsilon}$$

et

(II, 2 ; 24) $$F = \text{Pf.} \int_a^b g(x)\, dx$$

$$= -\sum_{\nu \neq 1} \frac{A_\nu}{\lambda_\nu - 1}\left(\frac{1}{b-a}\right)^{\lambda_\nu - 1} + A_1 \log (b-a) + \int_a^b h(x)\, dx.$$

Ainsi $I(\varepsilon)$ n'est plus un polynôme ; c'est la somme d'un polynôme en $1/\varepsilon$ à exposants complexes pouvant être entiers (mais $\neq 0$) et d'un terme logarithmique.

2° La partie finie n'est plus invariante par changement de variables. Ainsi

(II, 2 ; 25) $$\text{Pf.} \int_0^1 \frac{dx}{x} = 0 ; \qquad \text{Pf.} \int_0^{1/2} \frac{dt}{t} = -\log 2,$$

alors qu'on passe de l'une à l'autre par l'homéomorphisme indéfiniment différentiable $x = 2t$, $t = x/2$.

3° F n'est plus prolongement analytique de $F(\lambda)$ jusqu'à $\lambda = 0$.

On voit immédiatement que $F(\lambda)$ tend vers ∞ lorsque λ tend vers 0 ; la partie finie $\text{Pf.} \int_a^b g(x)\, dx$ est la limite de $F(\lambda) - \frac{A_1}{\lambda}$ lorsque λ tend vers 0.

Il pourrait sembler que ces difficultés ne s'introduisent que si l'un des exposants λ_ν, soit λ_1, est égal à 1 ; mais si, sans qu'aucun exposant soit égal à 1, l'un d'eux est entier, alors quand on considérera $g(x)\,\varphi(x)$, pour $\varphi \in (\mathcal{D})$, l'un des exposants sera égal à 1.

Pseudo-fonctions monômes Appelons $\text{Pf.}\,(x^m)_{x>0}$, m étant un nombre complexe, la distribution pseudo-fonction définie par

(II, 2 ; 26)

$$\left\{\begin{aligned}\text{Pf. } (x^m)_{x>0}\cdot\varphi &= \text{Pf.} \int_0^{+\infty} x^m \varphi(x)\, dx \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int_\varepsilon^{+\infty} x^m\varphi(x)\,dx + \varphi(0)\frac{\varepsilon^{m+1}}{m+1}\right. \\ &\qquad \left. + \varphi'(0)\frac{\varepsilon^{m+2}}{m+2} \cdots + \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\frac{\varepsilon^{m+k+1}}{m+k+1}\right]\end{aligned}\right.$$

Le symbole Pf. est inutile si R$m > -1$, et le nombre de termes à prendre dans le crochet dépend de la valeur de m ; si m est un entier < 0, le terme en $\frac{\varepsilon^0}{0}$ doit être remplacé par $\log \varepsilon$.

$[\text{Pf. } (x^m)_{x>0}]\cdot\varphi$ est une fonction analytique de la variable complexe m sauf pour m entier < 0. Si m n'est pas un entier $\leqslant 0$, on a évidemment

$$\text{(II, 2 ; 27)} \quad \frac{d}{dx}[\text{Pf. } (x^m)_{x>0}] = \text{Pf. } m\,(x^{m-1})_{x>0}.$$

Autrement dit, la dérivée de la pseudo-fonction s'obtient par la règle ordinaire de dérivation d'un monôme. En effet la formule est exacte pour $\mathcal{R}m > 0$; alors, si l'on appelle S et T les distributions qui figurent aux deux membres de l'égalité ci-dessus, $S(\varphi)$ et $T(\varphi)$ sont égaux pour $\mathcal{R}m > 0$, et sont des fonctions analytiques de la variable complexe m, donc sont identiques. Mais si m est un entier $\leqslant 0$, $m = -l$, cette méthode de prolongement analytique n'est plus valable, et l'on trouve par un calcul direct

$$\text{(II, 2 ; 28)} \quad \left\{\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left[\text{Pf. }\left(\frac{1}{x^l}\right)_{x>0}\right] &= \text{Pf. }\left(\frac{-l}{x^{l+1}}\right)_{x>0} + (-1)^l\frac{\delta^{(l)}}{l!} \\ \frac{d}{dx}\left[\text{Pf. }\left(\frac{1}{x^l}\right)_{x<0}\right] &= \text{Pf. }\left(\frac{-l}{x^{l+1}}\right)_{x<0} - (-1)^l\frac{\delta^{(l)}}{l!}\end{aligned}\right.$$

La distribution pseudo-fonction Pf. $\frac{1}{x}$, qui est la dérivée de $\log|x|$, peut aussi s'écrire v p. $\frac{1}{x}$, car on a

$$\text{(II, 2 ; 29)} \quad \text{Pf. }\frac{1}{x}\cdot\varphi = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx + \int_{+\varepsilon}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx\right] = \text{v p.}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(x)}{x}\,dx,$$

v p. désignant la valeur principale de Cauchy, dont l'existence est assurée par la différentiabilité de φ.

En combinant les deux égalités (II, 2 ; 28) on obtient

(II, 2 ; 30) $$\frac{d}{dx}\,\mathrm{Pf.}\left(\frac{1}{x^l}\right) = \mathrm{Pf.}\left(\frac{-l}{x^{l+1}}\right).$$

Généralement on a à considérer la famille de pseudo-fonctions

(II, 2 ; 31)
$$\begin{cases} Y_m = \dfrac{1}{\Gamma(m)}\,\mathrm{Pf.}\,(x^{m-1})_{x>0}, & \text{pour } m \text{ distinct d'un entier} \leqslant 0\,; \\ Y_{-l} = \delta^{(l)} & \text{pour } m = -l, \text{ entier} \leqslant 0. \end{cases}$$

Eu regardant la définition des pseudo-fonctions monômes, on voit que, si m tend vers un entier $\leqslant 0$, $Y_m(\varphi)$ reste une fonction continue de m grâce au facteur $1/\Gamma(m)$. $Y_m(\varphi)$ est ainsi une fonction analytique entière de la variable complexe m. D'autre part on a toujours la formule de dérivation :

$$\frac{d}{dx}\,Y_m = Y_{m-1}.$$

Ces remarques sont à la base de la théorie des dérivées et primitives d'ordre non entier (chapitre VI, § 5).

§ 3 Exemples de dérivation. Cas de plusieurs variables

Exemple 1 *Fonction discontinue sur une surface.* Soit $f(x)$ une fonction indéfiniment dérivable au sens usuel dans le volume fermé V limité par une hypersurface fermée S indéfiniment différentiable, *mais nulle à l'extérieur de* S. Ainsi f et ses fonctions dérivées usuelles $[D^p f]$ ont des discontinuités de première espèce le long de S. On a aussitôt

(II, 3 ; 1)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}\,.\,\varphi = -f.\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} = -\displaystyle\iint\underset{V}{\cdots}\int f(x)\,\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,dx \\ \qquad = -\displaystyle\int\underset{S}{\cdots}\int f(x)\,\varphi(x)\,dx_2\,dx_3\ldots dx_n + \iint\underset{V}{\cdots}\int\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\,\varphi(x)\,dx. \end{cases}$$

l'intégrale de surface pouvant aussi s'écrire

(II, 3 ; 2) $$-\int\underset{S}{\cdots}\int f(x)\,\varphi(x)\cos\theta_1\,dS.$$

θ_1 étant l'angle de la normale extérieure à S avec l'axe Ox_1. Cela prouve que la distribution dérivée $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ est égale à la somme de la

fonction dérivée usuelle $\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right]$ et d'une mesure singulière, portée par l'hypersurface S, et possédant la densité superficielle $-f(x)$ $\cos\theta_1$.

On calculera de même les dérivées suivantes. Toute dérivée d'ordre m de f est la somme de la dérivée usuelle correspondante et d'une distribution portée par S, formée de couches multiples d'ordres $\leqslant m$, s'exprimant à l'aide des dérivées d'ordre $\leqslant m-1$ de f sur S (au sens usuel). On voit par cet exemple que toutes les formules du type Stokes, ou Green, sont une autre manière d'exprimer les distributions dérivées de fonctions discontinues.

Ainsi la formule classique

$$\text{(II, 3 ; 3)} \qquad \iint_{\mathrm{V}}\cdots\int f(x)\,\Delta\varphi\,dx$$
$$= \iint_{\mathrm{V}}\cdots\int \varphi[\Delta f]\,dx + \int_{\mathrm{S}}\cdots\int f\frac{d\varphi}{d\nu}\,d\mathrm{S} - \int_{\mathrm{S}}\cdots\int \varphi\left[\frac{df}{d\nu}\right]d\mathrm{S}$$

exprime que le Laplacien Δf est la somme du Laplacien usuel $[\Delta f]$, d'une mesure portée par S de densité superficielle $-\left[\frac{df}{d\nu}\right]$ et d'une distribution de doublets portés par S, orientés suivant la normale à S, et de densité superficielle de moment égale à f. De telles interprétations sont très utiles dans la théorie du potentiel et des équations aux dérivées partielles ; la démonstration directe de ces formules donne d'ailleurs une méthode plus intuitive pour retrouver les formules de Green de ces équations.

Exemple 2 *Fonctions de la distance.* Soit $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots x_n^2}$, et m un nombre complexe. Nous définirons la distribution pseudo-fonction Pf. r^m par la formule

$$\text{(II, 3 ; 4)} \qquad \begin{cases} (\mathrm{Pf.}\ r^m)\cdot\varphi = \mathrm{Pf.} \displaystyle\iint\cdots\int r^m\varphi(x)\,dx \\ \qquad\qquad = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\left[\displaystyle\iint_{r\geqslant\varepsilon}\cdots\int r^m\varphi(x)\,dx - \mathrm{I}(\varepsilon)\right], \end{cases}$$

$\mathrm{I}(\varepsilon)$ étant un polynôme en ε, à exposants complexes $\neq 0$, augmenté éventuellement d'un terme en $\log\varepsilon$. On trouve que

$$\text{(II, 3 ; 5)} \quad (\mathrm{Pf.}\ r^m)\cdot\varphi$$
$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\iint_{r\geqslant\varepsilon}\cdots\int r^m\varphi(x)\,dx + \sum_k \mathrm{H}_k\,\Delta^k\varphi(0)\,\frac{\varepsilon^{m+n+2k}}{m+n+2k}\right],$$

$$(\text{II}, 3; 6) \quad H_k = \frac{\pi^{n/2}}{2^{2k-1}k\,!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+k\right)}\,; \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$$

Le nombre des termes entre crochets dépend de m; pour $\Re m > -n$, le symbole Pf. est inutile; enfin le terme $\frac{\varepsilon^0}{0}$ doit être remplacé par $\log \varepsilon$, si $m+n$ est un entier $\leqslant 0$ pair.

La quantité $F(m) = (\text{Pf. } r^m).\,\varphi$ est une fonction analytique de la variable complexe m, sauf pour $m+n$ entier $\leqslant 0$ pair; ces valeurs de m sont des pôles simples de la fonction analytique et l'on a encore, pour $m = -n-2h$, comme nous l'avons vu pour $F(\lambda)$ (page 41) :

$$(\text{II}, 3; 7) \qquad (\text{Pf. } r^{-n-2h}).\,\varphi = \lim_{u\to 0}\left[F(-n-2h+u) - \frac{A}{u}\right].$$

Dans ces formules, on peut remplacer les sphères $r = \varepsilon$ par une autre famille de surfaces assez régulières; naturellement la partie infinie $I(\varepsilon)$ dépend des surfaces choisies, mais non la partie finie, si $m+n$ n'est pas un entier $\leqslant 0$ pair; la formule (II, 3; 7) n'est pas toujours valable. On peut alors écrire la formule

$$(\text{II}, 3; 8) \qquad \Delta(\text{Pf. } r^m) = m(m+n-2)\text{ Pf. } r^{m-2}$$

lorsque $m+n$ n'est pas un entier $\leqslant 2$ pair. En effet cette formule est vraie pour $\Re m$ assez grand, donc pour toutes les valeurs non exceptionnelles de m par prolongement analytique. Pour

$$m+n = -2h+2,$$

h étant un entier $\geqslant 0$, on trouve

$$(\text{II}, 3; 9)\ \Delta(\text{Pf. } r^m) = m(m+n-2)\text{ Pf. } r^{m-2} + \frac{(2-n-4h)\pi^{n/2}}{2^{2h-1}h\,!\,\Gamma\left(\frac{n}{2}+h\right)}\Delta^h\delta$$

Le cas le plus important est celui de $m = 2-n$:

$$(\text{II}, 3; 10) \quad \Delta\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) = -\frac{(n-2)\,2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(n/2)}\,\delta = -N\delta\,;$$

N est le produit de $(n-2)$ par l'aire H_0 de la sphère de rayon 1 dans R^n. Il est bien connu que, pour $r \neq 0$, la fonction $\left(\frac{1}{r}\right)^{n-2}$ est harmonique; mais justement on s'interdit habituellement de considérer ce qui se passe pour $r = 0$.

Nous pouvons maintenant dire que $\Delta\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)$ est une masse ponctuelle $\leqslant 0$, $-$ N, placée à l'origine. Etant donné l'importance de ce résultat, donnons-en une démonstration directe.

(II, 3 ; 11)

$$\Delta\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)(\varphi) = \iint \cdots \int \Delta\varphi \frac{1}{r^{n-2}}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{r \geqslant \varepsilon} \cdots \int \Delta\varphi \frac{1}{r^{n-2}}\, dx.$$

Appliquons la formule de Green, ν désignant la normale extérieure à la sphère $r = \varepsilon$, $\varepsilon^{n-1}\, d\Omega$ son élément d'aire :

$$\text{(II, 3 ; 12)} \quad \Delta\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right).\,(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0}\Bigg[\iint_{r \geqslant \varepsilon} \cdots \int \varphi \Delta\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) dx$$
$$+ \int_{r=\varepsilon} \cdots \int \varphi \frac{d}{d\nu}\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)\varepsilon^{n-1}\, d\Omega - \int_{r=\varepsilon} \cdots \int \frac{1}{r^{n-2}} \frac{d\varphi}{d\nu}\, \varepsilon^{n-1}\, d\Omega\Bigg].$$

La première intégrale est nulle ($1/r^{n-2}$ est harmonique). La deuxième intégrale vaut $-(n-2)\int_{r=\varepsilon} \cdots \int \varphi\, d\Omega$, dont la limite, pour $\varepsilon \to 0$, est $-(n-2)\, H_0\varphi(0)$.

La troisième intégrale peut être majorée par $O(\varepsilon)$ (φ étant différentiable et $\frac{d\varphi}{d\nu}$ valant $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$) ; sa limite est nulle.

La formule finale

$$\text{(II, 3 ; 13)} \quad \Delta\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)(\varphi) = -(n-2)\, H_0\varphi(0) = -N\varphi(0),$$

équivalente à (II, 3; 10), est donc le résultat d'un calcul très élémentaire de la théorie des fonctions harmoniques ; exactement celui de la formule de Poisson pour les potentiels (ici ce calcul est évident, φ étant dérivable). Pour $n = 2$, $N = 0$, c'est $\log \frac{1}{r}$ qui joue le rôle de $\frac{1}{r^{n-2}}$,

$$\text{(II, 3 ; 14)} \qquad \Delta \log \frac{1}{r} = -2\pi\delta.$$

De ces formules on déduirait sans peine les Laplaciens itérés des distributions Pf. r^m. Mais, comme cela se produit déjà pour $n = 2$ dans le cas de l'équation de Laplace, il est nécessaire pour avoir la

« solution élémentaire » de l'équation de Laplace itérée, de considérer des fonctions $r^m \log r$. Si k est un entier > 0, on aura

$$\text{(II, 3; 15)} \quad \Delta^k(r^{2k-n}) = (2k-n)(2k-2-n)\dots(4-n)(2-n) \times 2^{k-1}(k-1)!\,\frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(n/2)}\,\delta,$$

de sorte que si $2k-n$ est < 0 ou s'il est $\geqslant 0$ mais que n soit impair, il existe une constante $B_{k,n}$ telle que

$$\text{(II, 3; 16)} \qquad \Delta^k(B_{k,n}\,r^{2k-n}) = \delta,$$

mesure de Dirac.

Si maintenant $2k-n$ est $\geqslant 0$ et pair, on utilisera la formule suivante, valable seulement dans ce cas :

$$\text{(II, 3; 17)} \quad \Delta^k(r^{2k-n}\log r) = [[(2k-n)(2k-2-n)\dots(4-n)(2-n)]]\,2^{k-1}(k-1)!\,\frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma(n/2)}\,\delta,$$

étant entendu que dans cette formule, *le facteur 0 du double crochet doit être omis.* Il existe alors une constante $A_{k,n}$ telle que

$$\text{(II, 3; 18)} \qquad \Delta^k(A_{k,n}\,r^{2k-n}\log r) = \delta.$$

Nous en déduisons, quels que soient k et n, l'existence de constantes $A_{k,n}$ et $B_{k,n}$ (dans chaque cas, l'une des deux est nulle), telles que

$$\text{(II, 3; 19)} \qquad \Delta^k[r^{2k-n}(A_{k,n}\log r + B_{k,n})] = \delta.$$

Notons enfin l'exemple suivant. Si l'on pose

$$\text{(II, 3; 20)} \quad \begin{cases} L_m = 2\,\dfrac{\pi^{m/2}}{\Gamma(m/2)}\,\mathrm{Pf.}\left[r^{\frac{m-n}{2}}\,K_{\frac{n-m}{2}}(2\pi r)\right] & \text{sauf pour } m \text{ entier} \leqslant 0 \text{ pair,} \\ L_{-2k} = \left(1-\dfrac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k\delta, & \text{pour } m = -2k, \text{ entier} \leqslant 0 \text{ pair.} \end{cases}$$

K est ici la fonction classique de la théorie des fonctions de Bessel. En dehors de l'origine c'est une fonction analytique, qui converge exponentiellement vers 0 à l'infini ; elle est $\geqslant 0$ pour $m \geqslant 0$. $L_m(\varphi)$ est, grâce au choix du facteur numérique $1/\Gamma(m/2)$, une fonction analytique entière de la variable complexe m. On a

$$\text{(II, 3; 21)} \qquad \left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)L_m = L_{m-2}\,;\ \left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k L_m = L_{m-2k}.$$

En particulier

$$\text{(II, 3 ; 22)} \qquad \left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k L_{2k} = \delta,$$

mesure de Dirac : L_{2k} est la solution élémentaire de l'opérateur

$$\left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k.$$

EXEMPLE 3 *Fonctions méromorphes*

Dans le cas de $n = 2$, on peut représenter un point de R^2 par ses 2 coordonnées, que nous appellerons x et y, ou par son affixe complexe $z = x + iy$, de conjugué $\bar{z} = x - iy$. Nous poserons

$$\text{(II, 3 ; 23)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\,\dfrac{\partial}{\partial y}\right); & \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial z} + \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} \\ \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\,\dfrac{\partial}{\partial y}\right); & \dfrac{\partial}{\partial y} = i\left(\dfrac{\partial}{\partial z} - \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\right). \end{cases}$$

Si $f(z)$ est une fonction holomorphe de z, elle vérifie, en tant que fonction ou distribution sur R^2,

$$\text{(II, 3 ; 24)} \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 \quad \text{(conditions de Cauchy) et} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = f'(z)$$

(dérivée par rapport à z au sens usuel).

Il n'en est plus du tout de même pour une fonction méromorphe au voisinage d'un pôle.

Nous définirons comme précédemment la distribution Pf. $\dfrac{1}{z^m}$ (m entier) (si $m \leqslant +1$, le symbole Pf. est inutile) :

$$\text{(II, 3 ; 25)} \qquad \left(\text{Pf.}\,\frac{1}{z^m}\right).\varphi = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\iint_{r \geqslant \varepsilon} \frac{\varphi(x,y)}{z^m}\,dx\,dy\right] = \left(\text{v p.}\,\frac{1}{z^m}\right).\varphi,$$

v p. désignant la valeur principale de Cauchy (Cette formule résulte de ce que la partie infinie $I(\varepsilon)$ est nulle).

Le résultat est le suivant : d'une part

$$\text{(II, 3 ; 26)} \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\text{v p.}\,\frac{1}{z^m}\right) = \text{v p.}\left(\frac{-m}{z^{m+1}}\right)$$

(de ce point de vue, v p. $\dfrac{1}{z^m}$ se comporte comme une fonction holomorphe usuelle), et d'autre part

$$\text{(II, 3 ; 27)} \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\text{v p.}\,\frac{1}{z^m}\right) = (-1)^{m-1}\,\frac{\pi}{(m-1)!}\,\frac{\partial^{m-1}\delta}{\partial z^{m-1}}.$$

En particulier, pour $m = 1$, la formule

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{1}{z}\right) = \pi\delta \tag{II, 3 ; 28}$$

jouera dans la théorie des fonctions analytiques le même rôle que la formule (II, 3 ; 10) dans la théorie des fonctions harmoniques. Elle peut servir de fondement à la théorie des résidus et s'étendre au cas de plusieurs variables complexes [1].

Dans le même ordre d'idées, soit f une fonction continue dans l'aire fermée S limitée par un contour régulier C, holomorphe à l'intérieur de S, nulle à l'extérieur. f présente des discontinuités le long de C, comme dans l'exemple 1°.

Alors la distribution dérivée $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ est la mesure portée par C, représentée, pour C parcourue dans le sens direct, par la différentielle $-\frac{1}{2i}f(z)dz$. Autrement dit, pour $\varphi \in (\mathcal{D})$:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \cdot \varphi = -\frac{1}{2i}\int_{C} f\varphi dz. \tag{II, 3 ; 29}$$

Exemple 4 *Distances hyperboliques*

Posons, dans R^n, $s = \sqrt{x_n^2 - x_1^2 - x_2^2 \dots - x_{n-1}^2}$, pour $x_n \geqslant 0$ et seulement lorsque la valeur trouvée est réelle, et $s = 0$ dans les autres cas. Il est possible de définir, comme l'a indiqué M. Hadamard [2], une distribution Pf. s^m par une formule

$$(\text{Pf. } s^m) \cdot \varphi = \text{Pf.} \iint \dots \int s^m(x)\, \varphi(x)\, dx. \tag{II, 3 ; 30}$$

La partie finie, inutile pour $\Re m > -2$, est ici un peu plus délicate à définir, car la fonction s^m, pour $\Re m < 0$, devient singulière sur toute la surface du « cône d'ondes » $x_n^2 - x_1^2 - x_2^2 \dots - x_{n-1}^2 = 0$. On peut voir que (Pf. s^m). φ est une fonction analytique de la variable complexe m, sauf pour une double infinité de valeurs singulières, qui sont des pôles :

[1] Ces formules ont été développées dans Dolbeault [1], chapitre IV, Kodaira [1], Schwartz [8]

[2] Hadamard [1], pages 220-230. Le calcul n'y est fait que pour $m = 2 - n$, n impair. On peut le simplifier et l'étendre à m et n quelconques. Nous ne donnerons pas ici la définition précise de cette partie finie. Voir note [1], page 51

a) $m = -2, -4, \ldots$; m entier < 0 pair.

b) $m = -n, -(n+2), \ldots$; $m + n$ entier $\leqslant 0$ pair.

Si n est pair, il y a des valeurs communes à ces deux séries, qui sont alors des pôles doubles pour la fonction analytique. Comme dans l'exemple des fonctions monômes, il est intéressant de considérer, avec M. Marcel Riesz (¹), les distributions :

$$\text{(II, 3 ; 31)} \quad Z_l = \frac{1}{\pi^{\frac{n-2}{2}} 2^{l-1} \Gamma\left(\frac{l}{2}\right) \Gamma\left(\frac{l+2-n}{2}\right)} \text{Pf. } s^{l-n},$$

$l - n$ non singulière.

Pour les valeurs singulières de $l - n$, on prendra la distribution définie, pour toute $\varphi \in (\mathcal{D})$, par passage à la limite de $Z_l(\varphi)$. Or il se trouve justement, grâce au facteur numérique qui s'annule aux pôles de la fonction analytique Pf. $s^m(\varphi)$, que cette fois $Z_l(\varphi)$ est une fonction *analytique entière* de la variable complexe l. Pour $l - n$ non singulière, Z_l a pour support le support de la fonction s ; pour la série *b*) de valeurs singulières, Z_l est portée par l'origine, et l'on a, pour k entier $\geqslant 0$;

$$\text{(II, 3 ; 32)} \quad Z_{-2k} = \square^k \delta \ ; \quad \square = \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \cdots \frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2} .$$

Pour les valeurs singulières de la série *a*) qui ne coïncident pas avec celles de l'autre, Z_l a pour support la surface du cône d'ondes (principe de Huyghens).

On a toujours

$$\text{(II, 3 ; 33)} \qquad \square Z_l = Z_{l-2} \ ; \quad \square^k Z_l = Z_{l-2k}.$$

Cette formule est en effet évidente pour $\mathcal{R} l$ assez grand, elle est donc toujours vraie par prolongement analytique. En particulier

$$\text{(II, 3 ; 34)} \qquad \square Z_2 = \delta, \quad \square^k Z_{2k} = \delta .$$

Z_2 est la solution élémentaire de l'équation des ondes, Z_{2k} est la solution élémentaire de l'équation des ondes k fois « itérée ». Naturellement l'établissement de ces formules ne nécessite aucune

(¹) Marcel Riesz [1]. Les démonstrations figurent dans Marcel Riesz [2]. Les formules (II, 3 ; 31), (II, 3 ; 33), et l'utilisation systématique du prolongement analytique sont dues à cet auteur. Mais il faut remarquer que pour nous Z_l n'est pas un opérateur, mais une distribution, dont la définition peut être précisée sans prolongement analytique. Les relations entre l'opérateur et la distribution seront vues au chapitre VI, formule (VI, 5 ; 21)

connaissance spéciale sur la théorie des équations aux dérivées partielles, mais peut au contraire servir de base à leur étude (1).

EXEMPLE 5 *Dérivations sur une variété*

Sur une variété indéfiniment différentiable V^n (voir chapitre I, § 5), une dérivation du premier ordre ∂ est définie par un champ de vecteurs indéfiniment différentiable. On définira la dérivée d'une distribution par la formule

$$\partial T . \varphi = - T . \partial \varphi. \tag{II, 3 ; 35}$$

Avec des coordonnées locales, l'expression d'une telle dérivation en fonction des dérivées partielles par rapport aux coordonnées ne sera pas la même pour des fonctions et des distributions. Il en sera d'ailleurs de même sur R^n, dés que l'élément de volume dx ne sera pas un invariant de la transformation infinitésimale définie par le champ de vecteurs. Considérons par exemple la dérivation partielle $\frac{\partial}{\partial r}$, définie sur le complémentaire Ω de 0 dans R^n :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \sum_k \frac{x_k}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}. \tag{II, 3 ; 36}$$

Pour une distribution, on aura, avec les notations de la multiplication (chapitre V) :

$$\frac{\partial T}{\partial r} . \varphi = - T . \frac{\partial \varphi}{\partial r} = - \sum_k T . \frac{x_k}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{x_k}{r} T \right) . \varphi \tag{II, 3 ; 37}$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \sum_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{x_k}{r} T \right) = \frac{n-1}{r} T + \sum_k \frac{x_k}{r} \frac{\partial T}{\partial x_k}. \tag{II, 3 ; 38}$$

Les plus grandes précautions doivent être prises dans R^n dès qu'on utilise d'autres coordonnées que $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

§ 4 PRIMITIVES DES DISTRIBUTIONS. CAS D'UNE VARIABLE

Primitives d'une distribution THÉORÈME I *Toute distribution d'une variable x $(n = 1)$ admet une infinité de primitives ; deux d'entre elles diffèrent d'une fonction constante.*

La 2e partie du théorème revient à dire qu'une distribution dont la dérivée est nulle est une fonction constante.

(1) Tous ces calculs sont explicités, en formules invariantes par le groupe de Lorentz, dans la thèse de METHÉE. Voir aussi Eliana ROCHA de BRITO [1]

Soit S une distribution donnée. Pour qu'une distribution T soit une primitive de S, autrement dit pour que $T' = S$, il faut et il suffit que, pour toute fonction $\chi \in (\mathcal{D})$ qui est la dérivée d'une fonction $\psi \in (\mathcal{D})$, on ait

$$\text{(II, 4 ; 1)} \qquad T(\chi) = T\left(\frac{d\psi}{dx}\right) = -S(\psi).$$

Ces fonctions χ, dérivées exactes, forment un sous-espace vectoriel hyperplan $(\mathcal{H})$ de $(\mathcal{D})$: elles satisfont en effet à l'unique condition linéaire

$$\text{(II, 4 ; 2)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(t)\, dt = 0,$$

moyennant quoi leur primitive

$$\text{(II, 4 ; 3)} \qquad \psi(x) = \int_{-\infty}^{x} \chi(t)\, dt$$

est bien à support compact.

Ainsi T est une forme linéaire sur $(\mathcal{D})$, connue sur $(\mathcal{H})$; on la connaîtra complètement si on connaît sa valeur $T(\varphi_0)$ sur un élément φ_0 de $(\mathcal{D})$ n'appartenant pas à $\mathcal{H}$. Choisissons par exemple φ_0 telle que

$$\text{(II, 4 ; 4)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_0(t)\, dt = +1.$$

Alors pour $\varphi \in (\mathcal{D})$ quelconque, on aura la décomposition unique :

$$\text{(II, 4 ; 5)} \qquad \begin{cases} \varphi = \lambda\varphi_0 + \chi \\ \lambda = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)\, dt \\ \chi = \varphi - \lambda\varphi_0 \in (\mathcal{H}) \quad \text{donc} \quad = \dfrac{d\psi}{dx}, \quad \psi \in (\mathcal{D}), \end{cases}$$

qui donnera

$$\text{(II, 4 ; 6)} \qquad T(\varphi) = \lambda T(\varphi_0) - S(\psi).$$

Réciproquement, si T est la forme linéaire définie sur $(\mathcal{H})$ par (II, 4 ; 1), elle est continue sur $(\mathcal{H}) \cap (\mathcal{D}_K)$, car si $\chi \in (\mathcal{H}) \cap (\mathcal{D}_K)$ converge vers 0 dans $(\mathcal{D}_K)$, sa primitive ψ converge vers 0 dans $(\mathcal{D}_H)$ (H étant le plus petit intervalle contenant K), et $S(\psi)$ converge bien vers 0. Alors en choisissant arbitrairement $T(\varphi_0)$, on définit une forme linéaire sur $(\mathcal{D})$ qui est bien continue sur $(\mathcal{D}_K)$: car si $\varphi \to 0$ dans $(\mathcal{D}_K)$, $\lambda \to 0$, donc $\varphi - \lambda\varphi_0 = \chi \to 0$ dans $(\mathcal{H}) \cap (\mathcal{D}_L)$, L étant la réunion de K et du support de φ_0, et par suite $T(\varphi) \to 0$. La distribution T ainsi formée est bien une primitive de S, puisqu'elle vérifie (II, 4 ; 1).

La différence $T_1 - T_2$ entre 2 primitives provient de choix différents de $T(\varphi_0)$; on aura

$$\text{(II, 4 ; 7)} \quad T_1(\varphi) - T_2(\varphi) = C\lambda = \int_{-\infty}^{+\infty} C\varphi(x)\,dx,$$

donc $T_1 - T_2$ est la fonction constante C.

Dans la théorie usuelle, pour choisir une primitive particulière d'une fonction, on fixe sa valeur en un point x_0 particulier. Ici rien de semblable évidemment. Pour choisir une primitive particulière T, on fixe sa valeur sur une fonction $\varphi_0 \in (\mathcal{D})$ particulière, n'appartenant pas à $(\mathcal{H})$.

Le théorème I a évidemment un caractère local aussi bien que global. Toutefois une distribution de dérivée nulle dans un ouvert Ω est égale à une fonction constante *dans toute partie connexe* de Ω, mais non nécessairement égale à une même constante dans Ω. Ainsi Y (fonction égale à 0 pour $x < 0$, à 1 pour $x > 0$) a une dérivée nulle dans l'ouvert complémentaire de l'origine.

Corollaire *Toute distribution admet une infinité de primitives p-ièmes ; deux d'entre elles diffèrent d'un polynome de degré* $\leqslant p - 1$.

Primitives d'une mesure Théorème II *Pour qu'une distribution ait pour dérivée une mesure, il faut et il suffit qu'elle soit une fonction, à variation bornée sur tout intervalle fini.*

1° *La condition est suffisante.*

Soit f une fonction à variation bornée sur tout intervalle fini. Pour $\varphi \in (\mathcal{D})$,

$$\text{(II, 4 ; 8)} \quad -\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\frac{d\varphi}{dx}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,df(x)\,,$$

l'intégration par parties étant valable pour des intégrales de Stieltjes. Cela prouve que la dérivée de la fonction f est la mesure (df), justement définie par cette fonction à variation bornée. *Nous voyons qu'il est essentiel de ne jamais confondre une fonction à variation bornée sur tout intervalle fini, f, avec la mesure (df) qu'elle définit ; la mesure est la dérivée de la fonction.*

2° *La condition est nécessaire.*

Soit μ une mesure. La fonction f, à variation bornée sur tout intervalle fini, définie par $f(x) = \int_a^x d\mu$ (a étant un point sans masse

pour la mesure μ) est, d'après ce qui précède, une primitive de μ ; tout autre primitive en diffère d'une fonction constante, donc est elle-même une fonction à variation bornée sur tout intervalle fini.

On peut particulariser le théorème et écrire :

Pour qu'une distribution ait pour dérivée une mesure $\geqslant 0$, il faut et il suffit qu'elle soit une fonction croissante.

On démontrerait de même :

Pour qu'une distribution ait une dérivée seconde $\geqslant 0$, il faut et il suffit qu'elle soit une fonction convexe.

On peut ainsi caractériser la différence de 2 fonctions convexes comme une distribution dont la dérivée seconde est une mesure.

Nous avons vu, au début du chapitre sur la dérivation, que si une fonction continue f admet une dérivée (au sens usuel) g continue, la distribution f admet pour dérivée la distribution g. La démonstration du théorème II nous permet de généraliser comme suit :

THÉORÈME III 1° *Si une fonction continue $f(x)$ admet presque partout une dérivée (au sens usuel) $g(x)$, sommable sur tout intervalle fini, et si f est l'intégrale indéfinie de g, la distribution f a pour dérivée la distribution g.*

2° *Si une distribution a pour dérivée une fonction g, elle est elle-même une fonction f absolument continue, intégrale indéfinie de g ; elle admet $g(x)$ comme dérivée (au sens usuel) presque partout, et en tout point x où g est continue.*

COROLLAIRE *Une distribution dont toutes les dérivées sont des mesures est une fonction indéfiniment dérivable au sens usuel.*

Car si la dérivée d'ordre $k+2$ est une mesure, la dérivée d'ordre k est une fonction continue ; les dérivées de f, qui sont toutes continues, sont alors ses dérivées au sens usuel.

On peut étendre ce théorème aux distributions dont toutes les dérivées sont d'ordre $\leqslant m$ fixe (corollaire du théorème XXI du chapitre III) et au cas de plusieurs variables (théorème XIX du chapitre VI).

§ 5 PRIMITIVES DES DISTRIBUTIONS. CAS DE PLUSIEURS VARIABLES

THÉORÈME IV *Si S_1 est une distribution donnée sur R^n, l'équation, par rapport à la distribution inconnue* T,

$$\text{(II, 5 ; 1)} \qquad \frac{\partial T}{\partial x_1} = S_1 \,,$$

admet une infinité de solutions ; deux d'entre elles diffèrent d'une distribution arbitraire, « indépendante de x_1 ».

La démonstration est calquée sur celle du théorème I mais un peu plus compliquée.

Distribution indépendante de x_1 Définissons d'abord ce que nous entendons par une distribution « indépendante de x_1 ».

Soit $\varphi \in (\mathcal{D})$, $h = \{ h_1, h_2, \ldots h_n \}$ un point de R^n.

La translatée $\tau_h\varphi$ de φ par $h \in R^n$ est définie par $\tau_h\varphi(x) = \varphi(x - h)$. Nous définirons alors la translatée $\tau_h T$ d'une distribution T par h par la formule

$$\text{(II, 5 ; 2)} \qquad \tau_h T . \tau_h \varphi = T . \varphi \quad \text{ou} \quad \tau_h T(\varphi) = T(\tau_{-h}\varphi) \;.$$

Cela revient à dire que dans $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$, les deux opérations linéaires $\varphi \to \tau_h\varphi$, $T \to \tau_h T$, sont contragrédientes l'une de l'autre ; $\varphi \to \tau_{-h}\varphi$, et $T \to \tau_h T$ sont transposées l'une de l'autre. Si T est une fonction f (définie presque partout, sommable sur tout compact), $\tau_h T$ est bien la translatée usuelle $\tau_h f$. Nous dirons alors qu'une distribution T est indépendante de x_1, ou encore qu'elle dépend seulement de $x_2, x_3, \ldots x_n$, si elle est invariante par toute translation

$$h = \{ h_1, 0, 0, \ldots 0 \}$$

parallèle à l'axe des x_1. On a donc :

$$\text{(II, 5 ; 3)} \quad \tau_h T = T, \quad \text{quel que soit} \quad h = \{ h_1, 0, 0, \ldots 0 \}.$$

Si T est une fonction continue f, cela coïncide bien avec la notion usuelle de fonction indépendante de x_1 ; si T est une fonction f sommable sur tout compact, on voit sans peine que f est bien presque partout égale à une fonction indépendante de x_1.

L'indépendance de T par rapport à x_1 est équivalente à la relation $\dfrac{\partial T}{\partial x_1} = 0$.

Considérons en effet, pour T et φ fixées, $h = \{ h_1, 0, \ldots, 0 \}$ variable, la fonction de h_1

$$\text{(II, 5 ; 4)} \qquad \psi(h_1) = \tau_h T . \varphi = T . \varphi(x + h).$$

Dans la suite, nous supposerons que h_1 (et $h_1 + dh_1$) restent dans un intervalle ouvert fini $]a, b[$. Alors, pour φ fixée, $\tau_{-h}\varphi$ garde son

support dans un compact fixe K de R^n. Mais $\varphi(x+h)$, considérée comme fonction de h_1 à valeurs dans l'espace topologique $(\mathcal{D}_K)$, est continue et même indéfiniment dérivable. On a, la limite étant prise dans $(\mathcal{D}_K)$ topologique :

$$\text{(II, 5 ; 5)} \qquad \lim_{dh_1 \to 0} \frac{\varphi(x+h+dh) - \varphi(x+h)}{dh_1} = \frac{\partial}{\partial h_1} \varphi(x+h) = \frac{\partial}{\partial x_1} \varphi(x+h).$$

Mais comme T est une forme linéaire continue sur $(\mathcal{D}_K)$, l'expression $\psi(h_1)$ est une fonction numérique indéfiniment dérivable de h_1 au sens usuel, et l'on aura

$$\text{(II, 5 ; 6)} \qquad \frac{d\psi}{dh_1} = \frac{d}{dh_1}[\mathrm{T}.\varphi(x+h)] = \mathrm{T}.\left(\frac{\partial}{\partial h_1}\varphi(x+h)\right) = \mathrm{T}.\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\varphi(x+h)\right) = -\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_1}.\varphi(x+h).$$

Alors, si $\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_1}$ est nulle, cette quantité est nulle ; mais comme ce résultat est indépendant de l'intervalle fini $]a, b[$, $\psi(h_1)$, fonction numérique continue à dérivée partout nulle, est constante, et T est bien indépendante de x_1. Réciproquement, si T est indépendante de x_1, la dérivée de ψ pour $h_1 = 0$ est nulle, ce qui prouve que $\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_1}$ est nulle. La différence entre deux solutions de (II, 5 ; 1) vérifie $\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_1} = 0$, donc est une distribution arbitraire indépendante de x_1.

Recherche des primitives. On voit sans difficulté que le théorème se démontre comme celui qui est relatif à une variable. Toutefois ici le sous-espace vectoriel $(\mathcal{H}_1)$ des fonctions $\chi_1 = \dfrac{\partial \psi_1}{\partial x_1}$ n'est plus un hyperplan, car χ_1 est astreinte à vérifier une infinité de conditions linéaires :

$$\text{(II, 5 ; 7)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(t_1, x_2, \dots x_n)\, dt_1 = 0.$$

Si $\varphi_0(x)$ est la fonction d'une variable définie à la formule (II, 4 ; 4), on a la décomposition unique suivante :

$$\text{(II,5;8)} \quad \begin{cases} \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \lambda_1(x_2, x_3, \dots, x_n)\,\varphi_0(x_1) + \chi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \lambda_1(x_2, x_3, \dots, x_n) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t_1, x_2, \dots, x_n)\, dt_1\ ;\ \chi_1 \in (\mathcal{H}_1). \end{cases}$$

Toute distribution T solution de (II, 5 ; 1) vérifie donc

$$(\text{II, } 5\ ;\ 8)\quad T(\varphi) = T(\lambda_1\varphi_0) - S_1(\psi_1) = \Sigma_1(\lambda_1) - S_1(\psi_1).$$

On voit que λ_1 décrit tout l'espace $(\mathcal{D})_{x_2, x_3, \ldots, x_n}$ des fonctions indéfiniment dérivables à support compact des $n-1$ variables $x_2, x_3, \ldots, x_n$. Soit K' un compact de l'espace euclidien à $n-1$ dimensions défini par les variables $x_2, x_3, \ldots, x_n$; si λ_1 converge vers 0 dans $(\mathcal{D}_{K'})$, $\lambda_1\varphi_0$ converge vers 0 dans $(\mathcal{D}_K)$, où $K = H \times K'$, H étant le support de φ_0 sur la droite réelle des x_1, et $\Sigma_1(\lambda_1) = T(\lambda_1\varphi_0)$ doit alors converger vers 0 ; donc Σ_1 est une forme linéaire sur $(\mathcal{D})_{x_2, x_3, \ldots, x_n}$, continue sur chaque $(\mathcal{D}_{K'})$, donc une distribution appartenant à $(\mathcal{D}')_{x_2, x_3, \ldots, x_n}$. Réciproquement si Σ_1 est une distribution quelconque de $(\mathcal{D}')_{x_2, x_3, \ldots, x_n}$, on voit aussitôt que le dernier membre de (II, 5 ; 8) définit T comme une distribution sur R^n qui satisfait à (II, 5 ; 1) . Nous obtenons, en même temps que la solution complète du problème et la démonstration du théorème IV, l'expression la plus générale d'une distribution U indépendante de x_1 :

$$(\text{II, } 5\ ;\ 10)\quad U.\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \Sigma_1 . \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t_1, x_2, \ldots, x_n)\, dt_1.$$

C'est cette formule qui généralise (II, 4 ; 7) pour $n > 1$.

Fonctions ayant pour une dérivée une fonction.

THÉORÈME V 1° *Si une fonction localement sommable f est absolument continue en x_1 sur presque toutes les parallèles à l'axe des x_1, et admet presque partout pour dérivée (au sens usuel) une fonction localement sommable* $\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right] = g_1$, *on a aussi* $\frac{\partial f}{\partial x_1} = g_1$, *au sens de la théorie des distributions ;*

2° *Si une fonction f admet pour dérivée* $\frac{\partial f}{\partial x_1}$, *au sens de la théorie des distributions, une fonction g_1, f*(1) *est absolument continue en x_1 sur toutes les parallèles à l'axe des x_1, et admet presque partout pour dérivée* $\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}\right]$ *au sens usuel la fonction g_1. Si en particulier f et g_1 sont des fonctions continues dans un ouvert Ω, f y admet partout g_1 comme dérivée au sens usuel.*

(1) Comme toujours, après éventuelle modification sur un ensemble de mesure nulle

1° On a en effet immédiatement :

$$\text{(II, 5 ; 11)} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1}(\varphi) = \iint \dots \int f(x)\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)dx$$

$$= \int \dots \int dx_2\, dx_3 \dots dx_n \int f(x)\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)dx_1$$

$$= \int \dots \int dx_2\, dx_3 \dots dx_n \int g_1 \varphi\, dx_1 = \iint \dots \int g_1(x)\ \varphi(x)\ dx = g_1(\varphi).$$

Exemple. — Si $r = \sqrt{\sum_i x_i^2}$, on a

$$\text{(II, 5 ; 12)} \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{1}{r^\lambda} = -\frac{\lambda x_i}{r^{\lambda+2}}$$

pour $0 \leqslant \lambda < n - 1$.

2° Posons

$$\text{(II, 5 ; 13)} \qquad f_1(x) = \int_{a_1}^{x_1} g_1(t_1, x_2, \dots, x_n)\, dt_1.$$

Du fait que g_1 est localement sommable, f_1 est définie presque partout, absolument continue en x_1 sur presque toutes les parallèles à l'axe des x_1, sommable sur tout compact ; d'autre part, elle admet g_1 comme dérivée au sens usuel presque partout et par conséquent, d'après le 1° ci-dessus démontré, au sens des distributions. On a donc, au sens des distributions :

$$\text{(II, 5 ; 14)} \qquad f = f_1 + \Sigma_1,$$

où Σ_1 est une *distribution* indépendante de x_1 ; *comme f et f_1 sont des fonctions*, Σ_1 est aussi une fonction. En la modifiant éventuellement sur un ensemble de mesure nulle, on la rend effectivement indépendante de x_1 au sens usuel, elle devient absolument continue sur toute parallèle à Ox_1, et de dérivée usuelle $\left[\frac{\partial \Sigma_1}{\partial x_1}\right]$ partout nulle, c. q. f. d.

Si alors g_1 et f sont continues au voisinage du point $a(a_1, a_2, \dots, a_n)$, alors f_1 est continue au voisinage de a, donc aussi Σ_1, et comme Σ_1 est indépendante de x_1, elle admet au voisinage de a une dérivée $\left[\frac{\partial \Sigma_1}{\partial x_1}\right]$ partout nulle, sans qu'on ait besoin au préalable de la modifier sur un ensemble de mesure nulle ; d'autre part f_1 admet pour dérivée usuelle $\left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right]$ la fonction g_1 partout au voisinage de a, donc aussi f, c. q. f. d.

Remarque 1   Comme Σ_1 est une distribution, il est nécessaire de supposer que f elle-même est une fonction, cela ne résulte pas de ce que $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ est une fonction.

Remarque 2   Si une distribution T a pour dérivées premières des fonctions, nous verrons qu'elle est elle-même une fonction (théorème XV du chapitre VI).

Si toutes les dérivées $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ sont des fonctions continues, nous verrons que T est une fonction continue f (théorème VII) ; alors f admet partout ses dérivées distributions $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ comme dérivées usuelles, et par suite elle est continûment différentiable, au sens usuel. Nous perfectionnerons ces résultats au § 6 du chapitre VI.

§ 6 Distributions dont on connait plusieurs dérivées partielles

Théorème VI [1] *Pour que le système de k équations en* T

(II, 6 ; 1) $$\frac{\partial T}{\partial x_1} = S_1, \quad \frac{\partial T}{\partial x_2} = S_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial T}{\partial x_k} = S_k$$

soit compatible, il faut et il suffit que quels que soient $i \leqslant k$ et $j \leqslant k$

(II, 6 ; 2) $$\frac{\partial S_i}{\partial x_j} - \frac{\partial S_j}{\partial x_i} = 0.$$

Il admet alors une infinité de solutions ; la différence entre 2 d'entre elles est une distribution arbitraire U *indépendante de* $x_1, x_2, \ldots, x_k$ *(invariante par translation parallèle au sous-espace vectoriel des* $x_1, x_2, \ldots, x_k$*) dont l'expression la plus générale est*

(II, 6 ; 3)
$$U(\varphi) = \Sigma_k(\lambda_k), \quad \lambda_k = \underbrace{\int \ldots \int}_{k} \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)\, dt \ldots dt_k,$$

Σ_k *étant une distribution quelconque dans l'espace* R^{n-k} *des variables* $x_{k+1}, \ldots, x_n$.

Pour $k = n$, *une distribution indépendante de toutes les variables est une fonction constante*

(II, 6 ; 4) $$U(\varphi) = \Sigma_n(\lambda_n) = C\lambda_n = \iint \ldots \int C\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n.$$

(1) Ce théorème traite en réalité de la différentielle extérieure et de la primitive extérieure d'un courant (théorème de Poincaré généralisé). Voir chapitre IX, § 3, théorème I et sa démonstration.

Démonstration Ce théorème se démontre par les mêmes méthodes que le théorème IV et nous ne le détaillerons pas. La seule nouveauté est relative aux conditions de compatibilité (II, 6 ; 2). Ces conditions sont évidemment nécessaires car $\frac{\partial S_i}{\partial x_j}$ et $\frac{\partial S_j}{\partial x_i}$ doivent être égales à $\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j}$. Montrons qu'elles sont suffisantes. Nous résolvons d'abord la première équation (II, 6 ; 1), comme il est indiqué au paragraphe précédent. Si T_1 est une solution particulière, la solution générale est donnée par la formule

(II, 6 ; 5) $$T(\varphi) = T_1(\varphi) + \Sigma_1(\lambda_1),$$

Σ_1 étant une distribution dans l'espace des $n-1$ variables x_2, $x_3, \dots, x_n$. La deuxième équation (II, 6 ; I) s'écrit alors

(II, 6 ; 6) $$S_2(\varphi) = \frac{\partial T_1}{\partial x_2}(\varphi) + \frac{\partial \Sigma_1}{\partial x_2}(\lambda_1).$$

Mais la distribution $S_2 - \frac{\partial T_1}{\partial x_2}$ est indépendante de x_1, car sa dérivée partielle en x_1 est nulle d'après (II, 6 ; 2) :

(II, 6 ; 7) $$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(S_2 - \frac{\partial T_1}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial S_2}{\partial x_1} - \frac{\partial^2 T_1}{\partial x_1 \partial x_2}$$
$$= \frac{\partial}{\partial x_2} S_1 - \frac{\partial^2 T_1}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(S_1 - \frac{\partial T_1}{\partial x_1}\right) = 0.$$

Donc il existe une distribution $S_{1,2}$ sur l'espace des variables x_2, $x_3, \dots, x_n$, telle que

(II, 6 ; 8) $$S_2(\varphi) - \frac{\partial T_1}{\partial x_2}(\varphi) = S_{1,2}(\lambda_1),$$

de sorte que (II, 6 ; 6) s'écrit

(II, 6 ; 9) $$\frac{\partial \Sigma_1}{\partial x_2} = S_{1,2}.$$

C'est une équation dont l'inconnue est la distribution Σ_1 ; elle est identique à celle qui a été résolue au paragraphe précédent (mais à une variable de moins). Et ainsi de suite.

Corollaire *Si toutes les dérivées d'ordre m d'une distribution sont nulles, elle est un polynôme de degré $\leqslant m-1$.*

(Car les dérivées d'ordre $m-1$, ayant leurs dérivées premières

nulles, sont des constantes. Les dérivées d'ordre $m-2$ sont alors des polynomes du 1er degré, etc.).

Les théorèmes II et III du § 4 peuvent s'étendre et donner des propriétés importantes de T lorsque l'on connaît des propriétés de toutes ses dérivées premières. Mais des modifications importantes doivent être apportées aux énoncés des théorèmes quand on passe de $n=1$ à n quelconque ; en particulier, comme nous l'avons dit plus haut, une fonction peut avoir toutes ses dérivées $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ égales à des fonctions sommables sur tout compact sans que f soit une fonction continue ni même bornée (exemple : formule (II, 5 ; 12)).

Distributions dont les dérivées sont des fonctions continues

THÉORÈME VII *Si une distribution* T *a pour dérivées du premier ordre* $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ *des fonctions continues* $g_1, g_2, \ldots, g_n$, *c'est une fonction continûment différentiable au sens usuel* $f(x)$, *et les* g_i *sont ses dérivées usuelles. On a la formule*

$$(II, 6 ; 10) \quad f(x)-f(0)=\int_0^x [g_1(t)\,dt_1+g_2(t)\,dt_2+\ldots+g_n(t)\,dt_n],$$

l'intégration étant faite sur n'importe quel arc rectifiable joignant 0 *à* x.

Reprenons en effet la méthode d'intégration du précédent théorème. Nous choisirons pour T_1 la fonction continue $f_1(x)$ définie par l'intégrale indéfinie usuelle

$$(II, 6 ; 11) \qquad f_1(x)=\int_0^{x_1} g_1(t_1, x_2, \ldots, x_n)\,dt_1.$$

Nous avons vu que, dans ces conditions, $g_2-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}$ doit être une distribution indépendante de x_1 ; montrons que c'est ici une fonction continue. Prenons $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)=u(x_1)\,v(x_2, x_3, \ldots, x_n)$. On a alors

$$(II, 6 ; 12) \quad \left(g_2-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right).\varphi$$

$$=\int u(x_1)\,dx_1\int\ldots\int\left(g_2 v+f_1\frac{\partial v}{\partial x_2}\right)dx_2 dx_3\ldots dx_n=\int h(x_1)\,u(x_1)\,dx_1,$$

$h(x_1)$ étant une fonction *continue* de x_1, une fois la fonction v fixée. Mais dire que $g_2-\frac{\partial f_1}{\partial x_2}$ est indépendante de x_1 c'est dire que cette dernière intégrale est proportionnelle à $\int u(x_1)\,dx_1$ (théorème I). Donc $h(x_1)$ est une constante, une fois v fixée. Nous pouvons alors

la remplacer par sa valeur pour $x_1 = 0$, mais dans ce cas f_1 est nulle, de sorte que

(II, 6 ; 13)

$$\left(g_2 - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right).\varphi = \iint\dots\int u(x_1)\, v(x_2, x_3, \dots, x_n)\, g_2(0, x_2, \dots, x_n)\, dx,$$

et l'équation (II, 6 ; 9) devient, en prenant $u = \varphi_0$, $v = \lambda_1$,

$$\text{(II, 6 ; 14)} \qquad \frac{\partial \Sigma_1}{\partial x_2} = S_{1,2} = g_1(0, x_2, \dots, x_n),$$

le second membre étant encore une fonction continue des variables $x_2, x_3, \dots, x_n$. Ainsi de proche en proche nous sommes amenés à intégrer des fonctions continues, et finalement

$$\text{(II, 6 ; 15)} \quad f(x) = \int_0^{x_1} g_1(t_1, x_2, \dots, x_n)dt_1$$
$$+ \int_0^{x_2} g_2(o, t_2, x_3, \dots, x_n)\, dt_2 + \dots + \int_0^{x_n} g_n(0,0, \dots, t_n)dt_n + f(0).$$

Alors d'après le théorème V, 2°, f est continûment différentiable et admet les g_i comme dérivées usuelles.

La formule (II, 6 ; 10) est alors immédiate car sur toute courbe rectifiable, f est l'intégrale indéfinie de sa différentielle usuelle.

Il est intéressant de remarquer que dans le cas ainsi considéré, f et les g_i sont des fonctions continues, la formule (II, 6 ; 10) qui donne f à partir des g_i ne fait pas sortir du cadre des fonctions continues ; cependant la condition qui exprime que les g_i sont les dérivées partielles d'une même fonction f, $\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i}$, utilise les distributions, car les g_i ne sont pas en général dérivables au sens usuel [1]. Naturellement, en définitive cette condition se traduit en termes de fonctions continues : elle exprime que, quelle que soit $\varphi \in (\mathcal{D})$, on a

$$\text{(II, 6 ; 16)} \qquad \iint\dots\int\left(g_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} - g_j \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) dx = 0.$$

On peut se poser la question suivante : si les dérivées $\frac{\partial T}{\partial x_i} = S_i$ sont d'ordre $\leqslant m$ ($m \geqslant 1$), c'est-à-dire $\in (\mathcal{D}'^m)$, T est-elle d'ordre $\leqslant m - 1$? La réponse est évidemment positive dans le cas d'une variable ($n = 1$) (corollaire du théorème XXI du chapitre III). La réponse est au contraire négative dans le cas $n \geqslant 2$, voir Ornstein [1].

(1) Voir l'étude de Gillis [1]

Espaces topologiques de distributions
Structure des distributions

SOMMAIRE Ce chapitre va d'une part étudier la convergence des distributions, d'autre part étudier leur structure locale et globale. Il a évidemment une grande importance aussi bien théorique que pratique; les théorèmes sont très utilisables dans la pratique même sans aucune connaissance de leur démonstration, qui la plupart du temps, est du domaine de l'analyse fonctionnelle (espaces vectoriels topologiques) [1].

Le § 1 définit une topologie dans l'espace $(\mathcal{D})$.

Le § 2 traite des ensembles bornés dans $(\mathcal{D})$. Ce sont ces ensembles bornés qui vont définir la convergence des distributions. On peut éventuellement se contenter de la définition des ensembles bornés (théorème IV, p. 69) et passer sur tout le reste des §§ 1 et 2.

Le § 3 définit la convergence des distributions : des distributions T_j convergent vers 0 si $T_j(\varphi)$ converge vers 0, uniformément lorsque φ parcourt n'importe quel ensemble borné dans $(\mathcal{D})$.

Diverses propriétés de l'espace topologique $(\mathcal{D}')$ sont énoncées ; elles sont sans intérêt pour les applications techniques et n'ont qu'une valeur théorique. A signaler en particulier les théorèmes XIV (p. 75, réflexivité de $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$) et XV (p. 75, densité de $(\mathcal{D})$ dans $(\mathcal{D}')$). Par contre le critère de convergence donné au théorème XVI (p. 76) est indispensable dans toutes les applications théoriques et pratiques, et d'ailleurs évident.

Le § 4 donne une nouvelle définition de la dérivation, qui généralise la définition usuelle $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$; la dérivée est la limite d'un quotient différentiel. On en déduit quelques conséquences faciles.

Au § 5, on démontre une propriété fondamentale (théorème XVIII, p. 80), la continuité de la dérivation, qui permet la dérivation terme à terme ou sous le signe $\int$ des suites, séries, intégrales convergentes ; c'est là, avec la possibilité de dériver indéfiniment, l'avantage essentiel des distributions. On en déduit le principal critère pratique de convergence (théorème XIX, p. 81).

Le § 6 étudie la structure locale d'une distribution. Localement, toute distribution est une dérivée d'une fonction continue (théorème XXI, p. 82) ; ainsi nous avons introduit le moins possible d'êtres mathématiques nouveaux

[1] Pour tout ce qui concerne les questions d'espaces vectoriels topologiques, consulter BANACH [1], BOURBAKI [5] et [6], DIEUDONNÉ-SCHWARTZ [1], KÖTHE [3], MACKEY [1] et [2], GROTHENDIECK [5]. EDWARDS [1], TREVES [1], HORVATH [1], YOSIDA [1], SCHWARTZ [18]

pour que toute fonction continue devienne indéfiniment dérivable. Le théorème XXIII (p. 87), de démonstration délicate, est une réciproque du théorème XIX (p. 81), il est utile dans la théorie comme dans la pratique.

Le § 7 établit la dualité entre l'espace $(\mathcal{E})$ des fonctions indéfiniment dérivables à support quelconque, et l'espace $(\mathcal{E}')$ des distributions à support compact (théorème XXV, p. 89).

Le théorème XXVI (p. 91) donne la structure globale de ces distributions, avec une variante dans le théorème XXVII (p. 91). Le théorème XXVIII est un théorème fin, qui sera utilisé au § 10.

Le § 8 étudie la structure globale d'une distribution ; nous n'avons pas voulu l'omettre, mais il ne sera pas utilisé dans la suite.

De même le § 9 est exclusivement une étude fine du support des distributions. La démonstration du théorème XXXIV (p. 99) utilise des méthodes délicates. Ce théorème est quelquefois utile, mais un examen plus serré montre en général qu'on peut s'en passer et utiliser des résultats moins forts et de démonstration plus élémentaire ; il doit pouvoir être réservé aux spécialistes.

Le § 10 donne la structure d'une distribution ayant pour support une variété régulière. Le résultat essentiel est le théorème XXXV (p. 100) : une distribution dont le support est l'origine est somme finie de dérivées de la mesure de Dirac.

Les techniciens auront intérêt à passer très rapidement sur ce chapitre (à l'exception du § 5, indispensable).

§ 1 L'ESPACE TOPOLOGIQUE $(\mathcal{D})$

La topologie des $(\mathcal{D}_K)$

Nous avons introduit sur $(\mathcal{D}_K)$ la topologie de la convergence uniforme pour la fonction φ et chacune de ses dérivées. Un système fondamental de voisinages de la fonction 0 dans $(\mathcal{D}_K)$ est défini par les $V(m\,;\,\varepsilon\,;\,K)$, m entier $\geqslant 0$, ε nombre réel > 0 :

$V(m\,;\,\varepsilon\,;\,K)$ est l'ensemble des fonctions $\varphi \in (\mathcal{D}_K)$ dont toutes les dérivées $D^p\varphi$ d'ordre $|p| \leqslant m$ $(0 \leqslant |p| = p_1 + p_2 + \dots p_n \leqslant m)$ sont bornées en module par ε. Un système fondamental de semi-normes définissant cette topologie est constitué par les N_p :

$$N_p(\varphi) = \operatorname*{Sup}_{x\in R^n} |D^p\,\varphi(x)|.$$

$(\mathcal{D}_K)$ est à base dénombrable de voisinages, localement convexe et complet, c'est donc un espace de Fréchet.

Sur $(\mathcal{D}_K^m)$ la topologie, les voisinages de 0, les semi-normes se définissent de la même manière, mais en ne faisant intervenir que les dérivées d'ordre $\leqslant m$ de φ ; $(\mathcal{D}_K^m)$ est un espace de Banach, pour la norme

$$\|\varphi\|_m = \sup_{x \in R^n,\, |p| \leqslant m} |D^p \varphi(x)|.$$

La topologie de $(\mathcal{D})$

Nous allons introduire maintenant sur $(\mathcal{D})$ lui-même une topologie, qui rendra les mêmes services que le système des topologies sur les différents $(\mathcal{D}_K)$.

Soit $\Omega = \{ \Omega_0 = \emptyset, \Omega_1, \Omega_2 \ldots \Omega_\nu, \ldots \}$ une suite infinie d'ouverts, $\overline{\Omega_{\nu-1}} \subset \Omega_\nu$, telle que tout compact K de R^n soit contenu, à partir de ν assez grand, dans tous les Ω_ν. Nous pourrions prendre par exemple pour Ω_ν la boule $|x| < \nu$. $\{\varepsilon\}$ désignant alors une suite de nombres > 0 décroissant et tendant vers 0, $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu, \ldots\}$ et $\{m\}$ une suite de nombres entiers $\geqslant 0$ croissant et tendant vers $+\infty$, $\{m\} = \{m_0, m_1, m_2, \ldots, m_\nu, \ldots\}$, nous appellerons

$$V(\{m\};\ \{\varepsilon\};\ \{\Omega\})$$

l'ensemble des fonctions $\varphi \in (\mathcal{D})$ qui, quel que soit ν, vérifient, pour $x \notin \Omega_\nu$,

(III, 1 ; 1) $\quad |D^p\varphi(x)| \leqslant \varepsilon_\nu, \qquad$ si $\qquad |p| \leqslant m_\nu$.

Il est clair que, lorsque les suites $\{m\}$, $\{\varepsilon\}$, $\{\Omega\}$, varient de toutes les manières possibles, les $V(\{m\};\{\varepsilon\};\{\Omega\})$ forment un système fondamental de voisinage de 0 dans une topologie sur $(\mathcal{D})$, compatible aveo sa structure d'espace vectoriel.

C'est une topologie localement convexe, *à base non dénombrable de voisinages* (les suites de nombres ne forment pas un ensemble dénombrable). Si K est un compact fixe de R^n, cette topologie induit sur $(\mathcal{D}_K)$ la topologie déjà vue précédemment (mais qui est à base dénombrable de voisinages).

On pourra, sans modifier la topologie de $(\mathcal{D})$, prendre une fois pour toutes une même suite $\{\Omega\}$ pourvu que les $\overline{\Omega_\nu}$ soient compacts ; par exemple nous pourrons prendre pour Ω_ν la boule $|x| < \nu$. C'est ce que nous ferons dans la suite, et nous écrirons alors $V(\{m\};\{\varepsilon\})$ sans mentionner $\{\Omega\}$.

Un système fondamental de semi-normes définissant la topologie de $(\mathcal{D})$ est constitué par les $N(\{m\};\{\varepsilon\})$:

$$N(\{m\};\{\varepsilon\})(\varphi) = \sup_\nu \Big(\sup_{\substack{|x| \geqslant \nu \\ |p| \leqslant m_\nu}} |D^p\varphi(x)|/\varepsilon_\nu\Big).$$

Le voisinage de 0, $V\left(\{m\};\{\varepsilon\}\right)$, est précisément défini par

$$N\left(\{m\};\{\varepsilon\}\right)(\varphi) \leqslant 1.$$

Théorème I *L'espace topologique $(\mathcal{D})$ est complet.*

On voit immédiatement que si des $\varphi_j \in (\mathcal{D})$ forment une suite ou un filtre de Cauchy sur $(\mathcal{D})$ topologique, les φ_j convergent uniformément vers une limite φ indéfiniment dérivable, et que les $D^p\varphi_j$ convergent uniformément vers $D^p\varphi$, quel que soit p. On voit ensuite que φ est à support compact [donc $\in (\mathcal{D})$] : car, quelle que soit la suite $\{\varepsilon\}$, on a, pour i et j assez grands :

(III, 1 ; 2) $\quad |\varphi_i(x) - \varphi_j(x)| \leqslant \varepsilon_\nu \quad \text{pour} \quad |x| \geqslant \nu,$

donc aussi, pour j assez grand :

(III, 1 ; 3) $\quad |\varphi(x) - \varphi_j(x)| \leqslant \varepsilon_\nu \quad \text{pour} \quad |x| \geqslant \nu;$

et comme φ_j est à support compact, on a, quelle que soit la suite $\{\varepsilon\}$, pour ν assez grand,

(III, 1 ; 4) $\quad |\varphi(x)| \leqslant \varepsilon_\nu \quad \text{pour} \quad |x| \geqslant \nu;$

or si φ n'était pas à support compact, il existerait une suite de points $x_\nu \in R^n$, $|x_\nu| \geqslant \nu$, pour lesquels $\varphi(x_\nu) \neq 0$, et la formule (III, 1 ; 4) serait fausse avec la suite $\{\varepsilon\}$ définie par $\varepsilon_\nu = \frac{1}{2}|\varphi(x_\nu)|$. Enfin il est immédiat que les φ_j convergent vers φ dans $(\mathcal{D})$ topologique.

Rapports entre les topologies des $(\mathcal{D}_K)$ et la topologie de $(\mathcal{D})$.

On a la relation suivante entre les topologies des $(\mathcal{D}_K)$ et celle de $(\mathcal{D})$:

Théorème II $(\mathcal{D})$ *est la « limite inductive stricte » des $(\mathcal{D}_K)$* (¹) *: pour qu'un ensemble convexe de $(\mathcal{D})$ soit un voisinage de 0, il faut et il suffit qu'il coupe chaque $(\mathcal{D}_K)$, K compact de R^n, suivant un voisinage de 0 pour la topologie de $(\mathcal{D}_K)$. L'espace $(\mathcal{D})$ est bornologique et tonnelé.*

Théorème III *Pour qu'une application linéaire de $(\mathcal{D})$ dans un espace vectoriel topologique localement convexe F (en particulier pour qu'une forme linéaire sur $(\mathcal{D})$) soit continue, il faut et il suffit que sa restriction à chaque $(\mathcal{D}_K)$ soit continue, pour la topologie de $(\mathcal{D}_K)$.*

(¹) Pour les limites inductives, consulter les ouvrages indiqués dans la note 1 page 63

COROLLAIRE *Les formes linéaires continues sur $(\mathcal{D})$ sont les distributions déjà définies. $(\mathcal{D}')$ est le dual topologique de $(\mathcal{D})$.*

Le théorème III est une conséquence triviale du théorème II : pour qu'une application linéaire de $(\mathcal{D})$ dans F soit continue, il faut et il suffit que l'image réciproque d'un voisinage convexe de 0 dans F soit un voisinage de 0 dans $(\mathcal{D})$; cette image étant convexe, il faut et il suffit, d'après le théorème II, que son intersection avec tout $(\mathcal{D}_K)$ soit un voisinage de 0 ; donc que la restriction de l'application à tout $(\mathcal{D}_K)$ soit continue. D'autre part la fin du théorème II résulte du début : une limite inductive stricte de Fréchets est bornologique et tonnelée (1).

Démontrons maintenant le début du théorème II. Il est évident que tout $V(\{m\};\{\varepsilon\})$ découpe sur $(\mathcal{D}_K)$ un voisinage de 0 de la topologie $(\mathcal{D}_K)$. Réciproquement soit W un ensemble convexe coupant chaque $(\mathcal{D}_K)$ suivant un voisinage de 0 de la topologie $(\mathcal{D}_K)$. Pour tout entier $\nu \geqslant 0$, il existe un entier $m_\nu \geqslant 0$, et un nombre $\eta_\nu > 0$, tels que toute fonction $\varphi \in (\mathcal{D})$, vérifiant $|D^p \varphi(x)| \leqslant \eta_\nu$ pour $|p| \leqslant m_\nu$ et ayant son support dans le compact $|x| \leqslant \nu + 2$, appartienne à W. Nous pouvons toujours choisir la suite $\{m\}$ croissante, la suite $\{\eta\}$ décroissante.

Choisissons une fois pour toutes une suite de fonctions

$$\alpha_\nu \in (\mathcal{D}),\ \alpha_\nu \geqslant 0,\ \sum_\nu \alpha_\nu = 1,$$

α_ν ayant son support dans le compact $\nu \leqslant |x| \leqslant \nu + 2$. Pour $\varphi \in (\mathcal{D})$ on peut écrire :

$$\varphi = \sum_\nu \frac{1}{2^{\nu+1}} (2^{\nu+1} \alpha_\nu \varphi),$$

de sorte que, grâce à la convexité de W, φ appartiendra à W si chaque fonction $2^{\nu+1}\alpha_\nu\varphi$ appartient à W. D'après la formule de Leibnitz, $D^p(\alpha_\nu\varphi)$ est une combinaison linéaire finie de dérivées d'ordre $\leqslant |p|$ de α_ν et de φ ; la suite α_ν étant choisie, et compte tenu de ce que seules interviennent les valeurs de φ pour $\nu \leqslant |x| \leqslant \nu+2$, on voit qu'il existe une constante k_ν telle que

$$\text{« } |D^p \varphi(x)| \leqslant \varepsilon_\nu \quad \text{pour} \quad |x| \geqslant \nu \quad \text{et} \quad |p| \leqslant m_\nu \text{ »}$$

entraîne $|2^{\nu+1} D^p(\alpha_\nu\varphi)| \leqslant k_\nu \varepsilon_\nu$ pour $|p| \leqslant m_\nu$.

(1) Voir BOURBAKI [6], fascicule XVIII, chapitre III, § 1, n° 2, corollaire 2 de la proposition 2; et BOURBAKI [5]

Si donc on choisit la suite $\{\varepsilon\}$ de façon que $k_\nu \, \varepsilon_\nu \leqslant \eta_\nu$ pour tout ν, alors $\varphi \in V(\{m\};\{\varepsilon\})$ entraîne $2^{\nu+1} \alpha_\nu \varphi \in W$ donc $\varphi \in W$; on voit donc bien que W est un voisinage de 0 de $(\mathfrak{D})$, c. q. f. d.

Remarquons que la topologie de $(\mathfrak{D})$ induit sur $(\mathfrak{D}_\kappa)$ la topologie initiale de $(\mathfrak{D}_\kappa)$, ce qui se produit toujours pour les limites inductives de ce type (1). Quant au fait que $(\mathfrak{D})$ soit complet, nous l'avons démontré directement (théorème I) ; c'est aussi une conséquence du théorème de Köthe (2).

Tout ce que nous venons de dire pour $(\mathfrak{D})$ peut s'étendre à $(\mathfrak{D}^m)$; il suffit de remplacer la suite $\{m\}$ par des entiers tous égaux à m.

Remarquons, pour terminer ce paragraphe, que, dans un espace tel que $(\mathfrak{D})$ à base non dénombrable d'entourages, les théorèmes de catégories de Baire sont en défaut : $(\mathfrak{D}_\kappa)$ est un sous-espace vectoriel *fermé non dense* de $(\mathfrak{D})$, or $(\mathfrak{D})$ est la réunion d'une infinité dénombrable de $(\mathfrak{D}_\kappa)$.

§ 2 Les ensembles bornés dans $(\mathfrak{D})$

Topologie d'un dual Il est habituel de rendre également topologique le dual d'un espace vectoriel topologique.

Si (E) est un espace de Banach (espace vectoriel normé complet), on définit la norme $\|L\|$ d'une forme linéaire continue L par

$$(\text{III}, 2\,;\,1) \qquad \|L\| = \operatorname*{Max}_{\|e\| \leqslant 1} |L(e)|$$

Le dual (E') de (E) est alors lui aussi un espace de Banach.

Ici, un tel procédé n'a pas de sens, $(\mathfrak{D})$ n'étant pas normé. Ce sont les *ensembles bornés* qui, dans un espace vectoriel topologique, remplaceront les boules $\|e\| \leqslant 1$ des espaces de Banach.

On appelle ensemble borné B, dans un espace vectoriel topologique, un ensemble qu'on peut faire rentrer dans tout voisinage de O donné par une homothétie de centre O et de rapport assez petit. Dans un espace de Banach, une boule est un ensemble borné ; réciproquement si, dans un espace vectoriel localement convexe, il existe un voisinage de O borné, c'est un espace normable (il existe une norme définissant la topologie de l'espace). Toute suite convergente est bornée.

(1) Dieudonné-Schwartz [1], proposition 2, page 68

(2) Kothe [2]

Ensembles bornés dans $(\mathcal{D})$ Soit K *un* compact de R^n ; soit

$$\{ M \} = \{ M_0, M_1, \ldots, M_m, \ldots \}$$

une suite croissante de nombres > 0. Nous appellerons $B(\{M\}; K)$ l'ensemble de toutes les fonctions $\varphi \in (\mathcal{D}_K)$, vérifiant

(III, 2 ; 2) $\quad |D^p\varphi| \leqslant M_m \quad$ pour $\quad |p| \leqslant m$.

THÉORÈME IV *Pour qu'un ensemble soit borné dans* $(\mathcal{D})$ *topologique, il faut et il suffit qu'il soit contenu dans un* $B(\{M\}; K)$ *convenable. Autrement dit, il faut et il suffit que les fonctions* φ *de cet ensemble aient leurs supports contenus dans un compact fixe de* R^n, *et qu'elles soient bornées dans leur ensemble, ainsi que chacune de leurs dérivées.*

La condition est évidemment suffisante, montrons qu'elle est nécessaire. Si les φ de l'ensemble B *n*'avaient pas leurs supports contenus dans un compact fixe, il existerait une suite de points x_ν de R^n, $|x_\nu| \geqslant \nu$, et une suite de fonctions $\varphi_\nu \in$ B telles que $\varphi_\nu(x_\nu) \neq 0$. Alors, si la suite $\{m\}$ est quelconque et si $\{\varepsilon\}$ est la suite $|\varphi_\nu(x_\nu)/\nu|$, aucune homothétie, de quelque rapport qu'elle soit, ne ferait rentrer B dans $V(\{m\}; \{\varepsilon\})$. B ne serait pas borné.

Donc $B \subset (\mathcal{D}_K)$, K compact convenable. Alors B *n*e peut par homothétie rentrer dans le voisinage $V(m; \varepsilon; K)$ de $(\mathcal{D}_K)$ que si pour $\varphi \in B$ les $|D^p\varphi|$ restent bornés pour $|p| \leqslant m$; donc finalement pour tout indice *p*. C. Q. F. D.

Si l'on veut éviter la considération de la topologie de $(\mathcal{D})$ on prendra ce théorème comme *définition* des ensemble bornés de $(\mathcal{D})$.

THÉORÈME V *Toute forme linéaire sur* $(\mathcal{D})$, *bornée sur toute partie bornée de* $(\mathcal{D})$, *est continue.*

Sa restriction à $(\mathcal{D}_K)$, espace de Fréchet, est en effet bornée sur toute partie bornée de $(\mathcal{D}_K)$ donc continue, alors elle est continue sur $(\mathcal{D})$ d'après le théorème III. Cela résulte aussi de ce que $(\mathcal{D})$, limite inductive d'espaces bornologiques [1], est bornologique.

THÉORÈME VI *Pour qu'un ensemble soit borné dans* $(\mathcal{D})$, *il faut et il suffit que toute distribution reste bornée sur cet ensemble.*

Introduisons sur $(\mathcal{D})$ la topologie affaiblie $\sigma(\mathcal{D}, \mathcal{D}')$; le théorème VI revient à dire que toute partie faiblement bornée de $(\mathcal{D}$ est bornée, propriété vraie dans tout espace vectoriel topologique localement convexe séparé (théorème de Mackey) [2].

(1) Voir BOURBAKI [5], théorème 3, page 11

(2) MACKEY [2], page 524, théorème 7, et BOURBAKI [6], tome II, corollaire du théorème 2, page 70

Ensembles bornés et ensembles compacts

THÉORÈME VII *Il y a identité dans* $(\mathcal{D})$ *entre ensembles bornés et ensembles relativement compacts :* $(\mathcal{D})$ *est un espace de Montel.*

Dans tout espace vectoriel topologique E, un ensemble compact est borné ; en effet ses intersections avec les homothétiques d'un voisinage ouvert V de l'origine forment un recouvrement ouvert du compact, donc il existe un sous-recouvrement fini et par suite un homothétique de V qui contient le compact. La réciproque qui est particulière à l'espace $(\mathcal{D})$ tient au théorème d'Ascoli. Des fonctions bornées et à dérivées d'ordre 1 bornées forment un ensemble relativement compact dans l'espace vectoriel topologique $\mathcal{D}^0_K$; donc un ensemble borné dans l'espace $(\mathcal{D}^m_K)$ des fonctions m fois continûment différentiables est relativement compact dans $(\mathcal{D}^{m-1}_K)$. Par suite un ensemble borné dans $(\mathcal{D})$ est relativement compact dans $(\mathcal{D})$. On voit que $(\mathcal{D})$ est un espace *de Montel* (analogue aux espaces de fonctions holomorphes) [1].

Il y a donc identité, dans $(\mathcal{D})$ (contrairement à ce qui a lieu dans un espace de Banach de dimension infinie), entre ensembles faiblement et fortement compacts (car un ensemble faiblement compact est faiblement borné, donc fortement borné, et d'après le théorème VII, fortement compact). *Sur un compact ou un ensemble borné de* $(\mathcal{D})$, *topologies forte et faible sont identiques et identiques à toute topologie séparée plus faible qu'elles* [*comme le sera la topologie induite par* $(\mathcal{D}')$].

D'ailleurs la distinction entre topologies forte et faible n'a d'importance que pour des filtres : une *suite* faiblement convergente dans $(\mathcal{D})$ est bornée, et par suite fortement convergente. Pour la même raison, une suite de Cauchy faible est bornée, est donc une suite de Cauchy forte, et comme $(\mathcal{D})$ est fortement complet elle est fortement convergente. On peut énoncer cela en termes plus concrets :

Si une suite de fonctions $\varphi_j \in (\mathcal{D})$ *est telle que, pour toute distribution T, les* $\mathrm{T}(\varphi_j)$ *aient une limite* $\mathrm{L}(\mathrm{T})$, *il existe une fonction* $\varphi \in (\mathcal{D})$ *telle que* $\mathrm{L}(\mathrm{T}) = \mathrm{T}(\varphi)$, *et les* φ_j *convergent vers* φ *fortement, dans* $(\mathcal{D})$, *en gardant leurs supports dans un compact fixe de* R^n.

Même théorème en remplaçant une suite par un filtre ayant une base de filtre bornée ou dénombrable. Une fonction $\varphi \in (\mathcal{D})$ qui

[1] BOURBAKI [6], fascicule XVIII. chap. IV, § 3, n° 4, page 89

dépend continûment d'un nombre fini de paramètres réels λ_ν, au sens de la topologie faible de $(\mathcal{D})$, en dépend aussi continûment au sens de la topologie forte de $(\mathcal{D})$.

Les propriétés démontrées dans les § 1 et 2 se transportent immédiatement dans les espaces $(\mathcal{D}^m)$ de fonctions m fois continûment différentiables ; cependant le théorème VII est faux, ainsi que ses conséquences.

§ 3 L'ESPACE TOPOLOGIQUE $(\mathcal{D}')$ DES DISTRIBUTIONS

Convergence dans $(\mathcal{D}')$ Nous sommes en mesure maintenant de définir convenablement la topologie de l'espace vectoriel $(\mathcal{D}')$ des distributions ; la définition est valable pour le dual de tout espace vectoriel topologique.

Nous dirons que des $T_j \in (\mathcal{D}')$ *convergent vers* 0 *dans* $(\mathcal{D}')$, *si les nombres* $T_j(\varphi)$ *convergent vers* 0, *quelle que soit* $\varphi \in (\mathcal{D})$, *et uniformément pour tout ensemble borné* B *de fonctions* φ *de* $(\mathcal{D})$.

Si B est un ensemble borné dans $(\mathcal{D})$, et T une distribution, $T(\varphi)$ est borné pour $\varphi \in B$, et par suite on peut poser

$$\text{(III, 3 ; 1)} \qquad T(B) = \operatorname*{Sup}_{\varphi \in B} |T(\varphi)|.$$

Alors des $T_j \in (\mathcal{D}')$ convergeront vers 0 si les $T_j(\varphi)$ convergent vers 0 uniformément pour $\varphi \in B$, donc si, quel que soit B, les $T_j(B)$ convergent vers 0.

Nous définissons ainsi sur $(\mathcal{D}')$ une topologie (qui, remarquons-le encore, ne nécessite pas la connaissance de la topologie de $(\mathcal{D})$, mais seulement de ses ensembles bornés) ayant pour système fondamental de semi-normes les N_B : $N_B(T) = T(B)$. Un système fondamental de voisinages de 0 dans cette topologie est formé par les $V(B ; \varepsilon)$ (B = ensemble borné dans $(\mathcal{D})$; ε réel > 0) : $V(B ; \varepsilon)$ est l'ensemble des $T \in (\mathcal{D}')$ vérifiant $T(B) \leqslant \varepsilon$, ou $|T(\varphi)| \leqslant \varepsilon$ pour $\varphi \in B$. $(\mathcal{D}')$ est un espace vectoriel localement convexe, à base non dénombrable de voisinages.

Propriétés de la topologie THÉORÈME VIII *Le dual topologique* $(\mathcal{D}')$ *est complet.*

C'est l'extension à $(\mathcal{D})$ d'une propriété classique des espaces de Banach, vraie également pour tous les espaces vectoriels bornologiques.

Démonstration immédiate : si des T_j forment un filtre de Cauchy, les $T_j(\varphi)$ convergent pour toute $\varphi \in (\mathcal{D})$ vers une limite $T(\varphi)$; T

est une forme linéaire bornée sur toute partie bornée de $(\mathcal{D})$, donc une distribution (théoréme V), et les T_j convergent fortement vers T dans $(\mathcal{D}')$.

On peut définir dans $(\mathcal{D}')$, exactement comme dans $(\mathcal{D})$, les ensembles bornés. On voit alors qu'un ensemble borné de distributions est un ensemble de distributions qui prennent, sur tout ensemble borné de $(\mathcal{D})$, des valeurs bornées.

Nous admettrons sans démonstration les théorémes suivants :

Théorème IX *Pour qu'un ensemble* B' *de* $(\mathcal{D}')$ *soit borné, il est :*

a) *nécessaire qu'il existe un voisinage* V *de* 0 *dans* $(\mathcal{D})$ *tel que* $|T(\varphi)|$ *soit borné pour* $\varphi \in V$, $T \in B'$;

b) *suffisant que, pour toute* $\varphi \in (\mathcal{D})$, $|T(\varphi)|$ *soit borné pour* $T \in B'$ *(la borne dépendant évidemment de* φ*).*

a) résulte de ce que $(\mathcal{D})$, limite inductive d'espaces de Fréchet, est tonnelé ; alors toute partie bornée de $(\mathcal{D}')$ est équicontinue (¹) ;

b) signifie, si l'on introduit sur $(\mathcal{D}')$ la topologie faible $\sigma(\mathcal{D}', \mathcal{D})$, que toute partie faiblement bornée de $(\mathcal{D}')$ est fortement bornée ; cela résulte de ce que $(\mathcal{D})$ est complet (²).

Ce théoréme montre que si des distributions prennent des valeurs bornées sur toute $\varphi \in (\mathcal{D})$, elles prennent des valeurs bornées sur un voisinage convenable V de 0 dans $(\mathcal{D})$.

Théorème X *Pour que des* $\varphi_j \in (\mathcal{D})$ *convergent vers* 0 *dans* $(\mathcal{D})$, *il faut et il suffit que les* $T(\varphi_j)$ *convergent vers* 0, *quelle que soit* $T \in (\mathcal{D}')$, *et uniformément par rapport à tout ensemble borné* B' *de distributions* T.

On peut encore dire : soit B' un ensemble borné de $(\mathcal{D}')$; posons $\varphi(B') = \sup_{T \in B'} |T(\varphi)|$; des φ_j convergent vers 0 dans $(\mathcal{D})$ si, quel que soit l'ensemble borné B', les $\varphi_j(B')$ convergent vers 0. Ainsi la topologie de $(\mathcal{D})$ peut être définie à partir des ensembles bornés de $(\mathcal{D}')$ de la même manière que la topologie de $(\mathcal{D}')$ à partir des ensembles bornés de $(\mathcal{D})$.

Le théoréme X résulte immédiatement du théoréme IX. Si φ converge vers 0 uniformément sur toute partie bornée B' de $(\mathcal{D}')$,

(¹) Voir Bourbaki [6], fascicule XVIII, théorème 2, page 27

(²) Voir Bourbaki [6], fascicule XVIII, corollaire 1 du théorème 1, page 22

φ converge vers 0 dans $(\mathcal{D})$; car le polaire V^o d'un voisinage V de 0 convexe équilibré fermé dans $(\mathcal{D})$ est une partie bornée de $(\mathcal{D}')$, et dès que $\varphi\,(V^o)$ est majoré par 1, φ est dans V. Réciproquement, si φ converge vers 0 dans $(\mathcal{D})$, alors, pour ε donné > 0, si B' est une partie bornée de $(\mathcal{D}')$, il existe d'après le théorème IX *a*) un voisinage V de 0 dans $(\mathcal{D})$ tel que $\varphi(B') \leqslant \varepsilon$ pour $\varphi \in V$, donc $\varphi(B')$ converge vers 0.

La propriété que nous venons de démontrer est vraie pour tout espace tonnelé [1], car elle exprime simplement que les parties fortement bornées de $(\mathcal{D}')$ sont équicontinues.

On voit qu'on peut condenser les résultats des théorèmes IX et X et la définition de la convergence dans $(\mathcal{D}')$ en disant ceci :

THÉORÈME XI *Si* $T \in (\mathcal{D}')$ et $\varphi \in (\mathcal{D})$ *restent tous deux bornés* (T *dans* $(\mathcal{D}')$ *et* φ *dans* $(\mathcal{D})$), $|T(\varphi)|$ *reste borné; si un seul des deux* (T *ou* φ) *reste borné et que l'autre converge fortement vers* 0, $T(\varphi)$ *converge vers* 0.

Nous énoncerons cette propriété eu disant que *la forme bilinéaire* $T(\varphi)$ *de* $T \in (\mathcal{D}')$, $\varphi \in (\mathcal{D})$, *est hypocontinue* [2].

Mais $T(\varphi)$ est une forme bilinéaire discontinue de l'ensemble des 2 variables T et φ ; si T et φ convergent tous deux vers 0, $T(\varphi)$ ne converge pas nécessairement vers 0. Il n'en serait sûrement ainsi que dans le cas de suites convergentes, car une suite convergente est bornée. D'autre part, dans le cas des topologies faibles, voici tout ce que l'on peut dire :

1° Si l'un des deux (T ou φ) est fixe, et que l'autre converge faiblement vers 0, $T(\varphi)$ converge vers 0.

2° Dans le cas de suites convergentes (ou de filtres convergents ayant une base de filtre bornée ou dénombrable), on pourra dire la même chose en topologie faible qu'en topologie forte, une suite faiblement convergente étant aussi fortement convergente, dans $(\mathcal{D})$ (page 70) comme dans $(\mathcal{D}')$ (page 74).

Chaque $\varphi \in (\mathcal{D})$ définit sur $(\mathcal{D}')$ une forme linéaire continue

$$L(T) = T(\varphi). \tag{III, 3 ; 2}$$

(1) BOURBAKI [6], fascicule XVIII, scholie. chap. IV, § 3, n° 2, page 87

(2) Voir BOURBAKI [6], fascicule XVIII, chap. III, § 4, pages 38-44. Nous disons, pour abréger, « hypocontinue », au lieu de « hypocontinue par rapport à toutes les parties bornées »

Donc $(\mathcal{D})$ est un sous-espace vectoriel du dual $(\mathcal{D}'')$ de $(\mathcal{D}')$, appelé aussi bidual de $(\mathcal{D})$; le théorème X montre que si on introduit sur $(\mathcal{D}'')$ la topologie forte de dual topologique de $(\mathcal{D}')$, $(\mathcal{D}'')$ induit sur $(\mathcal{D})$ la topologie initiale de $(\mathcal{D})$.

Ensembles bornés et ensembles compacts dans $(\mathcal{D}')$; *réflexivité*

THÉORÈME XII *Il y a identité, dans* $(\mathcal{D}')$, *entre ensembles bornés et ensembles relativement compacts :* $(\mathcal{D}')$ *est un espace de Montel.*

D'une façon générale, le dual d'un espace de Montel est un espace de Montel. Le théorème VII joint au fait que $(\mathcal{D})$ est tonnelé entraîne le théoréme XII [1].

Voici la démonstration. Soit B′ un ensemble borné de $(\mathcal{D}')$. Un ultrafiltre sur B′ converge simplement sur $(\mathcal{D})$ vers une limite, qui est une forme linéaire sur $(\mathcal{D})$; comme B′ est équicontinue (théoréme IX *a*)), cette forme linéaire est continue, c'est une distribution T. En outre cet ultrafiltre converge uniformément sur toute partie compacte de $(\mathcal{D})$, donc, d'après le théorème VII, sur n'importe quel ensemble borné de $(\mathcal{D})$; d'après la définition de la convergence dans $(\mathcal{D}')$, l'ultra-filtre converge alors fortement vers T et B′ est bien relativement compact.

Il résulte de ce théorème que, comme dans $(\mathcal{D})$, il y a dans $(\mathcal{D}')$ identité entre ensembles faiblement et fortement compacts.

Sur une partie bornée de $(\mathcal{D}')$, topologies faible et forte sont identiques. Une suite faiblement convergente ou une suite de Cauchy faible est fortement convergente.

En termes plus concrets :

THÉORÈME XIII *Si une suite de distributions* T_j *est telle que, pour toute* $\varphi \in (\mathcal{D})$, *les* $T_j(\varphi)$ *aient une limite* $T(\varphi)$, T *est une distribution, et les* T_j *convergent fortement vers* T.

Il en est de même pour un filtre ayant une base de filtre bornée ou dénombrable.

Une distribution T qui est fonction faiblement continue d'un nombre fini de paramétres réels λ_ν, est fonction fortement continue de ces paramétres.

Remarque Le fait que, dans le théorème XIII, T soit une distribution, résulterait aussi du théorème de Banach-Steinhaus [2],

[1] Voir BOURBAKI [6], fascicule XVIII, proposition 7, page 90
[2] Voir BOURBAKI [6], fascicule XVIII, théorème 1, page 88

applicable puisque $(\mathcal{D})$ est tonnelé. Nous l'avons déduit ici du théorème XII.

THÉORÈME XIV *$(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont réflexifs ; chacun est le dual fort de l'autre.*

Un théorème de Banach exprime qu'un espace de Banach est réflexif si sa boule fermée est faiblement compacte. Une généralisation, due à MM. Mackey et Arens, dit qu'un espace vectoriel topologique, localement convexe, où les ensembles bornés sont relativement faiblement compacts, est semi-réflexif ; et un espace semi-réflexif et tonnelé est réflexif [1].

Le théorème XIV est donc une conséquence des théorèmes VII et X. Il est inexact pour les espaces $(\mathcal{D}^m)$ et $(\mathcal{D}'^m)$, et en particulier pour l'espace $(\mathcal{C})$ des fonctions continues à support compact et l'espace $(\mathcal{C}')$ des mesures.

Un théorème d'approximation THÉORÈME XV *L'espace vectoriel $(\mathcal{D})$, considéré comme sous-espace vectoriel de $(\mathcal{D}')$, est dense dans $(\mathcal{D}')$.*

Cela revient à dire que toute distribution est limite de fonctions indéfiniment dérivables à supports compacts. Cela résulte immédiatement de la réflexivité de $(\mathcal{D})$. Une forme linéaire continue sur $(\mathcal{D}')$ est définie par une fonction $\varphi \in (\mathcal{D})$. Si elle est orthogonale à tous les éléments du sous-espace $(\mathcal{D})$ de $(\mathcal{D}')$ formé des fonctions indéfiniment dérivables à supports compacts f, c'est-à-dire si elle vérifie

$$\iint \dots \int f(x)\varphi(x)\, dx = 0$$

pour toute $f \in (\mathcal{D})$, elle est manifestement nulle ; et cela entraîne bien que $(\mathcal{D})$ soit un sous-espace dense de $(\mathcal{D}')$.

Nous verrons au chapitre du produit de convolution un procédé de « régularisation » permettant de trouver *une suite* de fonctions indéfiniment dérivables convergeant vers une distribution donnée (Chapitre VI, § 4, théorème XI).

On voit de même que *les combinaisons linéaires finies de masses ponctuelles forment un sous-espace vectoriel dense de $(\mathcal{D}')$.*

Un critère de convergence. — La définition de la convergence dans $(\mathcal{D}')$ n'est compliquée qu'en apparence ; dans la pratique, la vérification est généralement facile. Il est cependant utile de posséder des critères simples de convergence. Voici le plus simple, d'où découleront tous les autres :

(1) BOURBAKI [6], fascicule XVIII, théorème 1, page 88

THÉORÈME XVI *Si des fonctions f_j convergent vers 0 dans l'espace L^1_K des fonctions sommables sur le compact K, quel que soit K (en particulier si les f_j sont des fonctions continues convergeant uniformément vers 0 sur tout compact), les distributions f_j convergent vers 0 dans $(\mathcal{D}')$.*

Soit en effet B un ensemble borné de $(\mathcal{D})$. Les fonctions $\varphi \in B$ ont leurs supports contenus dans un compact fixe K de R^n, et y sont bornées dans leur ensemble par un nombre $M > 0$.

$$\text{(III, 3 ; 3)} \quad \begin{cases} f_j(B) = \operatorname*{Sup}_{\varphi \in B} |f_j(\varphi)| = \operatorname*{Sup}_{\varphi \in B} \left| \iint_K \cdots \int f_j(x)\varphi(x)\,dx \right| \\ \leqslant M \iint_K \cdots \int |f_j(x)|\,dx \leqslant M \| f_j \|_{L^1_K} \end{cases}$$

Les $f_j(B)$ convergent donc bien vers 0.

Plus généralement si les f_j convergent *faiblement* vers 0 dans L^1_K, et y sont bornées, elles sont bornées dans $(\mathcal{D}')$ et y convergent faiblement, donc fortement, vers 0.

En utilisant la même méthode que dans la démonstration du théorème IV du chapitre I (utilisation d'une partition de l'unité), on peut voir que, si des distributions convergent vers une distribution limite au voisinage de tout point de R^n elles convergent vers une distribution limite dans R^n :

La convergence est une propriété locale.

En particulier : le support de la limite des distributions T_j est contenu dans l'adhérence de la réunion de leurs supports. Des distributions dont les supports s'éloignent indéfiniment dans R^n, c'est-à-dire qui, dans tout ouvert relativement compact de R^n, finissent par être nulles, convergent vers 0 dans $(\mathcal{D}')$.

Tous les théorèmes précédents sont aussi vrais pour le dual $(\mathcal{D}'^m)$ de $(\mathcal{D}^m)$, sauf XII, XIII, XIV, XV.

Remarques Si des distributions T_j convergent vers une limite T :

1° Si les T_j sont des mesures $\geqslant 0$, il en est de même de T ; car $T_j(\varphi) \geqslant 0$, entraîne $T(\varphi) \geqslant 0$;

2° Si les T_j sont des mesures μ_j, de normes $\iint_\Omega \cdots \int |d\mu_j|$ majorées, pour tout ouvert Ω d'adhérence compacte dans R^n, par un nombre > 0 fixe, il en est de même pour T ; car $|T_j(\varphi)| \leqslant k(\operatorname{Max}|\varphi|)$ entraîne $|T(\varphi)| \leqslant k(\operatorname{Max}|\varphi|)$. Il en est encore ainsi si l'on remplace « mesures »

par fonctions $\in L^p$ sur tout $\Omega (1 < p \leqslant \infty)$, de normes bornées dans L^p sur tout Ω par un nombre > 0 fixe, car

$$|T_j(\varphi)| \leqslant k \|\varphi\|_{L^{p'}} \quad [p' = p/(p-1)]$$

entraîne $|T(\varphi)| \leqslant k \|\varphi\|_{L^{p'}}$. Cette remarque est évidemment en défaut pour l'espace $(\mathcal{C})$ des fonctions continues ou l'espace L^1 des fonctions sommables, qui ne sont pas des duals d'espaces de Banach.

§ 4 Définition topologique de la dérivation

Dérivées premières En utilisant la topologie dans $(\mathcal{D}')$, nous pouvons maintenant donner une définition plus naturelle de la dérivée. Pour une fonction f, on a, au sens usuel :

(III, 4 ; 1)

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim_{h_k \to 0} \frac{f(x_1 x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k + h_k, \ldots, x_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n)}{h_k}$$

Posons $h = \{0, 0, \ldots, 0, h_k, 0, \ldots 0\}$ (h est le point dont la k-ième coordonnée est h_k, les autres étant nulles), et utilisons la notion de *translatée* de f (voir page 55).

(III, 4 ; 2) $$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \lim_{h_k \to 0} \frac{\tau_{-h} f - f}{h_k}$$

Théorème XVII *Si* T *est une distribution quelconque, on a*

(III, 4 ; 3) $$\frac{\partial T}{\partial x_k} = \lim_{h_k \to 0} \frac{\tau_{-h} T - T}{h_k}$$

Nous devons démontrer que

(III, 4 ; 4) $$S_{(h_k)} = \frac{\partial T}{\partial x_k} - \frac{\tau_{-h} T - T}{h_k}$$

converge vers 0 quand $h_k \to 0$.

(III, 4 ; 5) $S_{(h_k)}(\varphi) = T(\psi_{(h_k)})$, avec $\psi_{(h_k)} = -\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_k} - \dfrac{\tau_h \varphi - \varphi}{h_k}$.

On voit immédiatement que, pour $h_k \to 0$, $\psi_{(h_k)}$ converge uniformément vers 0 ainsi que chacune de ses dérivées, donc converge vers 0 dans $(\mathcal{D})$, pour φ fixée. T étant une forme linéaire continue, $T(\psi_{(h_k)})$, c'est-à-dire $S_{(h_k)}(\varphi)$, converge vers 0 quand h_k tend vers 0. $S_{(h_k)}$ converge donc vers 0 dans $(\mathcal{D}')$, faiblement, donc aussi forte-

ment d'après le théorème XIII. (La convergence forte se démontrerait d'ailleurs sans difficulté directement.)

Dérivées d'ordre quelconque Il est facile de généraliser le théorème XVII en introduisant les différences successives de T.

Posons, toujours avec $h = \{ 0, 0, \ldots h_k, \ldots, 0 \}$,

$$\text{(III, 4 ; 6)} \qquad \Delta_{h_k} \mathrm{T} = \tau_{-h}\mathrm{T} - \mathrm{T}.$$

La différence p_k-ième par rapport à x_k sera, pour des accroissements tous égaux à h_k :

$$\text{(III, 4 ; 7)} \quad \Delta_{h_k}^{p_k}\mathrm{T} = \Delta_{h_k}(\Delta_{h_k}^{p_k-1}\mathrm{T}) = \tau_{-p_k h}\mathrm{T} - \mathrm{C}_{p_k}^1 \tau_{-(p_k-1)h}\mathrm{T} + \mathrm{C}_{p_k}^2 \tau_{-(p_k-2)h}\mathrm{T} + \ldots + (-1)^{p_k}\mathrm{T}.$$

On peut, par exemple, considérer des accroissements distincts appliqués à des variables distinctes $x_1, x_2, \ldots, x_n$; si $p = \{ p_1, p_2, \ldots, p_n \}$, si h est un système d'accroissements $h = \{ h_1, h_2, \ldots, h_n \}$ (h_k pour la variable x_k) on définit

$$\text{(III, 4 ; 8)} \qquad \Delta_{h_1}^{p_1}\Delta_{h_2}^{p_2}\ldots\Delta_{h_n}^{p_n}\mathrm{T} = \Delta_h^p\mathrm{T}$$

et l'on aura, comme on le voit aisément :

$$\text{(III, 4 ; 9)} \quad \mathrm{D}^p\mathrm{T} = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta_{h_1}^{p_1}\Delta_{h_2}^{p_2}\ldots\Delta_{h_n}^{p_n}\mathrm{T}}{h_1^{p_1}h_2^{p_2}\ldots h_n^{p_n}} = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta_h^p\mathrm{T}}{h^p}.$$

Toute dérivée D^p s'exprime ainsi comme limite de différences, sans qu'il soit nécessaire de passer par les dérivées intermédiaires $\mathrm{D}^q\mathrm{T}$, $q \leqslant p$.

Des formules telles que (III, 4 ; 9) (pour $p = 2$) ont joué un rôle historique important, dans l'étude des séries trigonométriques par Riemann. Un célèbre théorème de Schwarz dit que, si une fonction continue $f(x)$ d'une variable ($n = 1$) vérifie, pour tout x,

$$\text{(III, 4 ; 10)} \quad \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2} = 0,$$

$f(x)$ est une fonction linéaire.

Des égalités analogues à (III, 4 ; 9) ne nous permettent pas de le démontrer. Car le premier membre de (III, 4 ; 10) converge forcément, dans $(\mathcal{D}')$, vers la dérivée seconde f''. Mais des fonctions peuvent converger en tout point vers 0 sans converger vers 0 dans l'espace $(\mathcal{D}')$ des distributions, de sorte que nous ne pouvons pas

affirmer que f'' soit nulle et que par conséquent f soit une fonction linéaire. Ainsi des considérations élémentaires sur les distributions ne donnent pas des résultats aussi fins que le théorème de Schwarz, qui est d'ailleurs particulier à l'expression spéciale considérée, et lié essentiellement à la convexité et au principe du maximum comme sa généralisation aux fonctions sous-harmoniques.

Mais par contre on obtient des résultats bien plus généraux :

1° D'après le théorème XVI, si des fonctions bornées sur tout compact convergent presque partout vers 0, elles convergent vers 0 dans $(\mathcal{D}')$.

Donc si, pour une fonction de plusieurs variables, $\dfrac{\Delta_h^p f}{h^p}$ converge presque partout vers 0 quand $h \to 0$ et reste borné pour h assez petit, indépendamment de x, sur tout compact, alors $D^p f = 0$; et si $n = 1$ (cas d'une variable), f est un polynôme de degré $\leqslant p - 1$.

2° Si une suite de fonctions continues sur R^n converge partout vers 0, elles sont bornées dans leur ensemble au voisinage de tout point d'un ouvert partout dense de R^n. Donc si $f(x)$ est continue et si $\dfrac{\Delta_h^p f}{h^p}$ converge partout vers 0, $D^p f$ est nulle sur un ouvert partout dense, et a pour support un ensemble fermé non dense. Dans le cas d'une variable ($n = 1$), dans chaque intervalle contigu à cet ensemble fermé, f est un polynôme de degré $\leqslant p - 1$ (qui peut varier suivant l'intervalle). Naturellement on doit ici comprendre le résultat $D^p f = 0$ au sens de la théorie des distributions ; f n'a peut-être pas de dérivée usuelle.

Fonctions monotones D'autre part il y a des cas où les difficultés signalées page 78, dues à la différence entre convergence en tout point et convergence dans $(\mathcal{D}')$, ne se présentent pas. Ainsi un théorème classique de M. S. Bernstein [1] dit qu'une fonction d'une variable, « complètement monotone » dans un intervalle $\left]a, b\right[$, y est analytique. Il faut commencer par démontrer qu'une telle fonction $f(x)$ est indéfiniment dérivable (au sens usuel) à dérivées $\geqslant 0$. Or c'est maintenant évident. Car si $f(x)$ est complètement monotone, on a, quel que soit h, $\Delta_h^p f / h^p \geqslant 0$. Comme la limite dans $(\mathcal{D}')$ de

(1) S. Bernstein [1], pages 196-197

mesures $\geqslant 0$ est une mesure $\geqslant 0$, on voit, en faisant tendre h vers 0, que toutes les dérivées de f sont des mesures $\geqslant 0$. Alors f est bien indéfiniment dérivable au sens usuel (corollaire du théorème III du chapitre II). Le théorème est encore vrai pour plusieurs variables. D'une façon générale, beaucoup de travaux sur les rapports entre « quotients différentiels » et dérivées peuvent être notablement simplifiés et mieux interprétés par la théorie des distributions [1].

Remarque Les formules de la page 56 peuvent s'interpréter d'une autre manière. T étant fixée, l'application $h \to \tau_h T$ est une fonction vectorielle de h, c'est-à-dire des n variables $h_1, h_2, \ldots, h_n$, à valeurs dans l'espace des distributions $(\mathcal{D}')$. Cette fonction est indéfiniment dérivable, et l'on a

$$\text{(II, 4 ; 11)} \quad \left[\frac{\partial}{\partial h_k}(\tau_h T)\right]_{h=0} = -\frac{\partial T}{\partial x_k}; \quad \frac{\partial}{\partial h_k}(\tau_h T) = -\frac{\partial}{\partial x_k}(\tau_h T).$$

§ 5 La dérivation, opération linéaire continue

Continuité de la dérivation Théorème XVIII *La dérivation des distributions est une opération linéaire continue ; c'est même un homomorphisme*

L'opération linéaire $T \to \frac{\partial T}{\partial x_1}$ dans $(\mathcal{D}')$ est la *transposée* de l'opération linéaire continue $\varphi \to -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$, homomorphisme dans $(\mathcal{D})$.

Soit B un ensemble borné dans $(\mathcal{D})$. Lorsque φ parcourt B, $\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}$ parcourt un certain ensemble borné B'. Alors la formule

$$\frac{\partial T}{\partial x_1}(\varphi) = T\left(-\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\right)$$

montre que $\frac{\partial T}{\partial x_1}(B) = T(B')$: si des T_j convergent vers 0 dans $(\mathcal{D}')$, les $T_j(B')$, donc les $\frac{\partial T_j}{\partial x_1}(B)$, convergent vers 0 ; par suite les $\frac{\partial T_j}{\partial x_1}$ convergent vers 0 dans $(\mathcal{D}')$: la dérivation est une opération linéaire continue.

[1] Choquet [1]; Dieudonné [3]; Popoviciu [1]; Boas [1]; Whitney [2], pour ne citer que ceux-là

Revenons maintenant à ce que nous avons dit au théorème IV du chapitre II sur l'intégration. A chaque distribution S nous pouvons d'une façon particulière faire correspondre une distribution $T = I_1(S)$ telle que $\frac{\partial T}{\partial x_1} = S$.

En choisissant la distribution Σ_1 nulle (page 57), on obtient pour l'application $S \to I_1(S)$, une opération linéaire continue. Ainsi nous avons trouvé à l'opération $\frac{\partial}{\partial x_1}$ au moins une opération « réciproque » à droite I_1 $\left(\frac{\partial}{\partial x_1} I_1(S) = S\right)$ *continue*, ce qui prouve bien que cette opération $\frac{\partial}{\partial x_1}$ est un homomorphisme.

Le théorème XVIII est fondamental. Il « réhabilite » la dérivation comme une opération simple de l'analyse : opération toujours possible et continue. Il fournit un critère des plus facile pour montrer qu'il y a convergence dans $(\mathcal{D}')$: *si on a pu montrer que des distributions* T_j *convergent vers* 0, *les* $\frac{\partial T_j}{\partial x_1}$ *convergent aussi vers* 0.

Il est classique que des fonctions f_j peuvent converger uniformément vers 0 sans que leurs dérivées $\frac{\partial f_j}{\partial x_1}$ possèdent la même propriété ; cela tient à ce qu'on considère une topologie inadéquate à l'utilisation de la dérivée ; les $\frac{\partial f_j}{\partial x_1}$ convergent vers 0 *dans* $(\mathcal{D}')$. Naturellement les dérivations d'ordre plus élevé sont aussi des opérations linéaires continues.

Critère de convergence Le théorème XVI peut alors se généraliser de la façon suivante et donner le *principal critère de convergence dans* $(\mathcal{D}')$ *à utiliser dans la pratique* :

THÉORÈME XIX . *Si des fonctions* f_j *convergent vers* 0 *dans l'espace* L^1_K *des fonctions sommables sur le compact* K, *quel que soit* K *(en particulier si les* f_j *sont des fonctions continues convergeant uniformément vers* 0, *sur tout compact), alors, quel que soit le symbole composé de dérivation*

$$D = \sum_p a_p D^p, \qquad a_p = \text{constantes complexes,}$$

les Df_j *convergent vers* 0 *dans* $('\mathcal{D})$.

Ces théorèmes s'appliqueront notamment aux sommes et produits infinis convergents dans l'espace $(\mathcal{D}')$ des distributions.

Rappelons qu'une somme infinie $\sum_j T_j$ est convergente si les sommes partielles finies convergent suivant l'ordonné filtrant des parties finies de l'ensemble des indices (1) ; une série $\mathop{S}\limits_{\nu=1}^{\nu=\infty} T_\nu$ est convergente si les sommes $S_m = \sum_{\nu \leqslant m} T_\nu$ ont une limite ; si la série $\mathop{S}\limits_{\nu} T_\nu$ est commutativement convergente (convergente quel que soit l'ordre des termes), elle peut être remplacée par la somme convergente $\sum_\nu T_\nu$ et possède les principales propriétés d'une somme finie.

Une somme ou série convergente dans $(\mathcal{D}')$ peut être dérivée terme à terme sans précaution spéciale.

Cela rendra de nombreux services dans l'analyse harmonique (transformations de Fourier et Laplace).

§ 6 Structure locale d'une distribution

Distributions et dérivées des fonctions continues **Théorème XX**

Si T *est une distribution,* K *un compact, il existe un nombre entier* $\geqslant 0$ *m, tel que, si des* $\varphi_j \in (\mathcal{D}_K)$ *convergent uniformément vers* 0 *ainsi que leurs dérivées d'ordre* $\leqslant m$, *les* $T(\varphi_j)$ *convergent vers* 0.

En effet, T définit une forme linéaire continue sur $(\mathcal{D}_K)$, espace vectoriel dont nous avons vu la topologie (§ 1). Il existe donc, quel que soit $\varepsilon > 0$, un voisinage de 0 dans $(\mathcal{D}_K)$, $V(m, \eta\,; K)$, tel que $\varphi \in V(m, \eta\,; K)$ entraîne $|T(\varphi)| \leqslant \varepsilon$. Alors, quel que soit $k > 0$, $\varphi \in V(m, k\eta\,; K)$ entraîne $|T(\varphi)| \leqslant k\varepsilon$, ce qui démontre le théorème.

Théorème XXI *Une distribution* T *sur* R^n *est égale, dans tout ouvert* Ω *de* R^n *d'adhérence* $\overline{\Omega}$ *compacte, à une dérivée d'une fonction continue, dont le support peut être choisi dans un voisinage arbitraire de* $\overline{\Omega}$.

Appliquons en effet ce qui précède à $K = \overline{\Omega}$. Il existe m et η tels que, pour $\varphi \in (\mathcal{D}_{\overline{\Omega}})$, l'ensemble d'inégalités

(1) Voir Bourbaki [4], chapitre III, § 4 :
Quel que soit le voisinage V de O dans $(\mathcal{D}')$, il existe une partie finie J de l'ensemble des indices telle que, pour toute partie finie $K \supset J$ de cet ensemble, $\left(T - \sum_{j \in K} T_j\right)$ soit dans V

(III, 6 ; 1) $\qquad |D^p\varphi| \leqslant \eta, \qquad$ pour $\qquad |p| \leqslant m,$

entraîne $|T(\varphi)| \leqslant \varepsilon$.

Mais, pour toute fonction $\theta \in (\mathcal{D}_{\overline{\Omega}})$, on a, quel que soit i,

(III, 6 ; 2)

$$\theta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_i} \frac{\partial\theta}{\partial t_i}(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, t_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)dt_i.$$

Alors, si l est un nombre $\geqslant 1$ dépassant la plus grande dimension de $\overline{\Omega}$, toutes les inégalités (III, 6 ; 1) sont entraînées par l'unique inégalité

(III, 6 ; 3) $$\left|\frac{\partial^m\varphi}{\partial x^m}\right| = \left|\frac{\partial^{mn}\varphi}{\partial x_1^m \partial x_2^m \ldots \partial x_n^m}\right| \leqslant \eta/l^{mn},$$

elle-même conséquence de

(III, 6 ; 4) $$\iint \ldots \int \left|\frac{\partial^{m+1}\varphi}{\partial x^{m+1}}\right| dx \leqslant \eta/l^{mn}.$$

On voit qu'il est suffisant, pour que les $T(\varphi_j)$ convergent vers 0, pour des fonctions $\varphi_j \in (\mathcal{D}_{\overline{\Omega}})$, que les fonctions $\dfrac{\partial^{m+1}\varphi_j}{\partial x^{m+1}}$ convergent vers 0, considérées comme éléments de l'espace de Banach $L^1_{\overline{\Omega}} = L^1_K$ des fonctions sommables sur $\overline{\Omega}$.

Posons

(III, 6 ; 5) $$\psi = \frac{\partial^{m+1}\varphi}{\partial x^{m+1}}.$$

La correspondance entre ψ et φ est biunivoque ; φ détermine ψ par dérivation et ψ détermine φ par des intégrations successives telles que (III, 6 ; 2). La forme linéaire $T(\varphi)$ est donc une forme linéaire $L(\psi)$. L'espace vectoriel (Δ) des ψ pour lesquelles $L(\psi)$ est définie est un sous-espace vectoriel de L^1_K qui est distinct de l'espace entier, car :

1° ψ est indéfiniment dérivable dans R^n ;

2° ψ est de la forme $\dfrac{\partial^{m+1}\varphi}{\partial x^{m+1}}$, φ ayant elle aussi son support dans $\overline{\Omega}$.

La forme linéaire $L(\psi)$ est alors continue sur (Δ) muni de la topologie induite par L^1_K. Donc, d'après le théorème de Hahn-Banach, elle est prolongeable, d'une infinité de manières, en une

forme linéaire continue sur L^1_K, définie par une fonction f, mesurable et bornée sur $\overline{\Omega}$:

(III, 6 ; 6) $$L(\psi) = \iint \cdots \int f \psi \, dx.$$

On a alors, pour $\varphi \in (\mathcal{D}_\Omega)$ et a fortiori pour $\varphi \in (\mathcal{D}_\Omega)$:

(III, 6 ; 7) $$T(\varphi) = L(\psi) = f\left(\frac{\partial^{m+1}\varphi}{\partial x^{m+1}}\right),$$

ce qui exprime que, dans l'ouvert Ω,

(III, 6 ; 8) $$T = (-1)^{(m+1)n} \frac{\partial^{m+1} f}{\partial x^{m+1}}.$$

f n'est évidemment pas déterminée d'une manière unique, car on peut lui ajouter n'importe quelle fonction g vérifiant dans Ω l'équation aux dérivées partielles

(III, 6 ; 9) $$\frac{\partial^{m+1} g}{\partial x^{m+1}} = 0.$$

Considérons maintenant la fonction

(III, 6 ; 10) $$F(x_1, x_2, \ldots x_n) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f(t_1, t_2, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n.$$

C'est une fonction continue sur R^n à support généralement non compact.

D'autre part, comme nous l'avons vu au théorème V du chapitre II, on a, au sens des distributions :

(III, 6 ; 11) $$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial^n F}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n} = f.$$

On a alors, dans l'ouvert Ω de R^n,

(III, 6 ; 12) $$T = (-1)^{(m+1)n} \frac{\partial^{m+2} F}{\partial x^{m+2}}.$$

Si maintenant U est un voisinage quelconque de $\overline{\Omega}$, on peut, en multipliant F par une fonction $\alpha \in (\mathcal{D}_U)$ égale à 1 sur $\overline{\Omega}$, remplacer, dans (III, 6 ; 12), F par $G = \alpha F$, ce qui démontre le théorème.

Le théorème XXI est très important. Nous avons introduit les distributions pour pouvoir dériver les fonctions continues. Nous

voyons que nous n'avons rien introduit de trop, puisque, au point de vue local, toute distribution est dérivée d'une fonction continue.

Ce théorème prouve en particulier, en utilisant la notion d'ordre d'une distribution introduite au chapitre I, § 2, page 25, que : *sur tout ouvert* Ω *de* R^n *d'adhérence compacte, toute distribution définie sur* R^n *est d'ordre fini.*

La démonstration du théorème XXI se simplifie d'ailleurs dans le cas d'une variable ($n = 1$). On peut faire intervenir $C_{\overline{\Omega}}$ au lieu de L^1_{Ω}, et obtenir plus rapidement :

Corollaire *Sur un ouvert d'adhérence compacte* Ω *de* R^1, *une distribution* T *est d'ordre fini* m. *Alors elle est dans* Ω *dérivée d'ordre* m *d'une mesure ; sa dérivée d'ordre* k *est d'ordre* $\leqslant m + k$ ($= m + k$ *si* $m > 0$), *ses primitives d'ordre* $\geqslant m + 2$ *sont des fonctions continues. Une distribution dont toutes les dérivées sont d'ordre* $\leqslant m$ *fixe est une fonction indéfiniment dérivable au sens usuel*

Ensembles bornés de distributions Reprenons le théorème XXI, en considérant, non plus une distribution T, mais un ensemble B' de distributions, borné dans $(\mathcal{D}')$. Alors, d'après le théorème IX, il existe *un même voisinage* de 0, $V(m\,;\,\varepsilon\,;\,\overline{\Omega})$, dans $(\mathcal{D}_{\overline{\Omega}})$, sur lequel les formes $T \in B'$ sont bornées dans leur ensemble par η.

Les formes linéaires $L(\psi)$ correspondantes, définies pour $\psi \in (\Delta)$, sont bornées dans leur ensemble ; on voit que, quelle que soit $\psi \in (\Delta)$, $T \in B'$.

$$\text{(III, 6 ; 13)} \qquad \iint \cdots \int |\psi|\, dx \leqslant \eta/l^{mn}$$

entraîne $|L(\psi)| \leqslant \varepsilon$; donc

$$\text{(III, 6 ; 14)} \qquad |L(\psi)| \leqslant \frac{\varepsilon l^{mn}}{\eta} \|\psi\|_{L^1_x}.$$

Mais, d'après le théorème de Hahn-Banach, toute forme linéaire continue sur le sous-espace vectoriel (Δ) de L^1_x peut être prolongée en une forme linéaire continue sur l'espace entier L^1_x et *de même norme.*

On peut donc choisir une fonction $f \in L^\infty_x$, représentant la forme L, telle que

$$\text{(III, 6 ; 15)} \quad \|L\| = \operatorname*{Max}_{\psi \in \Delta} \frac{|L(\psi)|}{\|\psi\|} = \operatorname*{Max}_{x \in \overline{\Omega}} |f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon l^{mn}}{\eta}.$$

Si alors on passe de f à F, on voit que les fonctions continues F, associées aux distributions T, sont bornées dans leur ensemble sur R^n. On peut donc énoncer, la réciproque étant évidente :

THÉORÈME XXII *Pour qu'un ensemble* B' *de distribution soit borné dans* ($\mathcal{D}'$), *il faut et il suffit que, quel que soit l'ouvert* Ω *relativement compact de* R^n, *il existe un indice p tel que les* $T \in B'$ *s'expriment toutes dans* Ω *comme dérivées* D^p *de fonctions continues bornées dans leur ensemble.*

Suites convergentes de distributions Et maintenant au lieu de considérer un ensemble borné B', on considérera *une suite* T_j convergeant vers 0 dans ($\mathcal{D}'$).

Alors la suite des T_j sera bornée de sorte que l'on a

$$T_j = (-1)^{(m+1)n} \frac{\partial^{m+1}}{\partial x^{m+1}} f_j \tag{III, 6 ; 16}$$

et les f_j seront bornées.

Ici, il y a intérêt à remplacer l'espace L^1_κ par l'espace de Hilbert L^2_κ ; $L_j(\psi)$, continue sur (Δ) muni de la topologie induite par L^1_κ, l'est a fortiori sur (Δ) muni de la topologie induite par L^2_κ. Le théorème de Hahn-Banach est d'ailleurs inutile, car pour prolonger L, continue sur (Δ), en une forme linéaire L continue sur L^2_κ ; il suffit de prolonger L par continuité sur l'adhérence ($\bar{\Delta}$) de (Δ) dans L^2_κ et de prendre L nulle sur le sous-espace vectoriel de L^2_κ perpendiculaire à (Δ). Les f_j seront alors, non plus des fonctions $\in L^\infty_\kappa$ bornées, mais des fonctions $\in L^2_\kappa$, de normes bornées dans leur ensemble.

Mais il y a plus. Pour ψ fixe $\in (\Delta)$,

$$\lim_j L_j(\psi) = \lim_j T_j(\varphi) = 0. \tag{III, 6 ; 17}$$

La convergence des $L_j(\psi)$ vers 0 subsiste pour ψ fixé dans l'adhérence ($\bar{\Delta}$) de (Δ) dans L^2_κ, puisque les normes des L_j sont bornées dans leur ensemble ; et aussi pour ψ quelconque $\in L^2_\kappa$, puisque $L_j(\psi) = L_j(\theta)$, θ étant la projection orthogonale de ψ sur la variété ($\bar{\Delta}$).

Les $f_j \in L^2_\kappa$ possèdent alors les propriétés suivantes :

1° les $\|f_j\|$ sont bornées dans L^2_κ ;

2° les $\iint \ldots \int f_j \psi \, dx$ convergent vers 0 quelle que soit $\psi \in L^2_\kappa$. Mais, pour x fixe,

$$\text{(III, 6; 18)} \quad F_j(x) = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{x_2}\int_{-\infty}^{x_n} f_j(t)\,dt = \iint_{\overline{\Omega}} \cdots \int K_x(t) f_j(t)\,dt,$$

$K_x(t) \in L^2_\kappa$ étant la fonction égale à 1 pour $t \leqslant x$, $t \in \overline{\Omega}$, et à 0 ailleurs. Donc les $F_j(x)$ convergent en tout point vers 0 ; et comme les $\|f_j\|$ sont bornées dans L^2_κ et que les $K_x(t)$ forment un compact de L^2_κ, la convergence est uniforme pour $x \in R^n$.

On peut donc énoncer :

Théorème XXIII (*Réciproque du théorème* XIX)

Si des distributions T_j *forment une suite convergeant vers* 0 *dans* $(\mathcal{D}')$, *alors, quel que soit l'ouvert* Ω *relativement compact de* R^n, *il existe un indice* p *tel que les* T_j *s'expriment dans* Ω *comme dérivées* D^p *de fonctions continues formant une suite convergeant uniformément vers* 0 *dans* R^n.

Il en serait de même dans le cas d'un filtre à base bornée ou dénombrable, mais non évidemment d'un filtre quelconque.

En particulier, une distribution $T \in (\mathcal{D}')$, dépendant continûment d'un nombre fini de paramètres réels λ_ν, est égale, lorsque x parcourt un ouvert Ω relativement compact de R^n et que les λ_ν restent bornés, à une dérivée $D^p_x F(x ; \lambda_\nu)$ d'une fonction F continue de x et des λ_ν.

Les théorèmes XXI, XXII, XXIII, seront redémontrés au chapitre VI (XXII, XXIII).

§ 7 Distributions a support compact

Définition de $T(\varphi)$ *lorsque* φ *a un support quelconque* Soit T une distribution dont le support est un compact K_0. Soit alors φ une fonction indéfiniment dérivable *à support quelconque* ; si α est une fonction $\in (\mathcal{D})$, égale à 1 sur un voisinage compact de K_0, il est bien évident que $T(\alpha\varphi)$ dépend de φ mais non de α ; car si α et β sont deux fonctions $\in (\mathcal{D})$, égales à 1 sur un voisinage compact de K_0,

$$\text{(III, 7 ; 1)} \quad T(\alpha\varphi) - T(\beta\varphi) = T\,\{(\alpha - \beta)\,\varphi\} = 0,$$

car $(\alpha - \beta)\varphi$ a son support dans le complémentaire de K_0.

La forme linéaire $T(\alpha\varphi)$ coïncide avec $T(\varphi)$ si φ est à support compact ; nous l'appellerons $T(\varphi)$ quel que soit le support de φ. Ainsi désormais, si T est à support compact, $T(\varphi)$ est défini quand φ est indéfiniment dérivable à support quelconque ; $T(\varphi)$ ne dépend que des valeurs de φ au voisinage de K_0.

En particulier on peut prendre $\varphi(x) \equiv 1$; T(1) s'appelle *intégrale* de T et se notera souvent $\iint \ldots \int \mathrm{T}$. Si T est une mesure μ ou une fonction f (à support compact) on aura

(III, 7 ; 2)

$$\iint \ldots \int \mathrm{T} = \iint \ldots \int d\mu \qquad \text{ou} \qquad \iint \ldots \int \mathrm{T} = \iint \ldots \int f(x)dx.$$

Nous remarquerons que si T est une dérivée d'une distribution à support compact, son intégrale est nulle :

(III, 7 ; 3) $\quad \mathrm{T}(1) = \mathrm{D}^p\mathrm{S}\,(1) = (-1)^{|p|}\mathrm{S}\,(\mathrm{D}^p 1) = 0.$

Théorème XXIV *Si* T *est une distribution à support compact* K_0, *il existe un nombre* $\geqslant 0$, *m, tel que, si des* φ_j *à supports quelconques convergent uniformément vers* 0 *ainsi que leurs dérivées d'ordre* $\leqslant m$, *sur un voisinage de* K_0, *les* $\mathrm{T}(\varphi_j)$ *convergent vers* 0.

En effet, moyennant les hypothèses, les $\alpha\varphi_j$ convergent uniformément vers 0 ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leqslant m$, et ont leur support contenu dans un compact fixe, de sorte que, d'après le théorème XX, les $\mathrm{T}(\alpha\varphi_j) = \mathrm{T}(\varphi_j)$ convergent vers 0 si m est choisi assez grand. Ce théorème exprime que toute distribution à support compact est d'ordre fini, et précisément d'ordre égal au plus petit nombre m possible intervenant dans ce théorème.

Espaces ($\mathcal{E}$), ($\mathcal{E}'$) Soit ($\mathcal{E}$) l'espace vectoriel des fonctions φ indéfiniment dérivables sur R^n (à support quelconque) ; on peut le munir d'une topologie en disant que des φ_j convergent vers 0 dans ($\mathcal{D}$) si elles convergent uniformément vers 0 sur tout compact, ainsi que chacune de leurs dérivées. Un système fondamental de voisinages de 0 dans ($\mathcal{E}$) est donné par les V (K ; m ; ε) (K compact, m entier $\geqslant 0$, $\varepsilon > 0$). $\varphi \in \mathrm{V}$ (K ; m ; ε) si, sur le compact K, toutes les dérivées de φ d'ordre $\leqslant$ m ($\mathrm{D}^p\varphi$, $|p| \leqslant$ m) sont bornées en module par ε. Un système de semi-normes définissant cette topologie est formé par les N (K ; m) : $\mathrm{N}\,(\mathrm{K}; \mathrm{m})\,(\varphi) = \operatorname*{Sup}_{\substack{x \in \mathrm{K} \\ |p| \leqslant m}} |\mathrm{D}^p\varphi(x)|$. ($\mathcal{E}$) est localement convexe, complet, à base dénombrable de voisinages : c'est un espace de Fréchet. Un ensemble borné dans ($\mathcal{E}$) est un ensemble de fonctions φ telles que, sur tout compact K, et pour tout indice p, les $|\mathrm{D}^p\varphi|$ soient bornées.

Il est clair que la distribution T, à support compact K_0, définit

une forme linéaire continue sur $(\mathcal{E})$, c'est-à-dire un élément du dual $(\mathcal{E}')$ de $(\mathcal{E})$.

Réciproquement, soit $L(\varphi)$ une forme linéaire continue sur $(\mathcal{E})$. Comme $(\mathcal{D})$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{E})$, elle définit une forme linéaire $L(\varphi)$ sur $(\mathcal{D})$. Mais si φ_j converge vers 0 dans $(\mathcal{D}_x)$, elle converge aussi vers 0 dans $(\mathcal{E})$, donc $L(\varphi_j)$ converge vers 0 : L est une forme linéaire continue sur $(\mathcal{D})$, il existe une distribution $T \in (\mathcal{D}')$ telle que, pour $\varphi \in (\mathcal{D})$,

$$\text{(III, 7 ; 4)} \qquad L(\varphi) = T(\varphi).$$

T est à support compact K_0 ; sans quoi on pourrait trouver une suite de fonctions $\varphi_\nu \in (\mathcal{D})$ telles que

$$\begin{cases} \varphi_\nu(x) \equiv 0 & \text{pour} \quad |x| \leqslant \nu, \\ T(\varphi_\nu) = 1 ; \end{cases}$$

c'est impossible car les φ_ν convergeraient vers 0 dans $(\mathcal{E})$ (leurs supports s'éloignant indéfiniment), donc les $L(\varphi_\nu) = T(\varphi_\nu)$ devraient converger vers 0.

$(\mathcal{D})$ est dense dans $(\mathcal{E})$; quelle que soit $\varphi \in (\mathcal{E})$, on peut trouver des $\varphi_j \in (\mathcal{E})$ convergeant vers φ dans $(\mathcal{E})$ et égales à φ sur un voisinage compact de K_0 ; alors $L(\varphi_j)$ tend vers $L(\varphi)$, mais $T(\varphi_j) = T(\varphi)$, donc on a (III, 7 ; 4) pour φ quelconque $\in (\mathcal{E})$. Ainsi :

Dualité entre $(\mathcal{E})$ *et* $(\mathcal{E}')$ THÉORÈME XXV *L'espace des distributions à support compact est identique au dual* $(\mathcal{E}')$ *de* $(\mathcal{E})$.

On peut naturellement construire sur $(\mathcal{E}')$ la topologie du dual de $(\mathcal{E})$; elle est évidemment distincte de la topologie induite par $(\mathcal{D}')$ sur $(\mathcal{E}')$ et plus fine qu'elle : $(\mathcal{E}')$ est complet, muni de la topologie du dual, alors que muni de la topologie induite par $(\mathcal{D}')$ il est dense dans $(\mathcal{D}')$. Sauf mention expresse du contraire, $(\mathcal{E}')$ sera toujours muni de la topologie du dual, définie par les ensembles bornés de $(\mathcal{E})$.

On démontre sans peine, pour $(\mathcal{E})$ et $(\mathcal{E}')$, des théorèmes analogues à ceux qui ont été démontrés pour $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$. On montre en particulier que $(\mathcal{E})$ et $(\mathcal{E}')$ sont réflexifs, chacun est le dual de l'autre ; ce sont des espaces de Montel bornologiques (et tonnelés).

Soit B' un ensemble borné de $(\mathcal{E}')$; d'après un théorème analogue au théorème IX a, il existe un voisinage de 0, $V(m ; K ; \varepsilon)$, dans $(\mathcal{E})$, sur lequel toutes les distributions $T \in B'$ sont majorées par 1

(ceci exprime simplement le fait que $(\mathcal{E})$, étant un espace de Fréchet, est tonnelé, donc que toute partie bornée de $(\mathcal{E}')$ est équicontinue). Alors toute $T \in B'$ est nulle dans l'ouvert $\complement K$ (car si le support de φ est dans $\complement K$, $k\varphi$ est dans $V(m\,;\, K\,;\, \varepsilon)$ quel que soit k) ; son support est donc dans K. Si nous appelons $(\mathcal{E}'_K)$ le sous-espace de $(\mathcal{E}')$ formé des distributions ayant leur support dans le compact K de R^n, $(\mathcal{E}')$ est la réunion des $(\mathcal{E}'_K)$ et toute partie bornée de $(\mathcal{E}')$ est contenue dans un $(\mathcal{E}'_K)$; un ensemble borné de $(\mathcal{E}')$ est un ensemble borné de $(\mathcal{D}')$ contenu dans un $(\mathcal{E}'_K)$. Il en est de même de toute suite convergente et de tout filtre convergent à base bornée ou dénombrable.

Enfin $(\mathcal{E}')$ a la topologie limite inductive des $(\mathcal{E}'_K)$. Car $(\mathcal{E}')$ et cette limite inductive ont les mêmes parties bornées, les parties bornées des $(\mathcal{E}'_K)$ [1] ; la topologie limite inductive étant la topologie localement convexe la plus fine induisant les topologies des $(\mathcal{E}'_K)$, est *a priori* plus fine que celle de $(\mathcal{E}')$; mais $(\mathcal{E}')$, étant bornologique comme dual d'un espace de Fréchet réflexif [2], a la topologie localement convexe la plus fine compatible avec ses parties bornées, donc la topologie de $(\mathcal{E}')$ est plus fine que la topologie limite inductive, et ces deux topologies sont bien identiques.

On peut naturellement étendre le procédé utilisé au début de ce paragraphe. Pour une distribution T et une fonction φ indéfiniment dérivable quelconques, on pourra toujours définir $T(\varphi)$ si le support de T et le support de φ se coupent suivant un compact K_0. On appellera α une fonction $\in (\mathcal{D})$ égale à 1 sur un voisinage compact de K_0, et on posera $T(\varphi) = T(\alpha\varphi)$. Le deuxième membre est indépendant de α ; en effet si α et β sont 2 fonctions $\in (\mathcal{D})$, égales à 1 sur un voisinage compact de K_0, on a (III, 7 ; 1), car le support de $(\alpha - \beta)\varphi$ est contenu dans le support de φ, mais aussi dans le support de $\alpha - \beta$ qui est extérieur à K_0, donc il est extérieur au support de T.

Structure d'une distribution à support compact Nous allons maintenant donner quelques théorèmes sur la structure d'une distribution à support compact, considérée globalement dans l'espace R^n entier.

[1] BOURBAKI [6], fascicule XVIII, proposition 6, page 8

[2] GROTHENDIECK [4], théorème 7, page 73

THÉORÈME XXVI *Toute distribution* T *à support compact* K_0 *peut être, d'une infinité de manières, représentée, dans tout l'espace* R^n, *par la somme d'un nombre fini de dérivées de fonctions continues, ayant leurs supports dans un voisinage arbitraire* U *de* K_0.

En effet, d'après le théorème XXI, si Ω est un voisinage de K_0, dont l'adhérence $\overline{\Omega}$ est compacte et contenue dans U, T est égale dans Ω à une dérivée D^pG d'une fonction continue à support dans U.

On a donc, si φ a son support dans Ω :

$$\text{(III, 7 ; 5)} \quad T(\varphi) = (-1)^{|p|} \iint \ldots \int G D^p\varphi \, dx.$$

Soit $\alpha(x)$ une fonction $\in (\mathcal{D})$, égale à 1 sur un voisinage de K_0, et dont le support soit contenu dans Ω. Pour $\varphi \in (\mathcal{E})$ quelconque, on a

$$\text{(III, 7 ; 6)} \quad T(\varphi) = T(\alpha\varphi) = (-1)^{|p|} \iint \ldots \int G D^p(\alpha\varphi) \, dx.$$

D'après la formule de Leibniz, $D^p(\alpha\varphi)$ est une combinaison linéaire de la forme

$$\text{(III, 7 ; 7)} \qquad D^p\alpha\varphi = \sum_{q \leqslant p} C_p^q D^{p-q}\alpha D^q\varphi.$$

de sorte que

$$\text{(III, 7 ; 8)} \quad T(\varphi) = (-1)^{|p|} \sum_{q \leqslant p} \iint \ldots \int (C_p^q G D^{p-q}\alpha) D^q\varphi \, dx,$$

ou

$$\text{(III, 7 ; 9)} \quad T = \sum_{q \leqslant p} D^q[(-1)^{|q+p|} C_p^q G D^{p-q}\alpha] = \sum_{q \leqslant p} D^q G_q,$$

et les fonctions $G(x)D^{p-q}\alpha(x)$ ont bien leurs supports contenus dans U.

Il résulte de la démonstration utilisée que, pour un ensemble de distributions borné dans $(\mathcal{E})$ ou pour une suite de distributions convergeant vers 0 dans $(\mathcal{E}')$, on peut faire en sorte que p soit fixe, et que les fonctions G_q soient bornées ou convergent uniformément vers 0.

THÉORÈME XXVII *Toute distribution d'ordre* $\leqslant m$ *à support compact* K_0 *est somme finie de dérivées d'ordre* $\leqslant m$ *de mesures, dont les supports peuvent être pris dans un voisinage arbitraire* U *de* K_0 ; *et réciproquement.*

La réciproque est évidente ; démontrons le théorème. Rappelons d'autre part que T est une distribution d'ordre $\leqslant m$ si elle appartient à $(\mathcal{D}'^m)$; il suffit pour cela qu'elle soit d'ordre $\leqslant m$ au voisinage de tout point de K_0. Soit V un ouvert contenant K_0, $\overline{V} \subset U$. A chaque fonction $\varphi \in (\mathcal{E})$ faisons correspondre le système des N_m fonctions continues sur V : $\psi_p = D^p\varphi$, $|p| \leqslant m$. Ce système $\{\psi_p\}$ est déterminé par φ et réciproquement détermine φ sur $\overline{V}$, car $\varphi = \psi_0$. Le système $\{\psi_p\}$ associé à $\varphi \in (\mathcal{E})$ n'est pas n'importe quel système de N_m fonctions continues sur $\overline{V}$; il parcourt, lorsque φ parcourt $(\mathcal{E})$, un sous-espace vectoriel (Δ) de l'espace Γ^{N_m} des systèmes de N_m fonctions continues sur $\overline{V}$. Γ^{N_m} est le produit de N_m espaces isomorphes à l'espace Γ des fonctions continues sur $\overline{V}$. On voit alors que, si T est d'ordre $\leqslant m$, $T(\varphi)$ est une forme linéaire $L(\{\psi_p\})$ de $\{\psi_p\}$, pour $\{\psi_p\} \in (\Delta) \subset \Gamma^{N_m}$. Introduisons dans Γ la topologie de la convergence uniforme sur $\overline{V}$, et sur Γ^{N_m} la topologie produit ; un système de N_m fonctions continues sur $\overline{V}$ convergera vers 0 si toutes ces fonctions convergent uniformément vers 0 sur le compact $\overline{V}$. D'autre part si le système $\{\psi_p\}$ associé à φ converge vers 0 dans Γ^{N_m}, $T(\varphi)$ converge vers 0 ; $L(\{\psi_p\})$ est donc une forme linéaire *continue* sur (Δ). D'après le théorème de Hahn-Banach, elle peut être prolongée en une forme linéaire continue sur Γ^{N_m}. Une forme linéaire continue sur Γ est une mesure μ à support $\subset \overline{V} \subset U$; une forme linéaire continue sur Γ^{N_m} est un système de N_m telles mesures μ_p. On a

$$\text{(III, 7 ; 10)} \quad T(\varphi) = L(\{\psi_p\}) = \sum_p \mu_p(\psi_p) = \sum_p \mu_p(D^p\varphi),$$

ou

$$\text{(III, 7 ; 11)} \qquad T = \sum_p (-1)^{|p|} D^p \mu_p.$$

On pourrait essayer d'améliorer les théorèmes XXVI et XXVII de deux manières :

1° En remplaçant « une somme finie de dérivées... » par « une dérivée d'une fonction (ou d'une mesure) ». On peut le faire mais alors cette fonction ou cette mesure ne pourrait pas en général avoir un support compact, ce qui lui ôterait tout intérêt. Par exemple, pour $n = 1$, la distribution $\delta + \delta'$ est à support compact, on ne peut pas la représenter comme $\frac{d^p}{dx^p}\mu$, μ ayant un support

compact. Car μ, qui doit être un polynome de degré $\leqslant p-1$ en dehors de 0, ne peut être à support compact que si elle est nulle en dehors de 0, auquel cas elle est proportionnelle à δ ; or on ne peut pas avoir $k \frac{d^p}{dx^p} \delta = \delta + \delta'$.

2° En remplaçant « dont les supports sont contenus dans un voisinage arbitraire de K_0 » par « dont les supports sont contenus dans K_0 ». On peut montrer qu'une telle extension est impossible, si K_0 est quelconque. Mais, si K_0 est un compact assez régulier, on peut montrer que, si T est d'ordre $\leqslant m$ et de support $\subset K_0$, elle est somme de dérivées d'ordre $\leqslant m'$ de mesures de supports contenus dans K_0, $m' \geqslant m$ dépendant de la nature de K_0, non de T (Voir théorème XXXIV).

Théorème XXVIII *Si une distribution* T *d'ordre* $\leqslant m$ *a* un *support compact* K_0, $T(\varphi)$ *est nul toutes les fois que* $\varphi \in (\mathcal{E})$ *a toutes ses dérivées d'ordre* $\leqslant m$ *nulles sur* K_0.

Ce théorème est intéressant parce qu'il fait intervenir les valeurs de φ et de ses dérivées, non plus sur un voisinage arbitraire de K_0, mais sur K_0 seulement.

Nous allons montrer que φ est égale, sur des voisinages de K_0, à des fonctions ψ_d, qui convergent vers 0 ainsi que leurs dérivées d'ordre $\leqslant m$, uniformément dans R^n, lorsque d tend vers 0.

Appelons V_d l'ensemble des points dont la *distance* à K_0 est $\leqslant d$. Toutes les dérivées *d'ordre m* de φ sont nulles sur K_0 ; donc, quel que soit $\eta > 0$, elles sont toutes $\leqslant \eta$ en module sur V_d si d est un nombre assez faible. Considérons maintenant, en un point x de V_d, une dérivée d'ordre $< m$; elle peut être obtenue par intégrations successives de ses différentielles, sur un chemin rectiligne allant d'un point x_0 de K_0, à x ; on a en effet, puisque les dérivées d'ordre $\leqslant m$ de φ sont nulles sur K_0 :

$$\text{(III, 7 ; 12)} \quad D^p\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} \left[\frac{\partial}{\partial t_1} D^p\varphi(t)\right] dt_1 + \ldots + \left[\frac{\partial}{\partial t_n} D^p\varphi(t)\right] dt_n$$

pour $|p| < m$.

Et choisissant x_0 de façon que sa distance à x soit $\leqslant d$, on alors, successivement pour $|p| = m-1, m-2, \ldots,$

$$\text{(III, 7 ; 13)} \qquad |D^p\varphi(x)| \leqslant (d\sqrt{n})^{m-|p|}\,\eta$$

pour $x \in V_d$.

Si α est une fonction $\in(\mathcal{D})$, égale à 1 dans un voisinage de K_0, on a, quelle que soit $\varphi \in \mathcal{E}$, $T(\varphi) = T(\alpha\varphi)$. Nous déterminerons α de la façon suivante.

Soit d'abord $\beta_d(x)$ une fonction continue comprise entre 0 et 1, égale à 1 sur $V_{d/2}$, à 0 en dehors de $V_{3d/4}$. Nous allons la régulariser, en utilisant des fonctions $\rho(x)$ définies au théorème I du chapitre I.

Posons

$$\alpha_d = \beta_d * \rho_{d/4}\,; \tag{III, 7 ; 14}$$

α_d est bien $\in(\mathcal{D})$, comprise entre 0 et 1 ; elle est égale à 1 sur $V_{d/4}$, à 0 en dehors de V_d.

Majorons les dérivées successives de α_d :

$$\text{(III, 7 ; 15)}\quad \left\{\begin{aligned} & \qquad D^p\alpha_d = \beta * D^p\rho_{d/4} \\ & \text{d'où} \\ & |D^p\alpha_d| \leqslant \iint \cdots \int |D^p\rho_{d/4}|\,dx \\ & \qquad = \iint \cdots \int \frac{1}{\left(\frac{d}{4}\right)^n} \frac{1}{\left(\frac{d}{4}\right)^{|p|}} \left|D^p\rho_1\left(\frac{x}{d/4}\right)\right| dx \\ & \qquad = \left(\frac{4}{d}\right)^{|p|} \iint \cdots \int |D^p\rho_1(x)|\,dx. \end{aligned}\right.$$

Finalement, comme $|p| \leqslant m$, il existe une constante universelle C_m telle que

$$|D^p\alpha_d| \leqslant \frac{C_m}{d^{|p|}}. \tag{III, 7 ; 16}$$

Si alors on pose $\psi_d = \alpha_d\varphi$, on peut majorer les dérivées successives de ψ_d, en utilisant la formule de Leibniz.

$$D^p\psi_d = \sum_{q \leqslant p} C_p^q (D^{p-q}\,\alpha_d)\,D^q\varphi\,, \tag{III, 7 ; 17}$$

ou, pour $|p| \leqslant m$, compte tenu de (III, 7 ; 13 et 16),

$$|D^p\psi_d| \leqslant C \operatorname*{Sup}_q \frac{1}{d^{|p-q|}}\, d^{m-|q|}\,\eta \leqslant C\,\eta\, d^{m-|p|}\,, \tag{III, 7 ; 18}$$

C dépendant seulement de M.

On a, quel que soit d, $T(\varphi) = T(\alpha_d\varphi) = T(\psi_d)$; mais si d, et par conséquent η, tend vers 0, toutes les dérivées de ψ_d d'ordre $\leqslant m$ convergent uniformément vers 0 d'après (III, 7 : 18), donc, d'après

le théorème XXIV, $T(\psi_d)$ converge vers 0 avec d ; cela prouve alors bien que $T(\varphi) = 0$.

Par contre, il faut bien remarquer que même si des φ_j convergent uniformément vers 0 sur K_0, ainsi que chacune de leurs dérivées, cela n'entraîne nullement que les $T(\varphi_j)$ convergent vers 0 ; il faut pour cela que les φ_j convergent vers 0 ainsi que leurs dérivées *sur un voisinage de* K_0 (Voir théorème XXXIV).

Exemple Considérons la distribution T définie par la formule suivante, sur $R^1 (n = 1)$:

$$(\text{III}, 7 ; 19) \quad T(\varphi) = \lim_{m \to \infty} \left[\left(\sum_{\nu \leqslant m} \varphi\left(\frac{1}{\nu}\right)\right) - m\varphi(0) - (\log m)\varphi'(0) \right].$$

Son support K est compact : il est formé des points $1/\nu$ ($\nu = 1, 2 \ldots$) et de leur limite 0.

Si φ est nulle sur K, on a aussi $\varphi'(0) = 0$ et $T(\varphi) = 0$. Par contre, définissons une fonction $\varphi_j \in (\mathcal{D})$ telle que

$$(\text{III}, 7 ; 20) \qquad \varphi_j(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{j}} & \text{pour} \quad x \geqslant \dfrac{1}{j}, \\ 0 & \text{pour} \quad x \leqslant \dfrac{1}{j+1}. \end{cases}$$

Pour $j \to \infty$, $|\varphi_j| \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{j}}$ converge uniformément vers 0 ; toutes ses dérivées sont nulles sur K. Cependant

$$(\text{III}, 7 ; 21) \qquad T(\varphi_j) = \frac{j}{\sqrt{j}} = \sqrt{j} \to +\infty.$$

§ 8 Structure globale d'une distribution

Dans un ouvert Ω d'adhérence non compacte, en particulier dans R^n, une distribution n'est pas en général une dérivée d'une fonction

$$\left(\text{exemple : } T = \sum_{\nu} \frac{d^\nu}{dx^\nu}(\delta_{(x_\nu)}), \text{ la suite des } x_\nu \text{ tendant vers } +\infty\right).$$

Théorème XXIX *Si* $\{\Omega_\nu\}$ *est un recouvrement, par des ouverts* Ω_ν *de* R^n, *du support* F *d'une distribution* T, *on peut décomposer* T *en une somme infinie convergente, et localement finie,*

(III, 8 ; 1) $$T = \sum_{\nu} T_{\nu},$$

T_{ν} *ayant son support dans l'intersection* $\Omega_{\nu} \cap F$.

Si en effet on ajoute à $\{\Omega_{\nu}\}$ le complémentaire Ω_0 de F, on a un recouvrement de R^n. Soit alors $\{\alpha_{\nu}\}$ une partition de l'unité (théorème II du chapitre I) subordonnée. Posons

(III, 8 ; 2) $$T_{\nu}(\varphi) = T(\alpha_{\nu}\varphi).$$

Bien évidemment $T_0(\varphi) = T(\alpha_0\varphi) = 0$. T_{ν} est une distribution dont le support F_{ν} est contenu dans l'intersection $\Omega_{\nu} \cap F$. Comme

$$\sum_{\nu} \alpha_{\nu}(x) \equiv 1,$$

la somme infinie $\sum\limits_{\nu} T_{\nu}$ (les supports des T_{ν} s'éloignent indéfiniment pour $\nu \to +\infty$), est convergente et $T = \sum\limits_{\nu} T_{\nu}$.

Sauf dans le cas où tout point de F est contenu daus un seul des ouverts Ω_{ν}, il y a une infinité de décompositions (III, 8 ; 1).

Théorème XXX *Toute distribution* T *peut être décomposée en une somme infinie convergente,*

(III, 8 ; 3) $$T = \sum_{j} D^{p_j} G_j,$$

de dérivées de fonctions continues dont les supports sont compacts, s'éloignent indéfiniment, et sont contenus dans un voisinage arbitraire U *du support* F *de* T.

Utilisons en effet le précédent théorème avec des Ω_{ν} relativement compacts. D'après le théorème XXVI chaque distribution T_{ν}, à support compact F_{ν}, peut être décomposée en une somme finie de dérivées de fonctions continues, dont les supports sont contenus dans un voisinage arbitraire de F_{ν}, dans U en particulier. On obtient bien ainsi la formule (III, 8 ; 3).

Théorème XXXI *Si une distribution est d'ordre* $\leqslant m$ *dans un ouvert* Ω, *elle est égale, dans* Ω, *à une somme finie de dérivées d'ordres* $\leqslant m$ *de mesures ; et réciproquement.*

En effet, en reprenant la décomposition (III, 8 ; 1) avec des Ω_{ν} relativement compacts, chaque distribution T_{ν} est d'ordre $\leqslant m$ et à support compact ; alors d'après le théorème XXVII, elle est somme de dérivées d'ordre $\leqslant m$ de mesures,

(III, 8 ; 4) $$T = \sum_{|p| \leqslant m} D^p \mu_{p,\nu} ;$$

en réunissant dans un même terme toutes les dérivées de même indice p on trouve

(III, 8 ; 5) $$\mu_p = \sum_{\nu} \mu_{p,\nu},$$

(III, 8 ; 6) $$T = \sum_{p} D^p \mu_p.$$

Remarque. — Pour n = 1, sur la droite, on peut remplacer la somme finie par un seul terme. Voir corollaire du théorème XXI.

THÉORÈME XXXII *Si* $\{F_\nu\}$ *est un recouvrement fini ou dénombrable de* R^n *par des ensembles fermés, toute distribution* T *admet une décomposition de la forme*

(III, 8 ; 7) $$T = \sum_{\nu} T_\nu,$$

où T_ν *a son support dans* F_ν.

Utilisons en effet la formule (III, 8 ; 3). On peut décomposer chaque fonction G_j en une somme

(III, 8 ; 8) $$G_j = \sum_{\nu} G_{j,\nu}$$

où $G_{j,\nu}$ a son support dans F_ν ($G_{j,\nu}$ sera en général discontinue). On voit que chaque somme (III, 8 ; 8) est convergente faiblement dans L^∞ (parce que les F_ν forment un recouvrement dénombrable), donc dans $(\mathcal{D}')$. On a alors

(III, 8 ; 9) $$T = \sum_{j,\nu} D^{p_j} G_{j,\nu} ;$$

la somme du 2ᵉ membre est convergente, car dans tout ouvert relativement compact elle est somme finie de sommes convergentes. On a donc bien (III, 8 ; 7) avec

(III, 8 ; 10) $$T_\nu = \sum_{j} D^{p_j} G_{j,\nu}.$$

Ce théorème est bien plus fin que le théorème XXIX, qu'il contient comme cas particulier.

Le théorème XXXII pourrait laisser croire que si une distribution T a pour support un ensemble fermé F, et si $\{F_\nu\}$ est un recouvrement localement fini de F par des ensembles fermés, T est une

somme $\sum_\nu T_\nu$, T_ν ayant son support dans F_ν ; *il n'en est rien.* Car les G_j qui interviennent dans la démonstration ont leurs supports contenus, non forcément dans F, mais dans un voisinage arbitraire de F.

On peut montrer que pareille décomposition est possible si le support F est assez régulier. Voir théorème XXXIV.

Théorème XXXIII $T(\varphi)$ *est nul si* φ *est nulle ainsi que toutes ses dérivées sur le support de* T.

Utilisons en effet la formule (III, 8 ; 1). Le support de T_ν est contenu dans le support de T et compact ; φ est alors nulle ainsi que toutes ses dérivées sur le support de T_ν, donc, d'après le théorème XXVIII, $T_\nu(\varphi) = 0$, et par suite $T(\varphi) = 0$.

Si T est d'ordre $\leqslant m$ dans R^n, $T(\varphi)$ est nul quand toutes les dérivées d'ordre $\leqslant m$ de φ sont nulles sur le support de T.

§ 9 Supports réguliers

Nous avons rencontré plusieurs fois dans ce chapitre des propriétés qui font intervenir non pas le support F d'une distribution T, mais un voisinage arbitraire de ce support. Si F est suffisamment « régulier », on peut améliorer ces propriétés et remplacer un voisinage de F par F lui-même.

Nous dirons qu'un ensemble fermé F est régulier si, quel que soit $x \in F$, il existe un nombre $d > 0$, un nombre $\omega \geqslant 0$, et un entier $q \geqslant 1$, tels que deux points quelconques x, x', de F, distants d'au plus d de x_0, puissent être joints par une ligne rectifiable située dans F, dont la longueur soit au plus égale à ω fois la racine q-ième de leur distance :

$$\text{(III, 9 ; 1)} \qquad L \leqslant \omega \, | x' - x |^{1/q}.$$

Pour tout point x_0 de F, nous prendrons toujours la plus petite valeur $q(x_0)$ de q pour laquelle une telle inégalité soit possible. $x_0 \to q(x_0)$ est alors une fonction (à valeurs entières) semi-continue supérieurement. Pour toute partie compacte K de F, nous appellerons $q(K) < +\infty$ la borne supérieure des nombre $q(x_0)$ ainsi affectés aux points x_0 de K.

La notion d'ensemble régulier résulte des travaux de M. Whit-

ney [1]. La propriété fondamentale qu'on peut démontrer pour les ensembles réguliers F est la suivante (propriété W) :

Soit K *un compact de* F, U *un voisinage compact de* K. *Il existe un nombre* k *(dépendant seulement de* F, K, U, m*) ayant la propriété suivante : pour toute fonction* φ, m' *fois continuement différentiable dans* R^n, $m' \geqslant q(K)\, m$, *dont les dérivées d'ordre* $\leqslant m'$ *sont majorées en module par* M *sur* F, *il existe une fonction* ψ, m *fois continuement différentiable dans* R^n, *dont les dérivées d'ordre* $\leqslant m$ *coïncident avec les dérivées correspondantes de* φ *sur* K, *et sont majorées en module par* kM *sur* U.

Remarquons qu'un ensemble fermé convexe est régulier. Un ensemble régulier est localement connexe par arcs, et n'a qu'un nombre fini de composantes connexes par arcs rencontrant un compact quelconque.

La condition de régularité qui sera suffisante pour que le théorème suivant s'applique, n'est peut-être pas nécessaire ; en tout cas l'ensemble formé de 2 courbes ayant en un point un contact d'ordre infini, ensemble irrégulier au point de contact, met en défaut, comme on le voit aisément, chacune des propriétés qui vont suivre, et que nous laissons au lecteur le soin de montrer :

THÉORÈME XXXIV. — 1° *Si une distribution* T *d'ordre* m *a un support compact régulier* K_0, *et si* $m' \geqslant q(K_0)\, m$, *alors* $T(\varphi_j)$ *converge vers* 0 *dès que les* $\varphi_j \in \mathcal{E}$ *convergent uniformément vers* 0 *ainsi que leurs dérivées d'ordre* $\leqslant m'$ *sur le compact* K_0 (Voir théorème XXIV).

2° *Toute distribution portée par un ensemble fermé régulier* F_0 *peut être décomposée en somme infinie convergente (somme finie si* F_0 *est compact) de dérivées de mesures portées par* F_0

(III, 9 ; 2) $$T = \sum_j D^{p_j} \mu_j$$

(voir les théorèmes XXVII et XXX).

3° *Si* F *est un ensemble régulier, si* $\{ F_\nu \}$ *est un recouvrement fini ou dénombrable de* F *par des ensembles fermés, toute distribution* T

(1) WHITNEY [3]. La propriété P de M. WHITNEY n'est pas tout à fait celle qui est indiquée ici, et ne correspond pas exactement au même problème. L'énoncé de la propriété W dans la 1re édition de ce livre était erroné, car il était global au lieu de local, alors que $q(x_0)$ n'est pas nécessairement borné pour $x_0 \in F$. Les propriétés de ce § 9 sont étudiées de façon plus détaillée dans un travail de M. GLAESER, à paraître prochainement

portée par F *peut être décomposée en une somme finie ou infinie convergente*

(III, 9 ; 3) $$T = \sum_{\nu} T_\nu,$$

où T_ν *a son support dans* F_ν (voir théorème XXXII).

§ 10 Structure des distributions dont le support est contenu dans une sous-variété

Distributions à support ponctuel.

Théorème XXXV *Toute distribution dont le support est l'origine admet une décomposition unique comme combinaison linéaire finie de dérivées de la mesure de Dirac :*

(III, 10 ; 1) $$T = \sum_{|p| \leqslant m} c_p D^p \delta\,;$$

c_p = *constantes complexes.*

En effet, l'origine est un support régulier, il suffit donc d'appliquer le théorème XXXIV, 2° ; toute mesure ayant pour support l'origine est proportionnelle à la mesure de Dirac.

Mais on peut donner une démonstration ne faisant pas appel à la théorie fine de M. Whitney, en utilisant le théoréme XXVIII. Si T est d'ordre $\leqslant m$, $T(\varphi)$ est nul dès que φ est nulle ainsi que ses dérivées d'ordre $\leqslant m$ à l'origine. Pour $\varphi \in (\mathcal{E})$, on a

(III, 10 ; 2) $$\varphi = \sum_{|p| \leqslant m} \frac{x^p}{p\,!} D^p\varphi(0) + R_m(x),$$

R_m ayant toutes ses dérivées d'ordre $\leqslant m$ nulles en 0. Alors $T(R_m) = 0$, et par suite

(III, 10 ; 3) $$T(\varphi) = \sum_{|p| \leqslant m} \frac{D^p\varphi(0)}{p\,!} T(x^p) = \sum_{|p| \leqslant m} (-1)^{|p|} c_p D^p\varphi(0),$$

ce qui est équivalent à (III, 10 ; 1).

La décomposition est unique. Car si $T = 0$, on doit avoir $T(x^p) = 0$, ce qui, dans une formule telle que (III, 10 ; 1), donne $c_p = 0$.

Nous allons généraliser cette formule :

Distributions dont le support est un sous-espace vectoriel de R^n.

Pour simplifier les notations, nous considérerons R^n comme un produit $X^h \times Y^k$, $h + k = n$, et représenterons un point de R^n par

(x, y), où $x = \{ x_1, x_2, \ldots, x_h \} \in X^h$, et $y = \{ y_1, y_2, \ldots, y_k \} \in Y^k$. Nous allons chercher l'expression générale d'une distribution T sur R^n portée par le sous-espace vectoriel $X^h \times 0$ des points $(x, 0)$. T_x, T_y, $T_{x,y}$ désigneront respectivement des distributions sur X^h, Y^k, R^n.

D'après les indications du § 5 (3°) du chapitre I, la restriction φ à X^h d'une fonction $\overline{\varphi}(x, y) \in (\mathcal{D})_{R^n}$, est la fonction $\varphi(x) = \overline{\varphi}(x, 0)$; l'extension $\overline{T}$ à R^n d'une distribution T sur X^h est définie, pour $\varphi \in (\mathcal{D})_{R^n}$, par

$$\text{(III, 10 ; 4)} \qquad \overline{T}_{x,y} \cdot \varphi(x, y) = T_x \cdot \varphi(x, 0).$$

Dans la suite, q désignera un indice de dérivation $q = \{ q_1, q_2, \ldots, q_k \}$ par rapport aux variables y ; c'est ce que nous appellerons une dérivation *transversale* par rapport au sous-espace vectoriel $X^h \times 0$.

Théorème XXXVI *Toute distribution $T_{x,y}$, dont le support est contenu dans le sous-espace vectoriel $X^h \times 0$, admet une décomposition unique comme combinaison linéaire localement finie de dérivées transversales d'extensions à R^n de distributions définies sur X^h :*

$$\text{(III, 10 ; 5)} \quad T_{x,y} = \sum_q D_y^q (\overline{T}_q)_{x,y}, \qquad (T_q)_x \in (\mathcal{D}')_{X^h}.$$

Les supports des T_q sont contenus dans celui de T.

Chacune des distributions T_q dépend continûment de T.

Supposons en effet la décomposition (III, 10 ; 5) possible ; elle est alors unique, car si nous posons $\varphi_q(x, y) = \psi(x) \dfrac{y^q}{q}$, $\psi \in \mathcal{D}_x$ (le support de φ_q coupe ceux de T et des $\overline{T}_q$ suivant des compacts), on trouve

$$\text{(III, 10 ; 6)} \quad T_{x,y} \cdot \varphi_q(x, y) = (-1)^{|q|} (T_q)_x \cdot \psi(x),$$

ce qui détermine entièrement T_q. Réciproquement les T_q déterminés par cette formule dépendent continûment de T, et ont leurs supports contenus dans celui de T ; dans tout ouvert relativement compact Ω où T est d'ordre m, les T_q sont nulles pour $|q| > m$ puisqu'alors φ_q a ses dérivées d'ordre $\leqslant m$ nulles sur le support de T (théorème XXVIII) ; enfin pour toute $\varphi(x, y) \in \mathcal{D}_{x,y}$ à support dans Ω, on a

$$\text{(III, 10 ; 7)} \quad \varphi(x, y) = \sum_{|q| \leqslant m} \frac{y^q}{q!} D_y^q \varphi(x, 0) + R_m(x, y),$$

d'où

$$(\text{III}, 10\,;\,8)\qquad \mathrm{T}\,.\,\varphi = \sum_{|q|\leqslant m} \mathrm{D}_y^q(\overline{\mathrm{T}}_q)_{x,y}\,.\,\varphi + \mathrm{T}\,.\,\mathrm{R}_m,$$

ce qui est bien équivalent à (III, 10 ; 5) puisque $\mathrm{T}_q = 0$ pour $|q| > m$ et $\mathrm{T}.\ \mathrm{R}_m = 0$.

Une distribution telle que $\mathrm{D}_y^q\overline{\mathrm{T}}_q$ est ce qu'on peut appeler une couche multiple d'ordre $|q| + 1$.

Distribution portée par une sous-variété indéfiniment différentiable U^h *régulièrement plongée dans une variété indéfiniment différentiable* V^n

Nous supposerons définies, au voisinage de U^h dans V^n, $k = n - h$ dérivations du premier ordre « transversales et indépendantes par rapport à U^h », $\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_k$, ayant de plus la propriété de commuter deux à deux (leurs crochets sont nuls). On peut alors *localement* amener V^n sur R^n, U^h sur X^h, tandis que les ∂ deviennent les dérivations $\dfrac{\partial}{\partial y_1}, \dfrac{\partial}{\partial y_2}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial y_k}$. En posant alors $\partial^q = \partial_1^{q_1}\partial_2^{q_2}\ldots\partial_k^{q_k}$, on aura, par changement de variables (le théorème se démontrant localement) :

Théorème XXXVII *Toute distribution* T *dont le support est contenu dans la variété* U^h *admet une décomposition unique en combinaison linéaire localement finie de dérivées transversales d'extensions à* V^n *de distributions définies sur* U^h :

$$(\text{III}, 10\,;\,9)\qquad \mathrm{T} = \sum_q \partial^q \overline{\mathrm{T}}_q\,;\quad \mathrm{T}_q \in (\mathcal{D}')_{\mathrm{U}^h}.$$

Exemple $\mathrm{V}^n = \mathrm{R}^n$; $\mathrm{U}^h = \mathrm{S}^{n-1}$, sphère d'équation $r = 1$; $\partial = \partial/\partial r$; pour toute distribution T portée par S^{n-1} on aura une décomposition unique, finie :

$$(\text{III}, 10\,;\,10)\qquad \mathrm{T} = \sum_{|q|\leqslant m} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^q \mathrm{T}_q.$$

Si maintenant T est une distribution portée par la réunion de plusieurs sous-variétés ayant des contacts d'ordre fini, le théorème XXXIV (3°) permet de la décomposer en somme de distributions portées par les diverses sous-variétés, d'où son expression générale ; mais sans unicité, car toute distribution portée par

l'intersection de deux sous-variétés peut être indifféremment supportée par l'une ou l'autre. Nous n'abordons pas ici ce problème de façon détaillée; il est délicat, et fait l'objet de travaux de Lojasiewicz [1], en relation avec le problème de la division [1].

Il pourra arriver qu'on ne parvienne pas à trouver des dérivations ∂ définies sur tout un voisinage de U^h dans V^n. Généralement ce sera aisé localement, on aura alors seulement des formules (III, 10 ; 9) locales. On voit immédiatement, par les formules du changement de variables, que, sur un ouvert, le plus grand des ordres $|q|$ des $T_q \neq 0$ est indépendant des dérivations choisies. On pourra l'appeler l'ordre transversal de T. Une distribution d'ordre transversal $\leqslant m$ est ce qu'on peut aussi appeler, en utilisant le formalisme de la théorie du potentiel, une « couche multiple d'ordre $\leqslant m+1$ portée par U^h ».

[1] Voir aussi SCHWARTZ [16], exposé 21 par MALGRANGE

Produits tensoriels de distributions

SOMMAIRE Le but de ce chapitre est de définir le produit tensoriel [1] de 2 distributions, qui généralise le produit tensoriel de 2 mesures. Si S_x et T_y sont 2 distributions, respectivement sur les espaces vectoriels X^m, Y^n, à m et n dimensions, $S_x \otimes T_y$ est une distribution sur l'espace vectoriel $X^m \times Y^n$; si $S_x = f(x)$, $T_y = g(y)$, sont des fonctions, $S_x \otimes T_y$ est la fonction $f(x)\ g(y)$.

Le § 1 étudie la variation de $T(\varphi)$ lorsque φ dépend d'un paramètre λ. Il étend des résultats connus sur la continuité ou la dérivabilité des intégrales dépendant d'un paramètre.

Les §§ 2, 3, définissent le produit tensoriel par la formule

$$S_x \otimes T_y \cdot \varphi(x, y) = S(u)\ T(v)$$

si $\varphi(x, y) = u(x)\ v(y)$ (IV, 3 ; 1) ; le § 4 en donne les propriétés essentielles. Tout est de caractère très élémentaire, sauf la démonstration de la continuité (théorème VI, p. 110) ; mais on peut la plupart du temps se contenter de l'hypocontinuité qui est immédiate.

Le § 5 donne quelques exemples faciles.

Le principal intérêt de ce chapitre, qu'on peut parcourir rapidement, se trouvera dans la définition du produit de convolution (chapitre VI, § 2).

§ 1 INTÉGRALES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE

Position du problème Ce paragraphe étend aux distributions des théorèmes classiques sur les intégrales de fonctions dépendant d'un paramètre.

Soit $x = \{ x_1, x_2, \ldots, x_n \} \in R^n$, $\varphi(x ; \lambda)$ une fonction de x et d'un paramètre λ parcourant un espace topologique Λ, telle que, pour toute valeur de ce paramètre, φ, considérée comme fonction de $x \in R^n$, soit dans $(\mathcal{D})$. Si T est une distribution fixe sur R^n, alors la quantité

$$\text{(IV, 1 ; 1)} \qquad I(\lambda) = T(\varphi),$$

[1] Ce qui dans la première édition était appelé produit direct et noté $\times$ est appelé ici produit tensoriel et noté $\otimes$

bien définie pour chaque valeur de λ, est une intégrale généralisée dépendant du paramètre λ et qu'il y a lieu d'étudier. Pour bien marquer que, dans le calcul de $T(\varphi)$, φ est considérée comme fonction de x seul, T étant une distribution définie sur l'espace R^n que parcourt la variable x, nous écrirons

$$I(\lambda) = T_x[\varphi(x;\lambda)]. \tag{IV, 1 ; 2}$$

Continuité par rapport au paramètre THÉORÈME I *Si, lorsque λ parcourt un voisinage convenable de λ_0, φ a son support contenu dans un compact fixe de R^n, si d'autre part chacune des dérivées partielles* $D^p\varphi(x;\lambda)$ *(dérivée par rapport aux variables x_1, x_2, ..., x_n) est continue par rapport à l'ensemble des variables x et λ, alors* $T_x.\varphi(x;\lambda)$ *est continue en λ au voisinage de $\lambda = \lambda_0$.*

En effet, $D^p\varphi(x;\lambda)$ étant continue en x et λ, est continue en λ uniformément par rapport à x lorsque x parcourt un compact. Alors $\varphi(x;\lambda)$, dans l'espace topologique $(\mathcal{D})_x$, dépend continûment de λ, et T_x est une forme linéaire *continue* sur $(\mathcal{D})_x$, d'où la conclusion.

Différentiabilité THÉORÈME II *Si λ est un paramètre réel ou complexe, si, lorsque λ parcourt un voisinage convenable de λ_0, φ a son support contenu dans un compact fixe de* R^n, *si enfin chaque dérivée* $D^p\varphi(x;\lambda)$ *admet une dérivée partielle (au sens usuel) en λ,* $\frac{\partial}{\partial\lambda}D^p\varphi(x;\lambda)$, *continue par rapport à l'ensemble des variables* $x \in R^n$ *et λ, alors* $I(\lambda) = T_x.\varphi(x;\lambda)$ *est dérivable (au sens usuel) par rapport à λ au voisinage de $\lambda = \lambda_0$, et sa dérivée s'obtient par dérivation sous le signe « d'intégration » :*

$$\frac{dI}{d\lambda} = T_x\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(x;\lambda)\right). \tag{IV, 1 ; 3}$$

En effet

$$\frac{I(\lambda+d\lambda)-I(\lambda)}{d\lambda} - T_x\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(x;\lambda)\right) = T_x\left[\frac{\varphi(x;\lambda+d\lambda)-\varphi(x;\lambda)}{d\lambda} - \frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(x;\lambda)\right] \tag{IV, 1 ; 4}$$

Lorsque $d\lambda \to 0$, la fonction entre crochets tend vers 0 uniformément par rapport à x, sur tout compact de R^n, en vertu de la continuité de $\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi(x;\lambda)$; de même la dérivée D^p de la fonction de x entre crochets tend vers 0 sur tout compact de R^n, en raison de la conti-

nuité de $D^p \frac{\partial}{\partial\lambda} \varphi(x\,;\,\lambda)$; comme la fonction de x entre crochets a son support contenu dans un compact fixe de R^n, elle converge vers 0 dans $(\mathcal{D})$, et en vertu de la continuité de la forme linéaire T, le 2e membre converge bien vers 0 quand $d\lambda$ tend vers 0.

Naturellement le théorème II est encore vrai dans le cas de plusieurs paramètres, et de dérivations partielles par rapport à ces paramètres. Le cas que nous utiliserons sera le suivant :

λ est un point $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m\}$ d'un espace vectoriel V^m de dimension m. $\varphi(x\,;\,\lambda)$ est indéfiniment dérivable (au sens usuel) par rapport aux variables x et λ, chaque dérivée étant continue par rapport à l'ensemble des 2 variables x et λ. Alors $I(\lambda) = T_x[\varphi(x\,;\,\lambda)]$ est indéfiniment dérivable en λ (au sens usuel) ; si ∂_λ^q est un symbole de dérivation partielle dans Λ^m $\left(\partial_\lambda^q = \frac{\partial^{q_1+q_2+\ldots+q_m}}{\partial\lambda_1^{q_1}\partial\lambda_2^{q_2}\ldots\partial\lambda_m^{q_m}}\right)$, on peut dériver sous le signe d'intégration :

$$\text{(IV, 1 ; 5)} \qquad \partial_\lambda^q\, T_x[\varphi(x\,;\,\lambda)] = T_x[\partial_\lambda^q\, \varphi(x\,;\,\lambda)]\,.$$

§ 2 Produit tensoriel de 2 distributions

Soient X^m, Y^n, 2 espaces vectoriels de dimensions respectives m et n ; $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ sera un point du premier, $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ un point du deuxième. Si $f(x)$ est une fonction numérique sur X^m, $g(y)$ une fonction numérique sur Y^n, ce que nous appelons leur produit tensoriel $f(x) \otimes g(y)$ est la fonction $h(x, y) = f(x)\, g(y)$ des variables x, y, définie sur l'espace vectoriel produit $X^m \times Y^n$. Le produit tensoriel d'une fonction des m variables réelles $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et d'une fonction des n variables réelles $y_1, y_2, \ldots, y_n$, est donc une fonction des $m + n$ variables réelles $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Si en particulier $f(x)$ et $g(y)$ sont des fonctions au sens de la théorie des distributions, c'est-à-dire des fonctions sommables sur tout compact, définies presque partout, il en est de même de leur produit tensoriel.

On définit aussi aisément le produit tensoriel de 2 mesures, μ_x sur X^m, ν_y sur Y^n. La définition est classique en calcul des probabilités : si x est un point aléatoire dans l'espace X^m, dont la loi de répartition est définie par la mesure μ_x sur X^m (μ_x est alors une mesure $\geqslant 0$ et $\iint\ldots\int d\mu_x = +1$), si de même y est un point aléatoire

dans l'espace Y^n, dont la loi de répartition est définie par la mesure $\nu_y \left(\nu_y \geqslant 0, \iint \ldots \int d\nu_y = +1\right)$, le couple (x, y) des 2 points aléatoires est un nouveau point aléatoire dans l'espace vectoriel produit $X^m \times Y^n$, dont la loi de répartition est définie par la mesure produit $\mu_x \otimes \nu_y$. [1].

Pour pouvoir étendre de tels produits et définir $S_x \otimes T_y$, S_x et T_y étant 2 distributions quelconques respectivement sur X^m et Y^n, il faut exprimer le produit tensoriel de 2 fonctions ou de 2 mesures comme une fonctionnelle. Appelons $(\mathcal{D})_x$, $(\mathcal{D})_y$, $(\mathcal{D})_{x,y}$ les espaces $(\mathcal{D})$ de fonctions indéfiniment dérivables à support compact sur X^m, Y^n, $X^m \times Y^n$ respectivement ; $(\mathcal{D}')_x$, $(\mathcal{D}')_y$, $(\mathcal{D}')_{x,y}$ les espaces de distributions $(\mathcal{D}')$ correspondants. Il nous faut, pour définir

$$W_{x,y} = S_x \otimes T_y \in (\mathcal{D}')_{x,y} ,$$

connaître pour chaque fonction $\varphi(x, y) \in (\mathcal{D})_{x,y}$ la valeur de la fonctionnelle $S_x \otimes T_y [\varphi(x, y)]$, de manière que, si S_x et T_y sont 2 mesures μ_x, ν_y, ou 2 fonctions $f(x)$, $g(y)$, on retrouve

$$\text{(IV, 2 ; 1)} \begin{cases} \mu_x \otimes \nu_y [\varphi(x, y)] = \iint \ldots \int . \iint \ldots \int \varphi(x, y)\, d\mu_x d\nu_y \\ f_x \otimes g_y [\varphi(x, y)] = \iint \ldots \int . \iint \ldots \int \varphi(x, y) f(x)\, g(y)\, dx dy. \end{cases}$$

Bornons-nous à considérer le cas particulier des fonctions $\varphi(x, y) \in (\mathcal{D})_{x,y}$ qui sont des produits de la forme

$$\text{(IV, 2 ; 2)} \quad \varphi(x, y) = u(x)\, v(y) , \quad u(x) \in (\mathcal{D})_x , \quad v(y) \in (\mathcal{D})_y .$$

Dans le cas de 2 mesures ou de 2 fonctions, les formules (IV, 2 ; 1) donnent immédiatement

$$\text{(IV, 2 ; 3)} \begin{cases} \mu_x \otimes \nu_y \ [\mathrm{u}(x)\, v(y)] = \mu(u) \nu(v) \\ f_x \otimes g_y \ [\mathrm{u}(x)\, v(y)] \\ \quad = \iint \ldots \int f(x)\, \mathrm{u}(x)\, dx . \iint \ldots \int g(y)\, v(y)\, dy = f(u)\, g(v). \end{cases}$$

Nous sommes donc amenés à poser

$$\text{(IV, 2 ; 4)} \qquad W_{x,y} \ [u(x) v(y)] = S(\mathrm{u})\, T(v).$$

La valeur de la forme linéaire W sera alors connue toutes les fois que $\varphi(x, y)$ sera de la forme (IV, 2 ; 2) et aussi toutes les fois qu'elle sera somme de fonctions de la forme (IV, 2 ; 2) en nombre fini :

$$\text{(IV, 2 ; 5)} \quad \varphi(x, y) = \sum_j u_j(x)\, v_j(y) \, ; \, \mathrm{u}_j \in (\mathcal{D})_x, \ v_j \in (\mathcal{D})_y ,$$

[1] Voir Bourbaki [7], chapitre III, § 5

car on devra avoir :

$$\text{(IV, 2 ; 6)} \qquad W\Big(\sum_j u_j(x)\, v_j(y)\Big) = \sum_j S(u_j)T(v_j).$$

Nous allons démontrer qu'il existe une distribution bien déterminée et unique satisfaisant à (IV, 2 ; 4), qui pourra être appelée produit $S_x \otimes T_y$. Dans le cas de 2 mesures ou de 2 fonctions, W coïncidera bien avec leur produit tensoriel défini par (IV, 2 ; 1) en vertu de (IV, 2 ; 3) et de l'unicité de W.

Les résultats de ce chapitre s'étendent sans modification au produit tensoriel de deux distributions définies sur deux variétés U^m, V^n ; *c'est une distribution sur* $U^m \times V^n$.

§ 3 Unicité, existence, calcul du produit tensoriel

Un théorème d'approximation. Unicité du produit tensoriel

Théorème III *Dans* $(\mathcal{D})_{x,y}$, *le système des* $u(x)v(y)$ *est total ; autrement dit le sous-espace vectoriel des fonctions* $\varphi(x, y)$ *de la forme* (IV, 2 ; 5) $\varphi(x, y) = \sum_j u_j(x)\, v_j(y)$ *est dense dans* $(\mathcal{D})_{x,y}$ (1).

Ce théorème entraîne l'unicité de la distribution W vérifiant (IV, 2 ; 4), si W existe. Car W, vérifiant (IV, 2 ; 4), vérifie (IV, 2 ; 6) ; la valeur de $W_{x,y}.\ \varphi(x, y)$ est alors connue lorsque φ parcourt un sous-espace dense de $(\mathcal{D})_{x,y}$, donc pour $\varphi \in (\mathcal{D})_{x,y}$ quelconque. Plus généralement une distribution quelconque sur $X^m \times Y^n$ sera connue si on connaît ses valeurs pour $\varphi(x, y)$ de la forme (IV, 2 ; 2).

Nous allons donner du théorème une démonstration qui manque de profondeur et de généralité mais qui est rapide et qui nous sera suffisante. On peut trouver une suite de polynomes

$$P_\nu(x_1, x_2 \ldots x_m, y_1, y_2, \ldots y_n) = P_\nu(x, y)$$

qui convergent uniformément sur tout compact vers $\varphi(x, y)$ et dont chaque dérivée converge uniformément sur tout compact vers la dérivée correspondante de φ. Un polynome est bien de la forme $\sum u_j(x)v_j(y)$, mais les u_j et v_j, monômes, ne sont pas à support compact. Si $\rho(x)$ et $\sigma(y)$ sont des fonctions fixes indéfiniment déri-

(1) C'est l'analogue d'un théorème bien connu pour les fonctions continues, utilisé pour l'étude du produit des mesures. Voir par exemple Dieudonné [4] et Bourbaki [8], théorème 4, page 57

vables à supports compacts, telles que $\rho(x)\,\sigma(y)$ soit $\equiv 1$ sur le support de φ, alors les $\rho(x)\sigma(y)\,P_\nu(x, y)$ sont de la forme (IV, 2 ; 5), et convergent dans $(\mathcal{D})_{x,y}$ vers $\rho(x)\,\sigma(y)\,\varphi(x, y) \equiv \varphi(x, y)$, c. q. f. d.

Existence et calcul du produit tensoriel THÉORÈME IV *Il existe une distribution* $W_{x,y} \in (\mathcal{D}')_{x,y}$, *bien déterminée et unique, qui satisfait à*

$$\text{(IV, 3 ; 1)} \qquad W[u(x)v(y)] = S(u)T(v).$$

On l'appelle produit tensoriel des distributions $S_x \in (\mathcal{D}')_x$, $T_y \in (\mathcal{D}')_y$, et *on la note* $S_x \otimes T_y$. *Pour* $\varphi(x, y) \in (\mathcal{D})_{x,y}$, *on peut calculer* $W(\varphi)$ *par plusieurs intégrations simples successives* (*théorème de Fubini*) :

$$\text{(IV, 3 ; 2)} \quad S_x \otimes T_y[\varphi(x, y)] = S_x\,[T_y(\varphi(x, y))] = T_y[S_x(\varphi(x,y))].$$

Considérons en effet $\varphi(x, y)$ comme une fonction sur X^m, dépendant du paramètre $y \in Y^n$. Pour y fixe, c'est une fonction de x, appartenant à $(\mathcal{D})_x$, on peut donc définir l'intégrale $I(y) = S_x\,[\varphi(x, y)]$, dont la valeur est fonction du paramétre y. D'après les résultats du § 1, comme φ est indéfiniment dérivable par rapport aux variables x, y, et de support contenu dans un compact de $(\mathcal{D})_x$ indépendant de y,

$$\text{(IV, 3 ; 3)} \qquad I(y) = S_x[\varphi(x, y)]$$

est une fonction indéfiniment dérivable de y ; d'autre part elle est, considérée comme fonction de y, à support compact, donc dans $(\mathcal{D})_y$. On peut donc calculer

$$\text{(IV, 3 ; 4)} \qquad T_y[I(y)] = T_y\,[S_x(\varphi(x, y))].$$

Enfin, toujours d'après les résultats du § 1, on voit aisément que si φ converge vers 0 dans $(\mathcal{D}_K)_{x,y}$, $I(y)$ converge vers 0 dans $(\mathcal{D}_{K_1})_y$, où K_1 est la projection de K sur l'espace Y^n, donc $T_y[I(y)]$ converge vers 0. Donc $T_y\,[I(y)]$ définit une forme linéaire continue sur tout $(\mathcal{D}_K)_{x,y}$, soit une distribution $W_{x,y} \in (\mathcal{D}')_{x,y}$.

Cette distribution vérifie évidemment

$$\begin{aligned}\text{(IV, 3 ; 5)} \qquad W[u(x)v(y)] &= T_y\,[S_x(u(x)v(y))] \\ = T_y\,[v(y)S_x(u(x))] = T_y\,[S(u)v(y)] &= S(u)T_y\,[v(y)] = S(u)T(v),\end{aligned}$$

c'est-à-dire l'égalité (IV, 3 ; 1). Nous avons donc trouvé une distribution vérifiant (IV, 3 ; 1) ; le théoréme III nous a prouvé qu'il ne pouvait en exister plus d'une. Naturellement les intégrations succes-

sives S_xT_y, T_yS_x, donnent le même résultat, car elles donnent 2 distributions vérifiant chacune (IV, 3 ; 1).

§ 4 Propriétés du produit tensoriel

Support Théorème V *Le support du produit tensoriel est identique au produit des supports.*

Autrement dit $(x, y) \in X^m \times Y^n$ appartient au support de $S_x \otimes T_y$ si et seulement si x appartient au support A de S_x et y au support B de T_y. La connaissance locale de S_x et de T_y entraîne la connaissance locale de $S_x \otimes T_y$. Démonstration immédiate : si φ a son support dans $\complement A \times Y^n$ ou dans $X^m \times \complement B$, $W(\varphi) = 0$ d'après (IV, 3 ; 2) ; donc le support de W est dans $A \times B$. Et au voisinage de tout point de $A \times B$, W est $\neq 0$ d'après (IV, 3 ; 1).

Continuité. — Théorème VI. — *La transformation qui, au couple* $S_x \in (\mathcal{D}')_x$, $T_y \in (\mathcal{D}')_y$, *fait correspondre* $S_x \otimes T_y \in (\mathcal{D}')_{x,y}$, *est une application bilinéaire fortement continue. La propriété est aussi vraie avec les espaces* $(\mathcal{E}')$ *au lieu de* $(\mathcal{D}')$.

On voit de suite que c'est une application bilinéaire. On voit aussi facilement que si S_x et T_y varient en restant bornées, $S_x \otimes T_y$ reste bornée. Si S_x est fixe ou même varie en restant bornée dans $(\mathcal{D}')_x$, et si T_y converge fortement vers 0 dans $(\mathcal{D}')_y$, $S_x \otimes T_y$ converge fortement vers 0 dans $(\mathcal{D}')_{x,y}$. Autrement dit, l'application bilinéaire est *hypocontinue* (Voir théorème XI du chapitre III). Mais nous allons montrer plus. Elle est continue : si S_x et T_y convergent chacune fortement vers 0 (ce qui, dans le cas de filtres, n'entraîne pas qu'elles soient bornées), $S_x \otimes T_y$ converge fortement vers 0. Montrons d'abord un lemme :

Lemme *Si* $\{B_\nu\}$ *est une famille dénombrable d'ensembles bornés dans* $(\mathcal{D})$, *formés de fonctions* φ *ayant toutes leur support contenu dans un compact fixe* K *de* R^n, *il existe un voisinage* U *de* 0 *dans* $(\mathcal{D}')$ *tel que, pour tout* ν, $T(B_\nu) = \underset{\varphi \in B_\nu}{\operatorname{Max}} |T(\varphi)|$ *reste bornée lorsque* T *parcourt* U.

En effet l'ensemble B_ν (ν fixe) peut être défini par une suite $\{M_\nu\}$ de nombres réels > 0, $M_{p,\nu}$, dépendant de l'indice p, telle que, pour $\varphi \in B_\nu$

$$\text{(IV, 4 ; 1)} \qquad |D^p \varphi| \leqslant M_{p,\nu}.$$

Les suites $\{M_\nu\}$ forment, lorsque ν varie, une famille dénombrable de suites ; donc, d'après un théorème classique de Dubois-Rey-

mond, il existe une suite unique $\{ M \}$, de nombres réels > 0, M_p, dépendant de l'indice p, qui « croît plus rapidement, pour $p \to \infty$, que toute suite $\{ M_\nu \}$ ». Autrement dit, pour chaque valeur de ν, la suite $\{ M \}$ majore la suite $\{ M_\nu \}$ à un nombre fini de termes près; il existe alors un nombre > 0, k_ν, dépendant de ν, tel que

$$\text{(IV, 4 ; 2)} \qquad \{ M_\nu \} \leqslant k_\nu \{ M \} \quad \text{ou} \quad M_{p,\nu} \leqslant k_\nu M_p.$$

Considérons alors l'ensemble borné B de $(\mathcal{D})$ formé des fonctions φ à support contenu dans K, et vérifiant, pour tout p,

$$\text{(IV, 4 ; 3)} \qquad |D^p \varphi| \leqslant M_p.$$

On voit d'après (IV, 4 ; 1) que

$$\text{(IV, 4 ; 4)} \qquad B_\nu \subset k_\nu B \text{ (}^1\text{)}.$$

Si alors U est le voisinage de 0 dans $(\mathcal{D}')$ formé des distributions T vérifiant $T(B) \leqslant 1$, on a, pour $T \in U$:

$$\text{(IV, 4 ; 5)} \qquad T(B_\nu) \leqslant k_\nu T(B) \leqslant k_\nu$$

c. q. f. d.

Avec l'aide de ce lemme, le théorème VI se démontre aisément.

Supposons que $\varphi(x, y)$ parcoure un ensemble borné quelconque $B_{x,y}$ de $(\mathcal{D})_{x,y}$. Considérons $\varphi(x, y)$ comme fonction de x seul, pour une valeur fixe du paramètre y ; on voit immédiatement que φ parcourt alors un ensemble borné $B_{x,(0)}$ de $(\mathcal{D})_x$, indépendant du paramètre y. De même, D^q_y étant un symbole de dérivation partielle en y, $D^q_y\, \varphi(x, y)$ parcourt un ensemble borné $B_{x,(q)}$ de $(\mathcal{D})_x$ indépendant du paramètre y. Alors, d'aprés le lemme, il existe un voisinage U_x de 0 dans $(\mathcal{D}')_x$, et une suite de nombres $k_q > 0$, tels que, pour $S_x \in U_x$,

$$\text{(IV, 4 ; 6)} \qquad |S_x\, [D^q_y\, \varphi(x, y)]| \leqslant k_q.$$

Donc la fonction de y, $I(y) = S_x[\varphi(x, y)]$, appartient à $(\mathcal{D})_y$ a son support contenu dans un compact fixe, et vérifie, pour $S_x \in U_x$, $\varphi \in B_{x,y}$:

$$\text{(IV, 4 ; 7)} \qquad |D^q I(y)| \leqslant k_q^*.$$

(1) L'existence d'un ensemble B et d'une suite k_ν, associés à une suite quelconque d'ensembles bornés B_ν, constitue la première condition de dénombrabilité de Mackey. Voir MACKEY [1], p. 182 et DIEUDONNÉ-SCHWARTZ [1], proposition 3, page 69

Autrement dit, $\mathrm{I}(y)$ *reste bornée dans* $(\mathcal{D})_y$. Alors il existe un voisinage V_y de 0 dans $(\mathcal{D}')_y$ tel que

$$\varphi \in B_{x,y}, \qquad S_x \in U_x, \qquad T_y \in V_y \tag{IV, 4 ; 8}$$

entraîne

$$|S_x \otimes T_y \, . \, \varphi(x, y)| = |T_y \, . \, \mathrm{I}(y)| \leqslant 1 \tag{IV, 4 ; 9}$$

ce qui exprime bien la continuité de l'application bilinéaire [1].

On peut, dans le théorème VI, remplacer les espaces $(\mathcal{D}')$ par des espaces $(\mathcal{E}')$. On s'appuiera alors sur un lemme relatif au couple d'espaces $(\mathcal{E})$, $(\mathcal{E}')$, tout à fait analogue au lemme ci-dessus, mais sans aucune hypothèse sur les supports des $\varphi \in B_\nu$. L'énoncé du théorème VI suppose essentiellement qu'il s'agisse des topologies fortes.

L'application bilinéaire est faiblement discontinue. Avec les topologies faibles, on peut seulement faire les mêmes remarques que pour le théorème XI du chapitre III.

Signalons enfin que le produit tensoriel est une application bilinéaire continue de $(\mathcal{E})_x \times (\mathcal{E})_y$ dans $(\mathcal{E})_{x,y}$, et hypocontinue (mais non continue) de $(\mathcal{D})_x \times (\mathcal{D})_y$ dans $(\mathcal{D})_{x,y}$.

Dérivation Théorème VII *Si* D_x^p *est un symbole de dérivation partielle en* x, D_y^q *un symbole de dérivation partielle en* y, *on a*

$$D_x^p D_y^q (S_x \otimes T_y) = D_x^p S_x \otimes D_y^q T_y \, . \tag{IV, 4 ; 10}$$

On voit immédiatement l'égalité des distributions $\in (\mathcal{D}')_{x,y}$ écrites aux 2 membres ; il suffit en effet, d'après le théorème III, de vérifier qu'elles prennent la même valeur pour $\varphi \in (\mathcal{D})_{x,y}$ de la forme (IV,2;2), ce qui est évident.

Un théorème d'approximation Théorème VIII *Le système des distributions* $S_x \otimes T_y$ *(où* S_x *parcourt* $(\mathcal{D}')_x$, *et* T_y *parcourt* $(\mathcal{D}')_y$*) est total dans* $(\mathcal{D}')_{x,y}$.

En effet toute distribution $\in (\mathcal{D}')_{x,y}$ est limite de fonctions indéfiniment dérivables à supports compacts (théorème XV du chapitre III). Or une telle fonction $f(x, y)$ est limite dans $(\mathcal{D})_{x,y}$, donc a fortiori dans $(\mathcal{D}')_{x,y}$, de fonctions de la forme (IV, 2 ; 5) qui sont bien des combinaisons linéaires de produits directs.

[1] Voir Dieudonné-Schwartz [1], page 96, théorème 9, qui démontre ce théorème dans le cas de $(\mathcal{E}')$, d'où l'on passe aisément à $(\mathcal{D}')$

Il est bien évident que toutes ces propriétés s'étendent sans difficulté au produit direct d'un nombre fini quelconque de distributions ; ce produit est associatif. Si X^l, Y^m, Z^n, sont 3 espaces vectoriels de dimensions respectives l, m, n, on voit en effet que, R_x, S_y, T_z, désignant 3 distributions respectivement sur X^l, Y^m, Z^n, on a

$$R_x \otimes (S_y \otimes T_z) = (R_x \otimes S_y) \otimes T_z.$$

D'ailleurs on peut définir directement $R_x \otimes S_y \otimes T_z$ en écrivant que, pour $u(x) \in (\mathcal{D})_x$, $v(y) \in (\mathcal{D})_y$, $w(z) \in (\mathcal{D})_z$:

$$\text{(IV, 4 ; 11)} \quad R_x \otimes S_y \otimes T_z [u(x)\, v(y)\, w(z)] = R(u)\; S(v)\; T(w).$$

§ 5 Exemples

Exemple 1 *Distribution indépendante de x_1* Nous avons déjà rencontré un exemple de produit au § 5 du chapitre II (intégration dans le cas de plusieurs variables).

Soit, sur R^n, une distribution T vérifiant $\dfrac{\partial T}{\partial x_1} = 0$. Cherchons sa forme par une nouvelle méthode. Calculons $T(\varphi)$ pour

$$\text{(IV, 5 ; 1)} \quad \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = u(x_1)\, v(x_2, x_3, \ldots, x_n).$$

Choisissons $v(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ fixe, et faisons varier u seule.

$T(uv)$ est alors une forme linéaire continue de $u \in (\mathcal{D})_{x_1}$, c'est-à-dire une distribution sur l'espace à une dimension X^1 de la variable x_1. Cette distribution a une dérivée nulle, donc, d'après le théorème I du chap. II, c'est une fonction égale à une constante $C(v)$ (dépendant du choix de v) et, pour u et v quelconques :

$$\text{(IV, 5 ; 2)} \qquad T(uv) = C(v) \int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1)\, dx_1.$$

Choisissons maintenant une fois pour toutes u telle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x_1)\, dx_1 \neq 0,$$

et faisons varier v seule. Alors on voit que $C(v)$ est une forme linéaire continue de $v \in (\mathcal{D})_{x_2, x_3, \ldots x_n}$, donc une distribution Σ sur l'espace à $n-1$ dimensions Y^{n-1} des variables $x_2, x_3, \ldots x_n$.

$$\text{(IV, 5 ; 3)} \quad C(v) = \Sigma_{x_2, x_3, \ldots x_n} [v(x_2, x_3, \ldots x_n)] = \Sigma(v),$$

$$\text{(IV, 5 ; 4)} \quad \text{et} \quad T(uv) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} u(x_1)\, dx_1\right) \Sigma(v).$$

Cette formule montre que T est le produit tensoriel de la constante 1, distribution sur X^1, par la distribution Σ sur Y^{n-1}.

$$\text{(IV, 5 ; 5)} \qquad T = (1)_{x_1} \otimes \Sigma_{x_2, x_3 \dots x_n}.$$

En appliquant le théorème de Fubini [formule (IV, 3 ; 2)], on retrouve la formule (II, 5 ; 10) et une formule nouvelle :

$$\text{(IV, 5 ; 6)} \quad \begin{cases} T.\, \varphi(x_1, x_2 \dots x_n) = \Sigma_{x_2, x_3, \dots x_n}. \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t_1, x_2 \dots x_n)\, dt_1\right) \\ T.\, \varphi(x_1, x_2 \dots x_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} [\Sigma_{x_2, x_3, \dots x_n}.\, \varphi(t_1, x_2 \dots x_n)]\, dt_1. \end{cases}$$

Plus généralement dans l'espace $X^m \times Y^n$, la forme générale d'une distribution indépendante de y est $\Sigma_x \otimes (1)_y$.

Exemple 2 *Extension à l'espace d'une distribution définie sur un sous-espace vectoriel.*

En reprenant les notations du § 10 du chapitre III, l'extension $\tilde{T}_{x,y}$ à R^n d'une distribution T_x sur X^h, vérifie la formule

$$\text{(IV, 5 ; 7)} \quad \tilde{T}_{x,y} = T_x \otimes \delta_y \, ; \quad \text{de plus} \quad D_y^q \tilde{T}_{x,y} = T_x \otimes D_y^q \delta_y.$$

Exemple 3 *Fonctions d'Heaviside et mesures de Dirac.*

Les produits tensoriels dans R^n permettent de définir des intermédiaires entre la fonction d'Heaviside et la mesure de Dirac. Si nous appelons fonction d'Heaviside $Y(x)$ dans R^n la fonction égale à $+1$ pour $x \geqslant 0$ (c'est-à-dire $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, … $x_n \geqslant 0$) et à 0 ailleurs, nous voyons que

$$\text{(IV, 5 ; 8)} \qquad Y(x) = Y_{x_1} \otimes Y_{x_2} \otimes \dots \otimes Y_{x_n}.$$

Nous poserons alors

$$\text{(IV, 5 ; 9)} \quad Y_{(k)} = Y_{x_1} \otimes Y_{x_2} \otimes \dots \otimes Y_{x_k} \otimes \delta_{x_{k+1}} \dots \otimes \delta_{x_n},$$

de sorte que $Y_{(n)}(x) = Y(x)$ et $Y_{(0)} = \delta$. Tandis que $Y_{(n)}$ est une fonction, toutes les autres $Y_{(k)}$ sont des mesures ; $Y_{(k)}$ est portée par le sous-espace vectoriel $Ox_1x_2 \dots x_k$ et c'est l'extension à R^n de la fonction d'Heaviside définie sur le sous-espace vectoriel $Ox_1 \dots x_k$. On a alors

$$\text{(IV, 5 ; 10)} \qquad \frac{\partial}{\partial x_k} Y_{(k)} = Y_{(k-1)}$$

et par suite

$$\text{(IV, 5 ; 11)} \quad \frac{\partial^{n-k}}{\partial x_{k+1} \ldots \partial x_n} \mathrm{Y} = \mathrm{Y}_{(k)} \; ; \; \frac{\partial^k}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_k} \mathrm{Y}_{(k)} = \delta \, ,$$

ce qui donne des « solutions élémentaires » de certaines équations aux dérivées partielles.

Multiplication des distributions

SOMMAIRE Il est impossible de définir le produit multiplicatif de 2 distributions quelconques. On définit au § 1 le produit αT d'une distribution T et d'une fonction indéfiniment dérivable α, par la formule (V, 1 ; 1) $\alpha T.\varphi = T.\alpha\varphi$, qui, si T est une fonction f, donne pour αT le produit usuel αf.

Le § 2 donne les propriétés de ce produit, qui sont évidentes. Signalons en particulier l'hypocontinuité (théorème III, p. 119) et la formule habituelle de dérivation d'un produit (V, 2 ; 3) : $(\alpha T)' = \alpha' T + \alpha T'$.

Le § 3 donne des exemples. Les formules (V, 3 ; 2 à 5) sont d'un usage courant en Mécanique ondulatoire sous une forme plus ou moins déguisée. L'exemple 3 est important dans la pratique des pseudo-fonctions.

Les §§ 4 et 5 traitent du problème de la division. Dans le cas d'une variable ($n = 1$, § 4) la division par une puissance de x est aussi très utile dans la Mécanique ondulatoire et dans la pratique des équations différentielles. Le § 2 par contre correspond à des notions peu utilisées jusqu'à présent, parce qu'il n'était pas possible de poser correctement le problème. Il est maintenant correctement posé, mais n'est pas pour autant résolu ; nous ne traitons que des cas particuliers ; le cas général est d'une très grande difficulté; il a été résolu par Hörmander pour la division par des polynômes, et par Lojasiewicz pour la division par des fonctions analytiques([1])). L'intérêt de la division résulte de ce que, par transformation de Fourier, elle résout des problèmes essentiels de la théorie des équations aux dérivées partielles et équations intégrales (chapitre VII, § 10). On pourra sans inconvénient reporter la lecture des §§ 4 et 5 jusqu'à l'étude de ces problèmes.

Le § 6 donne des applications de la multiplication aux équations différentielles et aux dérivées partielles. Tout ce paragraphe est important pour les applications pratiques. Toute équation différentielle homogène a pour seules solutions ses solutions usuelles, qui sont des fonctions (théorème IX, p. 130) ; il en est de même pour toute équation aux dérivées partielles elliptique (théorème XII, p. 143) ce qui simplifie notablement les méthodes directes du calcul des variations (p. 147). Dans les équations hyperboliques au contraire, il y a des solutions-distributions nouvelles, ce qui permet d'introduire d'une façon correcte les solutions discontinues d'usage courant. De même la relation entre problème de Cauchy et équation avec second membre, et la définition correcte de la solution élémentaire sont bien mises en évidence (p. 135).

([1]) HÖRMANDER [2], LOJASIEWICZ [1], SCHWARTZ [16]

§ 1 Produit multiplicatif d'une distribution par une fonction indéfiniment dérivable

Dans ce chapitre, pour éviter toute confusion, nous noterons toujours par $T.\varphi$ le produit scalaire de $T\in(\mathcal{D}')$ et $\varphi\in(\mathcal{D})$.

Impossibilité de définir le produit de 2 distributions quelconques — Nous voulons définir un produit multiplicatif $ST\in(\mathcal{D}')$ de 2 distributions $S\in(\mathcal{D}')$, $T\in(\mathcal{D}')$, qui, dans le cas de 2 fonctions $f(x)$, $g(x)$, donne leur produit habituel $f(x)g(x)$. Il est évident que ce n'est pas possible si S et T sont quelconques. Ainsi si $f(x)$ et $g(x)$ sont 2 fonctions sommables sur tout compact, leur produit fg n'est pas nécessairement sommable, donc ne définit pas nécessairement une distribution. Il est facile de voir que si μ est une mesure qui n'est pas une fonction, le carré μ^2 n'a jamais de sens ; le carré δ^2 de la mesure de Dirac devrait être, s'il avait un sens, une masse $+\infty$ à l'origine (comme on le voit en approchant δ par des fonctions en cloche). Pour que ST ait un sens, il faut que S soit d'autant plus régulière localement que T est irrégulière (1). Le cas où nous sommes sûrs que ce produit aura toujours un sens est celui où, T étant une distribution quelconque, S est une fonction α, indéfiniment dérivable (au sens usuel).

Définition Pour $\alpha\in(\mathcal{E})$, $T\in(\mathcal{D}')$, nous définirons le produit multiplicatif $\alpha T\in(\mathcal{D}')$ par

$$\alpha T\,.\,\varphi = T\,.\,\alpha\varphi, \tag{V, 1 ; 1}$$

pour $\varphi\in(\mathcal{D})$. αT ainsi définie est bien une distribution, car, si $\varphi_j\to 0$ dans $(\mathcal{D}_K)$, il en est de même de $\alpha\varphi_j$, donc $T.\,\alpha\varphi_j\to 0$. Si T est une fonction f, αT coïncide bien avec le produit usuel αf, car (V, 1 ; 1) s'écrit

$$\int\!\!\int\cdots\int [\alpha(x)f(x)]\,\varphi(x)dx = \int\!\!\int\cdots\int f(x)\,[\alpha(x)\varphi(x)]\,dx. \tag{V, 1 ; 2}$$

Donnons quelques exemples du produit ST de 2 distributions dans d'autres cas que celui où $S=\alpha\in(\mathcal{E})$, $T\in(\mathcal{D}')$ étant quelconque.

1° T est une mesure μ. On peut donc définir ST si S est une fonction continue f :

(1) Nous avons démontré l'impossibilité de définir un produit même dans des conditions plus générales, dans Schwartz [6]. Une multiplication toute différente est définie par König [2]

(V, 1 ; 3) $\quad \mathrm{ST} = f\mu$ par $f\mu \cdot \varphi = \mu \cdot f\varphi,\ \varphi \in (\mathcal{D}),\ f\varphi \in (\mathcal{C})$.

2° T est une distribution d'ordre $\leqslant m$.

On peut définir ST si S est une fonction m fois continûment différentiable f :

(V, 1 ; 4) $\quad f\mathrm{T} \cdot \varphi = \mathrm{T} \cdot f\varphi, \quad \varphi \in (\mathcal{D}), \quad f\varphi \in (\mathcal{D}^m)$.

3° Nous avons choisi au début T quelconque, S « infiniment régulière », puisque $\mathrm{S} = \alpha \in (\mathcal{E})$, et nous venons de voir des cas intermédiaires. Il y a lieu alors de faire jouer à S et T le même rôle ; si c'est S qui est une distribution d'ordre $\leqslant m$, c'est T qui devra être une fonction f, m fois continûment différentiable ; si S est quelconque $\in (\mathcal{D}')$, T devra être une fonction $\alpha \in (\mathcal{E})$.

Moyennant ces considérations, on écrira ST aussi bien que TS si le produit a un sens.

Dans la suite nous abandonnerons ce point de vue et considérerons toujours le produit $\alpha\mathrm{T}$, $\alpha \in (\mathcal{E})$, $\mathrm{T} \in (\mathcal{D}')$.

Remarquons que, pour $\varphi \in (\mathcal{D})$ et $\mathrm{T} \in (\mathcal{D}')$, ou pour $\varphi \in (\mathcal{E})$ et $\mathrm{T}(\mathcal{E}')$, on a $\varphi\mathrm{T} \in (\mathcal{E}')$ et

(V, 1 ; 5) $\quad \mathrm{T} \cdot \varphi = \varphi\mathrm{T} \cdot 1 = \iint \ldots \int \varphi\mathrm{T}$.

Le produit scalaire est l'intégrale sur R^n du produit multiplicatif. Il en résulte que si $\varphi\mathrm{T} = 0$ quelle que soit $\varphi \in (\mathcal{D})$, $\mathrm{T} = 0$.

Le produit s'étend immédiatement aux distributions sur une variété V^n.

§ 2 Propriétés du produit multiplicatif

Support. Ordre Théorème I *Le support de* $\alpha\mathrm{T}$ *est contenu dans l'intersection du support de* α *et du support de* T. *L'ordre de* $\alpha\mathrm{T}$ *est au plus égal à l'ordre de* T.

Cela revient à dire que si, dans un ouvert Ω, α ou T est nulle, $\alpha\mathrm{T}$ est nulle. La connaissance locale de α et de T entraîne la connaissance locale de $\alpha\mathrm{T}$; par exemple si, dans un ouvert Ω, α et T sont $\geqslant 0$, $\alpha\mathrm{T}$ est dans Ω une mesure $\geqslant 0$. En particulier, $\alpha \in (\mathcal{D})$ ou $\mathrm{T} \in (\mathcal{E}')$ entraîne $\alpha\mathrm{T} \in (\mathcal{E}')$. Démonstration immédiate.

On peut, en utilisant les théorèmes XXVIII et XXXIII du chapitre III perfectionner le théorème et montrer ce qui suit :

Théorème II *Si* T *a un support compact* K_0, *et est d'ordre (nécessairement fini)* m, $\alpha\mathrm{T}$ *est nulle toutes les fois que* α *et ses déri-*

vées d'ordre $\leqslant m$ sont nulles sur K_0 ; si T a un support quelconque et est d'ordre quelconque, fini ou infini, αT est nulle si α est nulle ainsi que toutes ses dérivées sur le support de T.

En effet $\alpha\varphi$ a toutes ses dérivées d'ordre $\leqslant m$ nulles sur le support K_0 (dans le 1er cas) ou toutes ses dérivées nulles sur le support de T (dans le 2e cas), donc $T(\alpha\varphi) = 0$ quelle que soit $\varphi \in (\mathcal{D})$.

Continuité THÉORÈME III *αT est une fonction bilinéaire hypocontinue de α et de* T $[\alpha \in (\mathcal{E}), T \in (\mathcal{D}'), \alpha T \in (\mathcal{D}')]$.

Cela résulte du théorème XI du chapitre III.

Supposons par exemple que les T_j tendent vers 0 dans $(\mathcal{D}')$. Lorsque φ parcourt un ensemble borné B de $(\mathcal{D})$, et que les α_j restent bornés dans $(\mathcal{E})$, les $\alpha_j\varphi$ parcourent un ensemble borné dans $(\mathcal{D})$; alors les $T_j . \alpha_j\varphi$ convergent bien vers 0 uniformément pour $\varphi \in B$. Si au contraire ce sont les α_j qui tendent vers 0 dans $(\mathcal{E})$, alors lorsque $\varphi \in (\mathcal{D})$ parcourt B, les $\alpha_j\varphi$ convergent uniformément vers 0 dans $(\mathcal{D})$; comme les T_j sont bornés dans $(\mathcal{D}')$, les $T_j . \alpha_j\varphi$ convergent encore vers 0 dans $(\mathcal{D}')$ uniformément pour $\varphi \in B$. Naturellement, l'application bilinéaire $(\alpha, T) \to \alpha T$ est discontinue. Si les α_j convergent vers 0 dans $(\mathcal{E})$, et les T_j vers 0 dans $(\mathcal{D}')$, les $\alpha_j T_j$ ne convergent pas forcément vers 0 dans $(\mathcal{D}')$. La convergence des $\alpha_j T_j$ vers 0 n'est certaine que dans le cas de suites convergentes, car une suite convergente est bornée, ou dans le cas de filtres ayant une base de filtre bornée ou dénombrable. En ce qui concerne le cas des topologies faibles, on peut faire les mêmes remarques qu'à propos du théorème XI du chapitre III.

Remarquons que le produit multiplicatif est aussi une application bilinéaire hypocontinue de $(\mathcal{E}) \times (\mathcal{E}')$ dans $(\mathcal{E}')$, de $(\mathcal{D}) \times (\mathcal{D}')$ dans $(\mathcal{E}')$, de $(\mathcal{D}) \times (\mathcal{E})$ dans $(\mathcal{D})$, et continue de $(\mathcal{E}) \times (\mathcal{E})$ dans $(\mathcal{E})$.

On se bornera souvent à étudier l'application linéaire *continue* de $(\mathcal{D}')$ ou de $(\mathcal{E}')$ dans lui-même définie, pour $\alpha \in (\mathcal{E})$ fixe, par

$$\text{(V, 2 ; 1)} \qquad T \to \alpha T.$$

Ce n'est autre, d'après la formule (V, 1 ; 1), que la transposée de l'application linéaire continue

$$\text{(V, 2 ; 2)} \qquad \varphi \to \alpha\varphi$$

de $(\mathcal{D})$ ou de $(\mathcal{E})$ dans lui-même.

Dérivation THÉORÈME IV *Le produit* αT *se dérive suivant la règle habituelle de dérivation du produit :*

$$(\alpha T)' = \alpha' T + \alpha T'. \tag{V, 2 ; 3}$$

Dans cette formule, le symbole ' désigne d'une façon simplifiée une dérivation partielle $\frac{\partial}{\partial x_k}$ par rapport à l'une des coordonnées. Cette formule est d'ailleurs vraie sur une variété indéfiniment différentiable V^n, le symbole ' désignant une dérivation du premier ordre ∂ [formule (II, 3 ; 35)].

La démonstration directe est immédiate, car

$$\left\{\begin{aligned} (\alpha T)' . \varphi &= \alpha T . (-\varphi') = T . (-\alpha\varphi'), \\ \alpha' T . \varphi &= T . \alpha'\varphi, \\ \alpha T' . \varphi &= T' . \alpha\varphi = T . [-(\alpha\varphi)'], \end{aligned}\right. \tag{V, 2 ; 4}$$

de sorte que (V, 2 ; 3) s'écrit

$$T.(-\alpha\varphi') = T.[\alpha'\varphi - (\alpha\varphi)'] \quad \text{ou} \quad -\alpha\varphi' = \alpha'\varphi - (\alpha\varphi)', \tag{V, 2 ; 5}$$

qui est la formule habituelle de dérivation d'un produit.

On peut aussi opérer sans revenir aux définitions. La formule (V, 2 ; 3) est vraie si T est une fonction $f \in (\mathcal{D})$. Mais si des $f_j \in (\mathcal{D})$ convergent dans $(\mathcal{D}')$ vers T, on obtient (V, 2 ; 3) par passage à la limite. Naturellement on peut généraliser et démontrer la formule de Leibniz de dérivation supérieure d'un produit.

Produit tensoriel et produit multiplicatif THÉORÈME V *Le produit multiplicatif dans* $(\mathcal{D})_{x,y}$ *des produits tensoriels* $\alpha(x) \otimes \beta(y)$, $S_x \otimes T_y$ $[\alpha(x) \in (\mathcal{E})_x,\ \beta(y) \in (\mathcal{E})_y,\ S_x \in (\mathcal{D}')_x,\ T_y \in (\mathcal{D}')_y]$, *est le produit tensoriel des produits multiplicatifs.*

$$[\alpha(x) \otimes \beta(y)]\, (S_x \otimes T_y) = \alpha(x)\, S_x \otimes \beta(y)\, T_y. \tag{V, 2 ; 6}$$

Pour montrer l'égalité des distributions figurant dans les 2 membres, il suffit de montrer que, en tant que formes linéaires sur $(\mathcal{D})_{x,y}$, elles prennent la même valeur pour $\varphi(x, y) \in (\mathcal{D}_{x,y})$ de la forme (IV, 2 ; 2), ce qui est évident, la valeur commune des 2 membres étant $(S.\alpha u)\ (T.\ \beta v)$.

Produit de plusieurs distributions

Il n'y a aucune difficulté à définir le produit d'un nombre fini quelconque de distributions *qui toutes, sauf une au plus, sont des fonctions* $\in (\mathcal{E})$.

THÉORÈME VI *Le produit de plusieurs distributions, lorsque toutes, sauf une au plus, sont des fonctions indéfiniment dérivables au sens usuel, est associatif et commutatif.*

On a en effet

(V, 2 ; 7) $\alpha(\beta T) . \varphi = \beta T . \alpha\varphi = T . \beta\alpha\varphi = (\alpha\beta) T . \varphi$

L'associativité

(V, 2 ; 8) $$\alpha(\beta T) = (\alpha\beta) T$$

montre que la multiplication $T \to \alpha T$ permet de définir l'espace $(\mathcal{D}')$ [ou $(\mathcal{E}')$] comme un *module topologique sur l'anneau topologique* $(\mathcal{E})$.

Si les conditions restrictives de l'énoncé du théorème ne sont pas vérifiées, la multiplication n'est plus nécessairement associative.

EXEMPLE Pour les 3 distributions δ, x, $vp.\,\dfrac{1}{x}$:

(V, 2 ; 9) $$(\delta\, x)\, vp.\,\frac{1}{x} = 0 \quad \text{car} \quad \delta x = 0$$

(V, 2 ; 10) $$\delta\left(x\, vp.\,\frac{1}{x}\right) = \delta \quad \text{car} \quad x\, vp.\,\frac{1}{x} = 1.$$

§ 3 EXEMPLES

EXEMPLE 1 Nous avons rencontré déjà des exemples. Ainsi la formule (III, 8 ; 1) résulte immédiatement de la partition de l'unité,

$$1 \equiv \sum_{\nu} \alpha_\nu(x),$$

la somme infinie du 2e membre étant convergente dans $(\mathcal{E})$; donc, par multiplication,

(V, 3 ; 1) $$T = \sum_{\nu} (\alpha_\nu T).$$

EXEMPLE 2 Le symbole ′ désignant une dérivation du premier ordre :

(V, 3 ; 2) $$\alpha\delta = \alpha(0)\delta$$

(V, 3 ; 3) $$\alpha\delta' = \alpha(0)\delta' - \alpha'(0)\delta.$$

Plus généralement la formule de Leibniz montre que

$$\text{(V, 3 ; 4)} \quad \alpha D^p\delta = \sum_{q \leqslant p} (-1)^{|p-q|} C_p^q D^{p-q}\alpha(0) D^q\delta.$$

Un cas particulier intéressant est celui de

$$\alpha = x^l = x_1^{l_1} x_2^{l_2} \dots x_n^{l_n} :$$

$$\text{(V, 3 ; 5)} \quad x^l \left((-1)^{|p|} \frac{D^p\delta}{p\,!} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } l \text{ n'est pas} \leqslant p \\ (-1)^{|p-l|} \dfrac{D^{p-l}\,\delta}{(p-l)\,!} & \text{si} \quad l \leqslant p. \end{cases}$$

Un cas particulier de (V, 3 ; 5) est

$$\text{(V, 3 ; 6)} \qquad x^p D^p\delta = (-1)^{|p|}\, p\,!\, \delta.$$

Si maintenant on utilise les notations du § 10 du chapitre III, compte tenu de (IV, 5 ; 7), on aura

$$\text{(V, 3 ; 7)} \quad y^l \left((-1)^{|q|}\, T_x \otimes \frac{D_y^q\, \delta_y}{q\,!} \right)$$
$$= \begin{cases} 0 & \text{sauf si} \quad l \leqslant q \\ (-1)^{|q-l|}\, T_x \otimes \dfrac{D_y^{q-l}\, \delta_y}{(q-l)\,!} & \text{si} \quad l \leqslant q. \end{cases}$$

Exemple 3 Soit Pf. g une « pseudo-fonction ». Cela signifie que

$$\text{(V, 3 ; 8)} \qquad \text{Pf. } g\,.\,\varphi = \text{Pf.} \iint \dots \int g\,\varphi\, dx.$$

Pour que la pseudo-fonction g soit bien définie, il faut supposer qu'on se donne un procédé explicite de calcul de la partie finie de l'intégrale du 2e membre. Alors

$$\text{(V, 3 ; 9)} \qquad (\alpha \text{ Pf. } g)\,.\,\varphi = \text{Pf. } g\,.\,\alpha\varphi$$
$$= \text{Pf.} \iint \dots \int g(\alpha\varphi)\, dx = \text{Pf.} \iiint (\alpha g)\, \varphi dx.$$

Avec la convention de calcul, supposée explicitée, de l'intégrale écrite au dernier membre de (V, 3 ; 9), celle-ci représente (Pf. αg). φ. On peut donc écrire

$$\text{(V, 3 ; 10)} \qquad \alpha \text{ Pf. } g = \text{Pf. } \alpha g.$$

Les pseudo-fonctions se multiplient donc comme les fonctions. Ainsi l'exemple 2 du § 3 du chapitre II nous donne

$$\text{(V, 3 ; 12)} \qquad r^k \text{ Pf. } r^m = \text{Pf. } r^{m+k} ;$$

m est un nombre complexe quelconque, k est un entier $\geqslant 0$ pair, puisque r^k doit être une fonction indéfiniment dérivable. Si

$$\Re(m) + k > -n,$$

le symbole Pf. du 2e membre est inutile.

§ 4 Problème de la division, cas d'une variable ($n = 1$)

Position du problème Si S est une distribution donnée, il existe évidemment, dans tout ouvert où $H(x) \in (\mathcal{E})$ est sans zéro, une distribution T et une seule vérifiant HT = S ; car, $\frac{1}{H}$ étant indéfiniment dérivable, on obtient, en multipliant les 2 membres par $\frac{1}{H}$: $T = \frac{1}{H} S$. Nous nous préoccuperons donc uniquement des cas où H a des zéros. Le problème de la division est d'une importance très grande dans la théorie des équations intégrales ou aux dérivées partielles ; l'emploi de la division est courant en mécanique ondulatoire.

Division par x Théorème VII *S étant une distribution donnée sur* R^1, *il existe une infinité de distributions* T *vérifiant*

$$\text{(V, 4 ; 1)} \qquad xT = S\ ;$$

deux d'entre elles diffèrent d'un multiple arbitraire $C\delta$ *de la mesure de Dirac.*

Nous voyons immédiatement que T est définie dans l'ouvert complémentaire de l'origine par

$$\text{(V, 4 ; 2)} \qquad T = \frac{1}{x} S,$$

$\frac{1}{x}$ étant une fonction indéfiniment dérivable dans cet ouvert. Ce n'est qu'au voisinage de 0 que T est inconnue et que nous ne pouvons pas affirmer à priori son existence.

Nous avons là affaire à un problème de *division* par x, inverse d'un problème de multiplication. Nous opérerons exactement comme pour l'intégration (théorème I du chapitre II), problème inverse de la dérivation. Pour que l'on ait (V, 4; 1), il faut et il suffit que, pour toute fonction $\chi \in (\mathcal{D})$ qui est de la forme $\chi(x) = x\psi(x)$, $\psi \in (\mathcal{D})$, on ait $T(\chi) = S(\psi)$. Ces fonctions χ, divisibles par x, forment un sous-espace vectoriel hyperplan $(\mathcal{H})$ de $(\mathcal{D})$: elles satisfont en effet à l'unique condition linéaire $\chi(0) = 0$, moyennant quoi le quotient $\psi(x) = \chi(x)/x$ appartient bien à $(\mathcal{D})$.

T, si elle existe, est une forme linéaire continue sur $(\mathcal{D})$ connue sur $(\mathcal{H})$; on la connaîtra complètement si on connaît sa valeur $T(\varphi_0)$ sur un élément φ_0 de $(\mathcal{D})$ n'appartient pas à $(\mathcal{H})$. Choisissons par exemple φ_0 telle que $\varphi_0(0) = +1$. Alors, pour $\varphi \in (\mathcal{D})$ quelconque, on aura la décomposition unique

$$\text{(V, 4 ; 3)} \qquad \begin{cases} \varphi = \lambda\varphi_0 + \chi, \\ \lambda = \varphi(0), \\ \chi = \varphi - \lambda\varphi_0 \in (\mathcal{H}), \quad \text{donc} \quad = x\psi, \quad \psi \in (\mathcal{D}), \end{cases}$$

qui donnera

$$\text{(V, 4 ; 4)} \qquad T(\varphi) = \lambda T(\varphi_0) + S(\psi).$$

Réciproquement, supposons φ_0 choisie une fois pour toutes, et $T(\varphi_0)$ choisie de façon quelconque. La formule (V, 4 ; 4) définit bien T comme une forme linéaire sur $(\mathcal{D})$. Si φ converge vers 0 dans $(\mathcal{D}_K)$, λ converge vers 0, donc $\lambda T(\varphi_0)$ également ; si nous montrons que ψ converge vers 0 dans $(\mathcal{D})$, alors $S(\psi)$ convergera vers 0, et par suite aussi $T(\varphi)$; T sera une forme linéaire continue, c'est-à-dire une distribution et elle vérifiera bien (V, 4 ; 1).

Il nous faut donc seulement montrer que, si φ converge vers 0 dans $(\mathcal{D})$, il en est de même de ψ. Or $\chi = \varphi - \lambda\varphi_0$ converge vers 0 dans $(\mathcal{D}_L)$, L étant la réunion de K et du support de φ_0, et nous devons finalement montrer que, si $\chi \in (\mathcal{H})$ converge vers 0 dans $(\mathcal{D}_L)$, $\psi(x) = \chi(x)/x$ converge vers 0 dans $(\mathcal{D}_L)$. Mais l'application à $\chi(x)$ de la formule de Taylor permet, par un calcul élémentaire, d'obtenir une majoration de la forme :

$$\text{(V, 4 ; 5)} \qquad \left| \frac{d^m\psi(x)}{dx^m} \right| \leqslant k_m \operatorname*{Max}_{|t| \leqslant |x|} \left| \frac{d^{m+1}\chi(t)}{dt^{m+1}} \right|,$$

d'où l'on déduit aussitôt la conclusion.

Deux solutions distinctes de (V, 4 ; 1) correspondront à 2 valeurs distinctes pour $T(\varphi_0)$; leur différence est donc telle que

$$\text{(V, 4 ; 6)} \qquad \begin{cases} T_1(\varphi) - T_2(\varphi) = C\lambda = C\varphi(0) \qquad \text{ou} \\ T_1 - T_2 = C\delta \end{cases}$$

(C = constante complexe, δ = mesure de Dirac).

Il aurait d'ailleurs été facile de prévoir qu'une distribution T telle que $xT = 0$ serait proportionnelle à δ. Car une telle distribution, d'après (V, 4 ; 2), doit avoir pour support l'origine ; alors elle est (formule (III, 10 ; 1)) de la forme

(V, 4 ; 7) $$T = \sum_{0 \leqslant p \leqslant m} (-1)^p \frac{C_p}{p!} \delta^{(p)},$$

La formule (V, 3 ; 5) donne alors

(V, 4 ; 8) $$xT = \sum_{1 \leqslant p \leqslant m} (-1)^{p-1} \frac{C_p}{(p-1)!} \delta^{(p-1)},$$

expression qui ne peut être nulle que si tous les a_p, $p \geqslant 1$, sont nuls, donc on a bien $T = C_0\delta$.

Division par x^l COROLLAIRE *Si* S *est une distribution donnée sur* R^1, *il existe une infinité de distributions* T *vérifiant* (l *entier* > 0)

(V, 4 ; 9) $$x^l T = S ;$$

la différence entre deux d'entre elles est une combinaison linéaire arbitraire de dérivées d'ordre $\leqslant l - 1$ *de la mesure de Dirac.*

On procède en effet de proche en proche ; pour « diviser » S par x^l, on la divise l fois de suite par x. Quant à l'indétermination de la solution, elle se voit comme ci-dessus ; une distribution T vérifiant $x^l T = 0$ a son support à l'origine. elle est donc de la forme (V, 4 ; 7) ; alors d'après (V, 3 ; 5)

(V, 4 ; 10) $$x^l T = \sum_{l \leqslant p \leqslant m} (-1)^{p-l} \frac{C_p}{(p-l)!} \delta^{(p-l)},$$

qui ne peut être nulle que si tous les C_p, $p \geqslant l$, sont nuls, d'où

(V, 4 ; 11) $$T = \sum_{0 \leqslant p \leqslant l-1} (-1)^p \frac{C_p}{p!} \cdot \delta^{(p)}.$$

Division par une fonction H Il nous est maintenant possible de passer à la division d'une distribution S donnée par n'importe quelle fonction $H(x) \in (\mathcal{E})$, n'ayant sur tout l'axe réel que des racines isolées multiples d'ordre fini.

On voit en effet que, si la division par H est possible localement, elle est possible globalement (voir plus loin, § 5, 2°).

Or la division par H est évidemment possible au voisinage de tout point a qui n'est pas un zéro de H. Au voisinage de a_ν, zéro multiple d'ordre l_ν de H, on peut écrire

(V, 4 ; 12) $$\frac{1}{H} = \frac{1}{(x - a_\nu)^{l_\nu}} \frac{(x - a_\nu)^{l_\nu}}{H},$$

et comme $(x - a_\nu)^{l_\nu}/H$ est indéfiniment dérivable au voisinage de a_ν, la division par H se ramène à la division par $(x - a_\nu)^{l_\nu}$ qui est

toujours possible. Finalement la division par H est donc possible sur R^1.

L'indétermination de la solution provient de l'indétermination aux points a_ν. La différence entre 2 solutions vérifie

$$\text{(V, 4 ; 13)} \qquad H(T_1 - T_2) = 0,$$

et elle admet une représentation unique comme combinaison linéaire infinie (convergente) de dérivées d'ordre $\leqslant l_\nu - 1$ des mesures ponctuelles $\delta_{(a_\nu)}$:

$$\text{(V, 4 ; 14)} \quad T_1 - T_2 = \sum_{a_\nu} \left(\sum_{p \leqslant l_\nu - 1} (-1)^p \frac{C_{p,\nu}}{p\,!} \delta_{(a_\nu)}^{(p)} \right),$$

puisqu'au voisinage de chaque point elle admet une telle représentation unique.

On voit facilement que la division par une fonction $H(x) \in (\mathcal{E})$ ayant des zéros d'ordre infini n'est plus toujours possible ; n'importe quelle distribution n'est plus « divisible » par H.

§ 5 Esquisse du problème de la division dans le cas de plusieurs variables

Nous ne traitons ici que les cas simples. Le problème général de la division est très délicat; il a été résolu, pour la division par les polynômes, par Hörmander [2], et plus généralement pour la division par les fonctions analytiques, par Lojasiewicz [1]. Voir aussi Schwartz [15].

1° La division par x_n dans R^n est toujours possible. Il suffit d'étendre la démonstration du paragraphe précédent, $(\mathcal{H})$ n'est cependant plus un hyperplan, il est formé des fonctions χ vérifiant $\chi(x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, 0) \equiv 0$.

2° Si la division par H est possible localement, elle est possible globalement. Soit en effet $\{ \Omega_\nu \}$ un recouvrement localement fini de R^n par des ouverts relativement compacts dans chacun desquels la division par H soit toujours possible. Utilisons alors le théorème XXIX du chapitre III, qui décompose la distribution S donnée en somme $S = \sum_\nu S_\nu$, S_ν ayant son support dans Ω_ν. Il existe alors une distribution T_ν telle que $HT_\nu = S_\nu$; on peut toujours supposer que le support de T_ν est dans Ω_ν, sans quoi on la multiplierait par une fonction $\in (\mathcal{D}_{\Omega_\nu})$ égale à 1 sur un voisinage du support

de S_ν. Alors la somme infinie $T = \sum_\nu T_\nu$ est localement finie, et l'on a $HT = S$.

3° Soit P une fonction de $(\mathcal{E})$ telle que la sous-variété U^{n-1} d'équation $P(x) = 0$ soit à $n - 1$ dimensions, sans singularité, et que les dérivées partielles du premier ordre de P ne s'annulent jamais simultanément sur cette sous-variété. Une telle fonction P sera dite régulière. Au voisinage de tout point en dehors de U^{n-1}, la division par P est possible, et unique. Au voisinage de tout point de U^{n-1}, on peut, par un changement de variables (chapitre I, § 5, 3°), se ramener au cas où P est la fonction x_n, donc la division par P est encore possible. Finalement la division par P, localement possible, est globalement possible.

4° Si la division par deux fonctions H, K, est possible, la division par le produit HK est toujours possible, elle se fait par deux divisions successives.

Alors si P, Q, ... sont des fonctions de $(\mathcal{E})$ régulières, et si l, m ... sont des entiers > 0, la division par $P^l Q^m$ ... est toujours possible.

Étudions maintenant l'indétermination du problème de la division dans les cas traités ci-dessus, c'est-à-dire la forme générale des distributions T vérifiant $HT = 0$. Le support de T est nécessairement sur la sous-variété d'équation $H(x) = 0$. Mais ce n'est nullement suffisant.

La formule (V, 3 ; 7) nous montre que, pour que le produit $x_n^l T$ soit nul, il faut et il suffit que T soit couche multiple d'ordre $\leqslant l$ portée par l'hyperplan $x_n = 0$:

$$\text{(V, 5 ; 1)} \quad T = \sum_{q \leqslant l-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^q \overline{T}_q\,, \quad T \in (\mathcal{D}')_{x_1, x_2, \ldots x_{n-1}}\,.$$

Pour la division par $P^l Q^m$ ..., on effectue un changement de variables local (chapitre I, § 5, 3°) ; dans le cas de plusieurs fonctions P, Q, ..., on utilise le théorème XXXIV, 3°, pour décomposer une distribution ayant pour support la réunion de plusieurs sous-variétés en somme de distributions dont chacune a pour support l'une de ces sous-variétés. On aboutit ainsi au théorème suivant :

Théorème VIII *Si V^n est une variété indéfiniment différentiable, si P, Q, ... sont des fonctions de $(\mathcal{E})$, régulières sur V^n, la division par $P^l Q^m$ ... est toujours possible. Pour qu'une distribution T vérifie $P^l Q^m \ldots T = 0$, il suffit toujours, et il faut dans le cas où en tout point commun à plusieurs sous-variétés $P = 0$, $Q = 0$, ..., ces*

sous-variétés ont leurs hyperplans tangents indépendants, que T *se décompose en somme de couches multiples d'ordres* $\leqslant l, m, \ldots$ *portées respectivement par ces sous-variétés* (voir page 103).

Au voisinage d'un point qui n'appartient qu'à une de ces sous-variétés, rappelons que l'expression de la couche multiple comme somme finie de dérivées transversales d'extensions à V^n de distributions définies sur la sous-variété est unique, une fois la dérivation transversale choisie.

Exemple Dans R^n, la division par $(1 - r^2)^l$ est toujours possible. La solution la plus générale de l'équation $(1 - r^2)^l\, T = 0$, admet la décomposition unique :

$$\text{(V, 5 ; 2)} \qquad T = \sum_{q \leqslant l-1} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^q \overline{T}_q ,$$

$\overline{T}_q$ étant l'extension à R^n d'une distribution T_q définie sur la sphère unité S^{n-1}.

§ 6 Applications aux équations différentielles et aux dérivées partielles

Définition Une équation aux dérivées partielles d'ordre m, linéaire, dont l'inconnue est une distribution T, est de la forme

$$\text{(V, 6 ; 1)} \qquad \begin{cases} DT = B \quad \text{avec} \\ DT = \sum\limits_{|p| \leqslant m} A_p(x)\, D^p T \ ; \quad p = \{ p_1, p_2, \ldots, p_n \} . \end{cases}$$

Les $A_p(x)$, coefficients de l'équation, doivent être des fonctions indéfiniment dérivables (au sens usuel), si l'on veut que DT ait un sens pour toute distribution T. B, le 2e membre, est une distribution donnée ; si $B = 0$, l'équation est homogène (Naturellement on peut étudier d'autres cas ; si par exemple les A_p sont seulement k fois continûment différentiables, les D^pT devront être dans $(\mathcal{D}'^k)$, et une solution T ne pourra être une distribution quelconque).

Pour avoir un système de N équations aux dérivées partielles à N distributions inconnues, on devra supposer que $T = \{ T_1, T_2, \ldots, T_N \}$ est une distribution *vectorielle* (chapitre I, § 5, 1°) à valeurs dans l'espace vectoriel $E = R^N$ à N dimensions. Alors $B = \{ B_1, B_2, \ldots, B_N \}$ est aussi une distribution vectorielle, et les coefficients A_p sont des *matrices* indéfiniment dérivables à N lignes et N colonnes, $A_p = (A_{p\,;\,j,\,k})$, de sorte que (V, 6 ; 1) est alors équivalent à

$$\text{(V, 6 ; 2)} \qquad (DT)_j = B_j \ ; \quad j = 1, 2, \ldots, N \ ;$$

avec

$$(\text{V, 6 ; 3}) \qquad (\text{DT})_j = \sum_{|p|\leqslant m} \sum_{k=1}^{\text{N}} \text{A}_{p\,;\,j,k}(x)\, \text{D}^p\text{T}_k.$$

L'application linéaire continue $\text{T} \to \text{DT}$ de $(\mathfrak{D}')$ dans $(\mathfrak{D}')$ a une transposée ; c'est une application linéaire continue $\varphi \to \text{D}'\varphi$ de $(\mathfrak{D})$ dans $(\mathfrak{D})$, définie par

$$(\text{V, 6 ; 4}) \quad \text{DT}.\varphi = \text{T}.\text{D}'\varphi \quad \text{ou} \quad \sum_{j=1}^{\text{N}} (\text{DT})_j.\varphi_j = \sum_{j=1}^{\text{N}} \text{T}_j.(\text{D}'\varphi)_j,$$

et

$$(\text{V, 6 ; 5}) \qquad \text{D}'\varphi = \sum_{|p|\leqslant m} (-1)^{|p|}\text{D}^p[{}^t\text{A}_p(x)\,\varphi(x)]$$

ou

$$(\text{D}'\varphi)_j = \sum_{|p|\leqslant m} \sum_{k=1}^{\text{N}} (-1)^{|p|}\, \text{D}^p(\text{A}_{p\,;\,k,j}\,\varphi_k), \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, \ldots \text{N},$$

où ${}^t\text{A}_p$ est la matrice transposée de A_p (1).
L'équation (V, 6 ; 1) exprime alors que, quelle que soit $\varphi \in (\mathfrak{D})$, on a

$$(\text{V, 6 ; 6}) \qquad \text{T}.\text{D}'\varphi - \text{B}.\varphi = 0.$$

Si T et B sont des fonctions, cette relation ne fait pas intervenir les dérivées usuelles de T ; une fonction continue, non dérivable au sens usuel, peut être solution d'une telle équation (2). En particulier, si $\text{B} = 0$, une solution du système homogène est une distribution orthogonale à tous les $\text{D}'\varphi$, $\varphi \in (\mathfrak{D})$. L'équation $\text{D}'\text{T} = 0$ est ce qu'on appelle usuellement l'équation adjointe. Bien entendu, l'équation $\text{D}''\text{T} = 0$, adjointe de $\text{D}'\text{T} = 0$, n'est autre que l'équation homogène initiale $\text{DT} = 0$, car les opérateurs D' et D'' sont entièrement définis sur $(\mathfrak{D}')$ s'ils le sont sur $(\mathfrak{D})$, dense dans $(\mathfrak{D}')$; or on a, quels que soient φ et $\psi \in (\mathfrak{D})$,

$$(\text{V, 6 ; 7}) \qquad \text{D}\varphi.\psi = \psi.\text{D}'\varphi = \text{D}''\psi.\varphi.$$

(1) On définirait aussi très aisément les systèmes aux dérivées partielles sur les variétés indéfiniment différentiables

(2) (V, 6 ; 6) est bien la définition des « solutions faibles » d'une équation aux dérivées partielles, données par Leray [1], pages 204-206, Hilbert-Courant [1], tome II, page 469, Bochner [2], et [3] pages 158-182. Voir Introduction. Voir des exemples, formule (V, 6 ; 33)

Equations différentielles Nous prendrons ici N quelconque. Le système (V, 6 ; 1) devient un système différentiel si la dimension n de l'espace de la variable x est 1. Le système est dit régulier s'il peut être résolu par rapport aux dérivées d'ordre le plus élevé de $T_1, T_2, \ldots, T_N$. On peut alors toujours par adjonction de distributions inconnues nouvelles le ramener à l'ordre 1. Nous supposerons donc le système donné sous la forme matricielle

$$\text{(V, 6 ; 8)} \quad \begin{cases} DT = \dfrac{dT}{dx} + AT = B \quad \text{ou} \\ (DT)_j = \dfrac{dT_j}{dx} + \displaystyle\sum_{k=1,2,\ldots,N} A_{j,k}(x)T_k = B_j \,;\; j = 1, 2, \ldots, N. \end{cases}$$

Théorème IX *Quelle que soit la distribution* B *(second membre), le système régulier* (V, 6 ; 8) *a une infinité de solutions. La différence entre* 2 *d'entre elles est une solution arbitraire du système homogène, c'est nécessairement une fonction indéfiniment dérivable, solution usuelle du système homogène.*

Ce résultat vaut globalement ou localement.

La solution usuelle du système homogène qui pour $x = 0$ a la valeur $u(0) = \{ u_1(0), u_2(0), \ldots, u_N(0) \}$ est donnée par

$$\text{(V, 6 ; 9)} \qquad u(x) = C(x)\, u(0)$$

où $C(x)$ est une matrice $(C_{j,k}(x))$:

$$\text{(V, 6 ; 10)} \quad u_j(x) = \sum_{k=1,2,\ldots,N} C_{j,k}(x)u_k(0)\,; \quad j = 1, 2, \ldots, N.$$

La matrice $C(x)$ est indéfiniment dérivable, puisqu'il en est ainsi des coefficients $A_{j,k}$; elle est inversible (son déterminant, le wronskien, est $\neq 0$) et sa matrice inverse $C^{-1}(x)$, qui est aussi indéfiniment dérivable, donne la valeur de la solution u à l'origine en fonction de sa valeur au point x, par $u(0) = C^{-1}(x)u(x)$. $C(x)$ est l'unique solution usuelle de l'équation différentielle matricielle

$$\text{(V, 6 ; 11)} \quad \frac{dC}{dx} + AC = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dC_{jk}}{dx} + \sum_l A_{jl}C_{lk} = 0,$$

qui, pour $x = 0$, soit la matrice identique I. Nous pouvons alors résoudre (V, 6 ; 8) par la méthode des « constantes variables ». On pose

$$\text{(V, 6 ; 12)} \qquad T = CS \qquad \text{ou} \qquad T_j = \sum_k C_{j,k}S_k,$$

ce que l'on peut faire d'une manière et d'une seule quelle que soit T, car S est déterminée par

$$\text{(V, 6 ; 13)} \qquad S = C^{-1}T.$$

Alors, suivant un calcul classique, on aura le systéme équivalent à (V, 6 ; 8) :

$$\text{(V, 6 ; 14)} \qquad C\frac{dS}{dx} = B \qquad \text{ou} \qquad \frac{dS}{dx} = C^{-1}B.$$

On est ainsi ramené à la recherche d'une primitive d'une distribution ; il y a toujours une infinité de solutions, quelle que soit B.

La différence entre 2 solutions est une solution arbitraire du systéme homogène ; alors, pour celle-ci, B $= 0$, donc S est, d'après le théorème I du chapitre II, une constante $k = \{ k_1, k_2, \ldots k_N \}$, et $T = Ck$ est une solution *usuelle* du systéme homogéne.

Le fait que le système homogéne n'ait pas d'autres solutions que ses solutions usuelles peut se voir d'une autre maniére. Si une solution T du système homogéne est d'ordre $\leqslant l$ ($l \geqslant 1$) (resp. une mesure, une fonction, une fonction l fois continûment différentiable), la formule (V, 6 ; 8) (avec B $= 0$) montre qu'il en est de même de $\frac{dT}{dx}$; mais alors, d'aprés les théorémes II, III, du chapitre II, et leurs conséquences, T est d'ordre $\leqslant l - 1$ (resp. une fonction, une fonction continue, une fonction $l + 1$ fois continûment différentiable). Mais comme, d'aprés le théorème XX du chapitre III, T est nécessairement d'ordre $< +\infty$ sur tout compact, elle est nécessairement une fonction indéfiniment dérivable, donc solution usuelle du système homogène. Plus généralement, si B est une fonction continue, le système n'a pas d'autres solutions que ses solutions usuelles.

Supposons maintenant le système (V, 6 ; 1) irrégulier. Alors en général il n'aura pas de solutions. Par exemple, pour N $= 1$, l'équation du 1er ordre

$$\text{(V, 6 ; 15)} \qquad x^3\frac{dT}{dx} + 2T = 0$$

a pour seules solutions, dans l'ouvert complémentaire de l'origine :

$$\text{(V, 6 ; 16)} \qquad \begin{cases} T = k_1 \exp(1/x^2) & \text{pour} \quad x > 0, \\ \phantom{T = {}} k_2 \exp(1/x^2) & \text{pour} \quad x < 0. \end{cases}$$

Or on peut voir qu'il n'existe pas de distribution prolongeant T au voisinage de l'origine (si k_1 ou k_2 est $\neq 0$), à cause de la croissance trop rapide de T pour $x \to 0$ (voir plus loin théorème VIII du chapitre VII). Le système (V, 6 ; 15) n'a pas d'autre solution que 0. Au contraire dans des cas où les conditions du théorème de Fuchs sont réalisées, le système a des solutions dépendant de plus de N constantes. Ainsi, pour N = 1, l'équation du 1[er] ordre.

$$\text{(V, 6 ; 17)} \qquad x\frac{dT}{dx} - \lambda T = 0,$$

a pour solution générale, dépendant de 2 constantes [voir formules (II, 2 ; 27 et 28)] :

$$\text{(V, 6 ; 18)} \quad \begin{cases} T = k_1(\text{Pf. } x^\lambda)_{x>0} + k_2(\text{Pf. } |x|^\lambda)_{x<0} \\ \text{pour } \lambda \text{ distinct des entiers} < 0. \\ T = k\text{Pf. } (x^{-l}) + k'\delta^{(l-1)} \\ \text{pour } \lambda = -l, \text{ entier} < 0. \end{cases}$$

Une propriété des solutions des équations aux dérivées partielles

Théorème X *Les solutions d'un système d'équations aux dérivées partielles forment un sous-espace vectoriel fermé dans l'espace des distributions*

En effet si, dans $(\mathcal{D}')$, des solutions T_j (dépendant de j) convergent vers une distribution limite T, DT est limite des DT_j à cause de la continuité de l'opérateur D, donc DT = B.

On ne démontre habituellement ce théorème que pour l'équation de Laplace (*toute limite uniforme de fonctions harmoniques est harmonique*) ou les équations elliptiques, alors qu'il est valable pour toutes les équations aux dérivées partielles. Cela tient à ce que, dans le cas d'une équation hyperbolique par exemple, si $B = g$ est une fonction, si les T_j sont des fonctions f_j, solutions usuelles de l'équation, convergeant uniformément vers une fonction limite f, f n'est peut-être pas dérivable au sens usuel et alors n'est pas une solution usuelle ; elle est seulement une solution en théorie des distributions. Au contraire, nous verrons plus loin que, pour une équation elliptique, toute distribution solution est une fonction indéfiniment dérivable : voir théorème XII. Pour revenir au cas habituel, on déduit du théorème X :

Si des solutions usuelles f_j d'un système aux dérivées partielles d'ordre m convergent uniformément sur tout compact vers une fonction

(1) Le cas général des équations du type de Fuchs pour les distributions a été résolu par Methée [2]

limite f, et si f est m fois continûment différentiable, alors f est une solution usuelle du système, bien qu'aucune hypothèse ne soit faite sur la convergence des dérivées de f_j, qui d'ailleurs effectivement ne convergent pas, en général, au sens usuel, vers des limites.

Le problème de Cauchy Sous sa forme élémentaire, le problème de Cauchy consiste dans la recherche d'une solution usuelle $T = f$ d'un système d'équations aux dérivées partielles (V, 6 ; 1) (où B est une fonction g) d'ordre m, connaissant ses dérivées d'ordre $\leqslant m-1$, sur une hypersurface S suffisamment régulière. Si ∂ est une dérivation transversale définie au voisinage de S (chap. II, § 3, exemple 5), les dérivées transversales $\partial^k f$, $(0 \leqslant k \leqslant m-1)$ déterminent évidemment sur S toutes les autres dérivées d'ordre $\leqslant m-1$. On pose souvent un problème de Cauchy plus fin, en exigeant seulement que f soit m fois continûment différentiable dans l'ouvert Ω complémentaire de S, vérifie (V, 6 ; 1) dans Ω, et que les dérivées transversales $\partial f^k (0 \leqslant k \leqslant m-1)$ définies dans Ω, aient des limites données $f^{(k)}$ sur S (l'expression « limite sur S » peut être prise dans un sens très général), mais on ne suppose pas l'existence de dérivées tangentielles de f sur S. On peut naturellement se borner au problème de Cauchy local.

Cherchons alors f au voisinage de S, mais d'un seul côté, dans l'une des 2 composantes connexes Ω', Ω'', de Ω au voisinage de S. Soient f', g', les fonctions égales à f, g, dans Ω', à 0 dans Ω''. En supposant par exemple l'hypersurface S et le champ de dérivation ∂ m fois continûment différentiables, et en appliquant la méthode du chapitre II, § 3, exemple 1, on voit que Df' est, au voisinage de S, la somme de la dérivée usuelle $[Df'] = g'$ et d'une couche multiple H portée par S, entièrement déterminée par les données de Cauchy $f^{(k)}(k \leqslant m-1)$. C'est évident pour le problème de Cauchy élémentaire. Pour le problème de Cauchy fin, on remplace S par une hypersurface voisine située dans Ω', sur laquelle par conséquent f' est m fois continûment différentiable, et on fait ensuite tendre cette hypersurface vers S. La fonction $T' = f'$ est alors astreinte à 3 sortes de conditions :

1° Elle doit être, au sens de la théorie des distributions, solution d'un système aux dérivées partielles à 2e membre modifié :

$$DT' = g' + H, \tag{V, 6 ; 19}$$

où H dépend des données initiales $f^{(k)}$.

2° Son support doit être dans $\overline{\Omega'} = \Omega' \cup S$.

3° Elle doit vérifier certaines conditions de régularité : elle doit être une fonction f', m fois continûment différentiable dans Ω', dont les dérivées $\partial^k f'(k \leqslant m - 1)$ doivent avoir des limites sur S.

Le nouveau problème ainsi posé est-il équivalent au problème de Cauchy initial ? Il ne le sera que si les limites des $\partial^k f'$ sur S sont égales aux fonctions données $f^{(k)}$, c'est-à-dire si 2 systèmes distincts de données initiales définissent 2 distributions H distinctes. On peut montrer qu'il en est toujours ainsi si S est, en tout point, « non caractéristique » ; il n'en est jamais ainsi si S est une « hypersurface caractéristique ».

Exemples Soit l'équation (N = 1)

$$\frac{\partial^m T}{\partial x_n^m} + \sum_{|p| \leqslant m,\, p_n < m} A_p D^p T = B. \tag{V, 6 ; 20}$$

S est l'hyperplan $x_n = 0$, Ω' la région $x_n > 0$; $\partial = \partial/\partial x_n$. Alors

$$\text{(V, 6 ; 21)}\quad H = \sum_{\nu=1}^{\nu=m} f^{(\nu-1)}_{x_1, x_2, \dots x_{n-1}} \otimes \left(\frac{d}{dx_n}\right)^{m-\nu} \delta_{x_n}$$
$$+ \sum_p A_p(x) \left[\sum_{\nu=1}^{\nu=p_n} \frac{\partial^{|p|-p_n}}{\partial x_1^{p_1} \dots \partial x_{n-1}^{p_{n-1}}} f^{(\nu-1)}_{x_1, x_2, \dots x_{n-1}} \otimes \left(\frac{d}{dx_n}\right)^{p_n-\nu} \delta_{x_n}\right]$$

(le signe $\otimes$ indique un produit tensoriel (chapitre IV) d'une distribution en $x_1, x_2, \dots x_{n-1}$, et d'une distribution en x_n ; les dérivées tangentielles des $f^{(k)}$ sont des distributions $\in (\mathcal{D}')_{x_1, \dots x_{n-1}}$). Si $H = 0$, on voit, en annulant successivement les couches d'ordre m, $m - 1$, ... [à cause de l'unicité de la décomposition (III, 10 ; 5), (IV, 5 ; 7)] que $f^{(0)} = f^{(1)} \dots = f^{(m-1)} = 0$.

b) Soit l'équation (N = 1, $n = 2$, $m = 2$)

$$\partial^2 T/\partial x_1 \partial x_2 = B. \tag{V, 6 ; 22}$$

S et ∂ étant choisis comme dans *a*). S est alors une caractéristique. On a

$$H = \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x_1} \otimes \delta_{x_2} \quad ; \tag{V, 6 ; 23}$$

$H = 0$ entraîne seulement $f^{(0)} =$ constante, $f^{(1)}$ restant arbitraire.

Dans le problème de Cauchy ainsi posé en théorie des distributions, la condition (1°) *ne distingue plus les données initiales du*

2e *membre*, ce qui explique les formules habituelles de la théorie des équations aux dérivées partielles. La condition (2°) résultera en général immédiatement des propriétés du support de la solution élémentaire. Seule la condition (3°) sera délicate à vérifier. Il est d'ailleurs bien connu qu'elle n'a pas de solution satisfaisante, puisqu'elle exige pour les données des conditions de différentiabilité plus restrictives que l'équation donnée ne semblerait l'exiger. En théorie des distributions, on pourra considérer le problème de Cauchy comme résolu d'une façon satisfaisante si on a trouvé une distribution T′ vérifiant les conditions 1° et 2°. Dans des cas importants (voir chapitre VI, § 5, formule (VI, 5 ; 26)), le problème ainsi posé est relativement simple, et a une solution et une seule ; que celle-ci soit une distribution quelconque ou une fonction assez régulière (condition 3°), c'est un problème plus fin et secondaire.

Si maintenant on résout le problème de Cauchy pour Ω'', avec le même 2e membre g et les mêmes données initiales $f^{(k)}$, on doit remplacer H par — H. En additionnant alors les distributions trouvées T′, T″, H disparaît, et on obtient le théorème de prolongement suivant :

THÉORÈME XI *Si* (V, 6 ; 1) *est un système aux dérivées partielles d'ordre m où le* 2e *membre est une fonction continue g, si* S *est une hypersurface et* ∂ *une dérivation transversale donnée au voisinage de* S, S *et* ∂ *étant m fois continûment différentiables, enfin si f est une fonction continue qui, dans* Ω' *et* Ω'', *est m fois continûment différentiable et vérifie* (V,6; 1), *et qui satisfait aux mêmes conditions initiales de Cauchy sur* S, *de part et d'autre de* S, *alors f vérifie* (V, 6 ; 1) *dans* R^n, *au sens de la théorie des distributions.*

Naturellement f n'est peut-être pas une solution usuelle du système, puisque sur S elle n'a peut-être pas de dérivées tangentielles. C'est pourquoi, comme pour le théorème X, on n'énonce habituellement ce théorème que pour des équations elliptiques :

2 *fonctions harmoniques définies de part et d'autre de* S, *qui se raccordent sur* S *ainsi que leurs dérivées normales, sont le prolongement l'une de l'autre.*

Solution élémentaire Considérons d'abord le cas d'une seule équation (N = 1) d'ordre m. Les définitions habituelles d'une solution élémentaire comme solution usuelle du système homogène ayant en un point une singularité d'un certain type, doivent, à notre

avis, être totalement rejetées. Nous appellerons solution élémentaire relative au point a de R^n et à l'opérateur différentiel D toute distribution $e_{(a)}$ vérifiant

$$\text{(V, 6 ; 24)} \qquad De_{(a)} = \delta_{(a)} = \text{masse} + 1 \text{ au point } a.$$

Cela revient à dire que, si D' est le transposé de l'opérateur D, et si $\varphi \in (\mathcal{D})$,

$$\text{(V, 6 ; 25)} \qquad e_a . D'\varphi = \varphi(a).$$

Une solution élementaire peut n'exister que localement, au voisinage de a. Il y a évidemment une infinité de solutions élémentaires relatives à a dès qu'il y en a une : la différence entre deux d'entre elles est une solution arbitraire de l'équation homogène DT = 0.

Nous avons donné une solution élémentaire relative à l'origine pour les opérateurs différentiels

$$D = \Delta^k \text{ (II, 3 ; 19)}, \left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k \text{ (II, 3 ; 22)}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \text{ (II, 3 ; 28)},$$
$$\Box^k \text{ (II, 3 ; 34)}, \partial^k/\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_k \text{ (IV, 5 ; 11)}.$$

Une solution élémentaire relative à un point a quelconque de R^n s'obtient par translation puisque les opérateurs considérés sont à coefficients constants, donc invariants par translation. Pour une équation différentielle ($n = 1$) d'ordre m de la forme (V, 6 ; 20), la formule (V, 6 ; 21) montre que la fonction f, égale à 0 poür $x < a$, et égale, pour $x \geqslant a$, à la solution du problème de Cauchy homogène correspondant aux données initiales

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(m-2)}(a) = 0, f^{(m-1)}(a) = 1$$

(dérivées prises au sens usuel), est une solution élémentaire relative au point a ; c'est d'ailleurs la seule dont le support soit contenu dans la demi-droite $x \geqslant a$, car une autre solution élémentaire s'obtient en ajoutant une solution de l'équation homogène, dont le support est l'axe réel tout entier (c'est évident pour les solutions *usuelles* de l'équation homogène puisqu'une solution nulle en un point ainsi que ses dérivées d'ordre $\leqslant m - 1$ est identiquement nulle ; et il n'y a pas d'autres solutions que les solutions usuelles, d'après le théorème IX).

Pour des systèmes (N quelconque), la solution élémentaire est définie comme une matrice $e_{(a)}$, à N lignes et N colonnes, dont les

N^2 coefficients sont des distributions $e_{(a);j,k}$, et qui vérifie l'équation matricielle

$$(\text{V, 6 ; 26}) \qquad De_{(a)} = I\delta_{(a)} \text{ ; } I = \text{matrice identique,}$$

ou encore, en détaillant la notation :

$$(\text{V, 6 ; 27}) \qquad \sum_{|p| \leqslant m \,;\, k=1,\ldots,N} A_{p;j,k}(x) D^p e_{(a);kl} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq l, \\ \delta_{(a)} & \text{si } j = l. \end{cases}$$

Par exemple, pour le système différentiel ($n = 1$) (V, 6 ; 8), une solution élémentaire relative à l'origine est YC, où Y est la fonction d'Heaviside (chapitre II, § 2, exemple 1), et C la matrice définie à la formule (V, 6 ; 11), car

$$(\text{V, 6 ; 28}) \quad \frac{d}{dx}(YC) + AYC = \delta I + Y\frac{dC}{dx} + YAC = \delta I.$$

Une solution élémentaire relative à a serait la fonction

$$Y(x - a)\, C(x)\, C^{-1}(a).$$

Cette solution élémentaire ici encore est la seule dont le support soit contenu dans la demi-droite $x \geqslant a$.

Revenons au cas $N = 1$. Si φ est une fonction assez différentiable, à support compact, solution d'une équation avec 2e membre $D'\varphi = \psi$, alors la formule (V, 6 ; 25) donne

$$(\text{V, 6 ; 29}) \qquad \varphi(a) = e_{(a)}.\psi.$$

Ainsi on connaît la valeur en a d'une solution d'une équation avec 2e membre, si on possède une solution élémentaire relative à a de l'équation adjointe (1).

(1) Nous ne saurions donner ici toute la littérature relative aux solutions élémentaires. C'est avant tout le travail de M. Hadamard [1] sur le problème de Cauchy qui a mis en valeur l'importance essentielle de la solution élémentaire ; la solution élémentaire de Hadamard, dans le cas d'une dimension n impaire, n'est pas prise dans le même sens qu'ici, et n'a donc aucun rapport avec celle que nous donnons (formule (II, 3 ; 34)). Signalons, par ailleurs : Zeilon [1], [2], Herglotz [1], Bureau (recherches systématiques et expressions explicites, pour diverses équations, notamment hyperboliques : [1], [2], [3], [4], etc...), Marcel Riesz [2] (les opérateurs de M. Riesz, qui sont des convolutions avec la solution élémentaire dans le cas d'équations à coefficients constants, résolvent le probléme de Cauchy en évitant les difficultés de calcul de la méthode de Hadamard), Leray [2], F. John [1], Kodaira [1], de Rham [3], Garnir, notamment [3], [4], Garding [1], Schwartz [12]. Toute équation aux dérivées partielles à coefficients constants a une solution élémentaire : Malgrange [1], [2], Ehrenpreis [1], Hörmander [1], [2]

Noyau élémentaire

Un noyau (¹) sur R^n est une distribution sur $R^n \times R^n$. Un tel noyau $K_{x,\xi}$ définit une forme linéaire continue sur $(\mathcal{D})_{x,\xi}$, donc a fortiori une forme bilinéaire hypocontinue sur $(\mathcal{D})_x \times (\mathcal{D})_\xi$:

$$(u, v) \to K_{x,\xi} . u(x)\, v(\xi), u \in (\mathcal{D})_x, v \in (\mathcal{D})_\xi.$$

Alors $u \to K . uv$ est une forme linéaire continue sur $(\mathcal{D})_x$, donc une distribution $\in (\mathcal{D}')_x$; cette distribution dépend linéairement de $v \in (\mathcal{D})_\xi$, nous la noterons $K \cdot v$; $v \to K \cdot v$ est une application linéaire continue ${}^t L_K$ de $(\mathcal{D})_\xi$ dans $(\mathcal{D}')_x$. De même $v \to K . uv$ est une forme linéaire continue sur $(\mathcal{D})_\xi$ donc une distribution $\in (\mathcal{D}')_\xi$, qui dépend linéairement de u et que nous noterons $u \cdot K$; $u \to u \cdot K$ est une application linéaire continue de $(\mathcal{D})_x$ dans $(\mathcal{D}')_\xi$, transposée de ${}^t L_K$ et que nous noterons L_K.

Si K est une fonction localement sommable, elle est localement sommable en ξ (resp. x), pour presque toutes les valeurs de x (resp. ξ), d'après le théorème de Fubini, et on a, pour presque toutes les valeurs de x (resp. ξ) :

$$(K \cdot v)(x) = \int\!\!\int \cdots \int K(x, \xi)\, v(\xi)\, d\xi$$

$$(u \cdot K)(\xi) = \int\!\!\int \cdots \int K(x, \xi)\, u(x)\, dx.$$

Un noyau K est dit *semi-régulier en x*, ou semi-régulier à gauche, si ${}^t L_K$ applique $(\mathcal{D})_\xi$ dans $(\mathcal{E})_x$, auquel cas c'est une application linéaire *continue* de $(\mathcal{D})_\xi$ dans $(\mathcal{E})_x$ (comme on le voit en appliquant par exemple le théorème du graphe fermé (²) : comme ${}^t L_K$ est continue de $(\mathcal{D})_\xi$ dans $(\mathcal{D}')_x$, son graphe est fermé dans $(\mathcal{D})_\xi \times (\mathcal{D}')_x$ et a fortiori dans $(\mathcal{D})_\xi \times (\mathcal{E})_x$). Par transposition, cela revient à dire que ${}^t L_K$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $(\mathcal{E}')_x$ dans $(\mathcal{D}')_\xi$.

De même, un noyau K est dit *semi-régulier en* ξ, ou semi-régulier à droite, si L_K applique $(\mathcal{D})_x$ dans $(\mathcal{E})_\xi$, c'est alors une application linéaire *continue* de $(\mathcal{D})_x$ dans $(\mathcal{E})_\xi$; cela revient à dire que ${}^t L_K$ se prolonge par continuité en une application linéaire continue de $(\mathcal{E}')_\xi$ dans $(\mathcal{D}')_x$.

(¹) Voir Schwartz [7], [9], [10], [11]. Nous appelons ici ${}^t L_K$ ce que nous appelions $\mathcal{L}_K$ dans [7]

(²) Voir Bourbaki [6], fascicule XV, corollaire 5 du théorème 1, page 37. Le théorème du graphe fermé, valable pour une application d'un espace de Fréchet dans un autre, est encore trivialement valable pour une application d'un espace $\mathcal{LF}$ dans un espace de Fréchet

Un noyau K est dit *régulier* s'il est à la fois semi-régulier en x et semi-régulier en ξ. Les conditions pour qu'un noyau soit semi-régulier ou régulier ne nous importent pas ici (¹).

Un noyau K est dit *très régulier*, s'il est semi-régulier en ξ, et si, pour toute $S \in (\mathcal{E}')_\xi$, K·S est une fonction indéfiniment dérivable dans tout ouvert de R^n où S est une fonction indéfiniment dérivable. Cela entraîne que K soit semi-régulier en x, donc régulier. Si K est trés régulier, il est égal, dans le complémentaire de la diagonale $x = \xi$ de $R^n \times R^n$, à une fonction indéfiniment dérivable de x et ξ (Soient en effet Ω_1 et Ω_2 deux ouverts sans point commun de R^n ; si $S \in (\mathcal{E}')_\xi$ a son support dans Ω_1, K·S doit être une fonction indéfiniment dérivable dans Ω_2, donc K définit une application linéaire $({}^t L_K)_{\Omega_1, \Omega_2}$ de $(\mathcal{E}'_{\Omega_1})$ dans $(\mathcal{E}_{\Omega_2})$; cette application est continue d'aprés le théorème du graphe fermé, applicable ici parce que $(\mathcal{E}')$ est dual d'un espace de Fréchet réflexif, donc bornologique et complet, et $(\mathcal{E})$ un espace de Fréchet (²) ; K est donc un noyau *régularisant* (³), donc une fonction indéfiniment dérivable, dans $\Omega_1 \times \Omega_2$ et par suite dans le complémentaire de la diagonale). Réciproquement, si un noyau K régulier est une fonction indéfiniment différentiable dans le complémentaire de la diagonale, K est très régulier (Soit en effet $S \in (\mathcal{E}')_\xi$, égale à une fonction indéfiniment dérivable dans un ouvert Ω de R^n, qu'on peut supposer relativement compact. Soit ω un ouvert d'adhérence contenue dans Ω ; et soit α une fonction de $(\mathcal{D})$ égale à 1 dans ω et de support contenu dans Ω. Alors α S est dans $(\mathcal{D})_\xi$, donc K·αS est une fonction indéfiniment dérivable puisque K est semi-régulier en x. D'autre part, K étant semi-régulier en ξ, K·S et K·$(1 - \alpha)$ S ont un sens ; K étant une fonction indéfiniment dérivable dans $\omega \times \complement\bar{\omega}$, c'est un noyau régularisant, autrement dit $({}^t L_K)_{\omega, \complement\bar{\omega}}$ est une application linéaire continue de $(\mathcal{E}'_{\complement\bar{\omega}})$ dans $(\mathcal{E}_\omega)$, et K·$(1 - \alpha)$ S est dans ω une fonction indéfiniment dérivable. Cela prouve que K·S est une fonction indéfiniment dérivable dans ω et par suite dans Ω, donc K est très régulier). Si K est très régulier, et si S converge vers

(¹) Voir SCHWARTZ [7], pages 227-228, et [10], propositions 23 et 24, page 55

(²) Voir BOURBAKI [6], fascicule XVIII, exercice 13 *d*, page 36, pour la validité du théorème du graphe fermé; pour le fait que $(\mathcal{E}')$ soit bornologique, voir GROTHENDIECK [4], page 73, théorème 7

(³) Voir SCHWARTZ [7], théorème 8, pages 228-229

0 dans $(\mathcal{E}')_\xi$, tandis que sa restriction à un ouvert Ω converge vers 0 dans $(\mathcal{E}_\Omega)$, alors K·S converge vers 0 dans $(\mathcal{D}')_x$ tandis que sa restriction à Ω converge vers 0 dans $(\mathcal{E}_\Omega)$ (en reprenant les notations ci-dessus, on voit en effet que K·αS converge vers 0 dans $(\mathcal{E})_x$ puisque K est semi-régulier en x, et que K·$(1 - \alpha)$ S converge vers 0 dans $(\mathcal{E}_\omega)$ parce que K, restreint à $\omega \times \complement_{\overline{\omega}}$, est régularisant).

Un noyau K est dit *analytiquement très régulier*, s'il est semi-régulier en ξ, et si K·S est une fonction analytique dans tout ouvert de R^n où S est une fonction analytique. Nous n'examinerons pas à quelle condition un noyau possède cette propriété (1)

Définition. *Soit* D *un opérateur différentiel sur* R^n, *à coefficients indéfiniment dérivables. Un noyau* E *est dit noyau élémentaire (ou noyau inverse) à gauche (resp. à droite) pour* D, *si, quelle que soit* $\varphi \in (\mathcal{D})_\xi$, *on a :*

(V, 6 ; 30) $$E{\cdot}D\varphi = \varphi \ (\textit{resp.}\ D(E{\cdot}\varphi) = \varphi).$$

Si E est semi-régulier en ξ, la même relation reste valable quand on remplace φ par $S \in (\mathcal{E}')_\xi$, en prolongeant par continuité.

Si D est un opérateur différentiel matriciel à N lignes et N colonnes, alors un noyau élémentaire est aussi matriciel, c'est une matrice à N lignes et N colonnes dont les éléments sont des noyaux, et qui vérifie les mêmes relations (V, 6 ; 30) ($E{\cdot}D\varphi = \varphi$, dans le cas d'un noyau élémentaire à gauche, signifiant

$$\sum_{k,l} E_{j,k}{\cdot}D_{k,l}\,\varphi_l = \varphi_j, \quad \text{pour} \quad j = 1, 2, \ldots N).$$

Si D a un noyau élémentaire à gauche E, il existe *au plus une* solution, appartenant à $(\mathcal{D})$, de l'équation avec second membre $D\varphi = \psi \in (\mathcal{D})$, car on a nécessairement $\varphi = E{\cdot}\psi$.
Le même résultat reste valable en remplaçant $(\mathcal{D})$ par $(\mathcal{E}')$, si E est semi-régulier en ξ.

Si D a un noyau élémentaire à droite E, il existe *au moins une* solution de l'équation avec second membre $DT = \psi \in (\mathcal{D})$, car $T = E{\cdot}\psi$ est une telle solution. Le même résultat reste valable en remplaçant $(\mathcal{D})$ par $(\mathcal{E}')$, si E est semi-régulier en ξ.

Ainsi s'il existe un noyau élémentaire à gauche on a des théorêmes d'unicité, s'il existe un noyau élémentaire à droite on a des théo-

(1) Voir de Barros-Neto et Browder [1], et de Barros-Neto [1]

rèmes d'existence. On conçoit que l'existence d'un noyau élémentaire *bilatère*, c. a. d. à la fois à gauche et à droite, soit très utile [1].

Il est intéressant de connaître la relation entre les notions de solution élémentaire et de noyau élémentaire.

Soit E un noyau semi-régulier en x. Pour tout a de R^n, la valeur au point a de $E\cdot\varphi$ est une forme linéaire continue de $\varphi \in (\mathcal{D})$, donc définit une distribution $e_{(a)}$. De plus $a \to e_{(a)}.\ \varphi = (E\cdot\varphi)\ (a)$ est une fonction indéfiniment dérivable, de sorte que, dans $(\mathcal{D}')$, la distribution $e_{(a)}$ dépend du paramètre a de manière indéfiniment dérivable. Il est alors équivalent de dire que E est noyau élémentaire à gauche de D, ou de dire que, pour tout a de R^n, $e_{(a)}$ est solution élémentaire relative au point a pour l'opérateur transposé D′ de D. En effet (V, 6 ; 30) revient à dire que, pour tout a de R^n, on a

$$\text{(V, 6 ; 31)} \quad (E\cdot D\varphi)\ (a) = \varphi(a), \text{ ou } e_{(a)}.D\varphi = \varphi(a) \text{ ou } D'e_{(a)} = \delta_{(a)}.$$

Ainsi la connaissance d'un noyau élémentaire à gauche de D, *semi-régulier en x, entraîne la connaissance, pour tout* a, *d'une solution élémentaire relative à* a *pour* D′, *dépendant de* a *de manière indéfiniment dérivable. On démontre la réciproque* [2].

Par un raisonnement analogue, on voit que *la connaissance d'un noyau élémentaire à droite de* D, *semi-régulier en* ξ, *entraîne la connaissance, pour tout* a, *d'une solution élémentaire relative à* a *de* D *lui-même, dépendant de* a *de manière indéfiniment dérivable ; et réciproquement.* C'est ainsi que, si D est à coefficients constants, et si e est une solution élémentaire pour D relative à l'origine, sa translatée de a est une solution élémentaire relative à a et elle dépend de a de manière indéfiniment dérivable ; on en déduit donc l'existence d'un noyau qu'on peut écrire $e_{x-\xi}$, qui est un noyau élémentaire à droite de D et qui est régulier [3]; pour $T \in (\mathcal{E}')$, $e_{x-\xi}\cdot T$ est le produit de convolution $e * T$ (voir chapitre VI). Nous ne détaillerons

(1) On voit que le noyau élémentaire ne résout qu'incomplètement les théorèmes d'existence, puisqu'on doit faire sur le second membre une restriction : son support doit être compact. Cette restriction peut être levée pour les problèmes de Cauchy relatifs aux systèmes hyperboliques (dans le cas de coefficients constants, voir pages 176-180. Voir aussi Malgrange [1], Ehrenpreis [1]

(2) Voir dans Schwartz [7], page 228, ou [9], propositions 23 et 24, page 55, la caractérisation des noyaux semi-réguliers

(3) Voir Schwartz [7], formule (25), page 228, et [9], proposition 2, 4, pages 55-56

pas plus cette question ; disons seulement que, si $N = 1$, $e_{x-\xi}$ est aussi noyau élémentaire à gauche donc bilatère de D ; et que le noyau symétrique $e_{\xi-x}$ est noyau élémentaire bilatère de l'opérateur adjoint D′. Si e est une fonction, $e_{x-\xi}$ et $e_{\xi-x}$ sont les fonctions $e(x - \xi)$ et $e(\xi - x)$.

Dans la pratique, la plupart des procédés donnant des solutions élémentaires des systèmes aux dérivées partielles donnent en même temps des noyaux élémentaires réguliers. Bornons-nous à signaler que, pour tout système du type (V, 6 ; 8) ($n = 1$), la fonction

$$\text{(V, 6 ; 32)} \qquad E(x, \xi) = Y(x - \xi)\, C(x)\, C^{-1}(\xi)$$

est un noyau élémentaire bilatère très régulier, analytiquement très régulier si les coefficients du système sont des fonctions analytiques.

Régularité des solutions des systèmes elliptiques   Contrairement à ce que nous avons vu pour les équations différentielles ($n = 1$) (théorème IX), une équation aux dérivées partielles ($n > 1$) homogène ($B = 0$) a en général d'autres solutions que ses solutions usuelles ; elle peut avoir pour solutions des fonctions continues sans dérivée usuelle, des mesures, des distributions quelconques. Par exemple la solution générale de l'équation (V, 6 : 22) pour $B = 0$, est

$$\text{(V, 6 ; 33)} \qquad T = U + V,$$

U dépendant seulement de x_1, V seulement de x_2 ; U et V sont à part cela quelconques. De même toute équation ($N = 1$) du 1er ordre ($m = 1$) à coefficients réels a toujours des solutions qui sont des distributions d'ordre local arbitrairement élevé. Il en est ainsi en général pour tout système hyperbolique. Il y a d'ailleurs longtemps qu'on utilise des fonctions discontinues, solutions d'équations hyperboliques ; mais la définition du mot « solution » est souvent d'une grande complication.

Il existe par contre des catégories de systèmes homogènes pour lesquelles toutes les distributions solutions sont nécessairement des fonctions indéfiniment dérivables, solutions usuelles du système.

Définition. Un opérateur différentiel (matriciel) D *est dit hypo-elliptique (resp. analytique-hypo-elliptique), si* T *est une fonction indéfiniment dérivable (resp. une fonction analytique) dans tout ouvert de*

R^n où DT*est une fonction indéfiniment dérivable* (*resp. une fonction analytique*). *Alors toute solution* T *de l'équation homogène est une fonction indéfiniment dérivable* (*resp. une fonction analytique*) [1].

En analyse classique, on dit qu'un opérateur différentiel est elliptique si l'ensemble de ses termes de plus haut degré vérifie certaines conditions de positivité (si par exemple, dans le cas d'un opérateur du second ordre pour N = 1,

$$D = \sum_{j,k} g_{jk} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_j a_j \frac{\partial}{\partial x_j} + b,$$

la forme quadratique $\sum_{j,k} g_{jk}\, \xi_j \xi_k$ est définie positive (ou définie négative). On démontre alors (théorème de Bernstein [2]) que les solutions de l'équation homogène sont indéfiniment dérivables, et analytiques si les coefficients de D sont analytiques. On étend cette propriété, et on montre que l'opérateur D défini ci-dessus, en particulier le laplacien Δ [3], est hypoelliptique. On définit plus généralement des opérateurs elliptiques d'ordre quelconque, et on démontre leur hypoellipticité [4].

Théorème XII. *Si* D *est un opérateur différentiel* (*matriciel*) *à coefficients indéfiniment dérivables, ayant un noyau élémentaire à gauche très régulier* (*resp. analytiquement très régulier*) $E_{x,\xi}$, *il est hypo-elliptique* (*resp. analytique hypo-elliptique*). *Si alors* T *converge vers* 0 *dans* ($\mathcal{D}'$), *et si* DT *converge vers* 0 *dans* ($\mathcal{E}$) (*en particulier si* T *est solution de l'équation homogène* DT = 0), *alors* T *converge vers* 0 *dans* ($\mathcal{E}$) [5].

[1] Le mot « elliptique », employé dans la 1ère édition, prêtait trop à confusion. C'est pourquoi nous employons maintenant « hypo-elliptique », laissant à « elliptique », son sens classique

[2] S. Bernstein [2]

[3] Le fait que toute *fonction f* vérifiant, au sens des *distributions*, l'équation de Laplace $\Delta f = 0$, soit indéfiniment dérivable, donc solution au sens usuel de l'équation de Laplace, a été souvent utilisé dans la théorie des fonctions harmoniques (lemme de Weyl, H. Weyl [1])

[4] Voir Malgrange [4], Schwartz [16 *bis*], Hormander [3], partie III, chapitre VII, 7.4, page 176

[5] Les conditions données dans la première édition ne faisaient pas intervenir les notations de la théorie des noyaux, ce qui les rendait peu suggestives. Elles étaient d'ailleurs insuffisantes : elles revenaient à supposer que le noyau élémentaire à gauche est semi-régulier en x, et fonction indéfiniment dérivable dans le complémentaire de la diagonale, alors qu'il faut en outre supposer le noyau élémentaire semi-régulier en ξ, donc régulier et par suite très régulier. Il y avait en fait une erreur dans la démonstration page 138, lignes 14 à 4 du bas : en effet on ne connaît pas de points au voisinage desquels βT est une fonction indéfiniment dérivable, puisque c'est précisément cette différentiabilité qu'on veut démontrer !

Supposons d'abord T à support compact. Alors, E étant noyau élémentaire à gauche, et semi-régulier à droite, on a $T = E \cdot DT$. Mais alors, E étant très régulier (resp. analytiquement très régulier), T est bien une fonction indéfiniment dérivable (resp. une fonction analytique) dans tout ouvert de R^n où DT a cette propriété.

Supposons maintenant T à support quelconque, et soit Ω un ouvert de R^n où DT est une fonction indéfiniment dérivable (resp. une fonction analytique). Soit ω un ouvert d'adhérence contenue dans Ω, et relativement compact. Soit β une fonction appartenant à $(\mathcal{D})$, de support contenu dans Ω, et égale à 1 dans ω. Alors βT est à support compact, et $D(\beta T)$ est dans ω égale à DT, donc fonction indéfiniment dérivable (resp. analytique) ; il en est donc de même de βT, donc de T dans ω et par suite dans Ω, et D est bien hypo-elliptique (resp. analytique hypo-elliptique).

Supposons enfin que T converge vers 0 dans $(\mathcal{D}')$ et que DT converge vers 0 dans $(\mathcal{E}_\Omega)$. Alors βT converge vers 0 dans $(\mathcal{E}')$ et $D(\beta T)$ converge vers 0 dans $(\mathcal{E}_\omega)$. D'aprés la propriété des noyaux très réguliers indiquée page 140, $\beta T = E \cdot D(\beta T)$ converge vers 0 dans $(\mathcal{E}_\omega)$, donc T converge vers 0 dans $\mathcal{E}_\omega$ et par suite dans $(\mathcal{E}_\Omega)$, c. q. f. d. (1).

Remarque

Nous avons utilisé l'outil puissant du noyau élémentaire. On serait arrivé au même résultat avec une « paramétrix à gauche » trés régulière de D, c. a. d. un noyau ϖ trés règulier vérifiant

(V, 6 ; 34) $$\varpi \cdot D\varphi = \varphi + L \cdot \varphi\,,$$

où L est une fonction indéfiniment dérivable en x, ξ, sur $R^n \times R^n$ tout entier. Si ϖ est une telle paramétrix, $\alpha(x - \xi)\,\varpi_{x,\xi}$ en est une autre, si $\alpha \in (\mathcal{D})$ est égale à 1 au voisinage de l'origine ; cela permet d'utiliser des paramétrix nulles dans l'ouvert $|x - \xi| \geqslant \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ pouvant être choisi aussi petit qu'on veut. On peut d'ailleurs montrer par étapes successives que, si DT est indéfiniment dérivable, T est dérivable autant de fois qu'on veut ; il suffit pour cela de posséder des noyaux ϖ vérifiant des conditions encore

(1) Cette propriété de convergence peut se démontrer sans utiliser de noyau élémentaire, elle est conséquence de la définition de l'hypo-ellipticité et du théorème du graphe fermé. Voir Malgrange [1], chapitre III, proposition 2

moins restrictives : au lieu d'être une fonction indéfiniment dérivable, c. a. d. un noyau régularisant, L doit être seulement un noyau « améliorant », c. a. d. tel que L·T soit une distribution plus régulière que T. De tels noyaux ϖ se forment de façon bien plus élémentaire [1].

Il reste maintenant à voir quelques applications du théorème. 1°) Soit D un opérateur différentiel scalaire (N = 1) à coefficients constants, et soit e une solution élémentaire relative à l'origine. Alors nous avons (page 142) que $e_{x-\xi}$ est un noyau élémentaire bilatère régulier de D. Ce noyau est très régulier si et seulement s'il est une fonction indéfiniment dérivable dans le complémentaire de la diagonale de $R^n \times R^n$, c. a. d. si e est une fonction indéfiniment dérivable sur le complémentaire de l'origine dans R^n.

C'est ainsi que les opérateurs différentiels Δ^k, $\left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, sont hypo-elliptiques (formules (II, 3 ; 19), (II, 3 ; 22), (II, 3 ; 28)). Un opérateur *parabolique*, tel que l'opérateur de la chaleur :

$$\frac{\partial}{\partial x_n} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2},$$

est aussi hypo-elliptique, car sa solution élémentaire

$$\text{(V, 6 ; 35)} \quad e(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{\pi x_n}}\right)^{n-1} \exp\left(-\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2}{4 x_n}\right) Y(x_n)$$

est indéfiniment dérivable dans le complémentaire de l'origine. M. Hörmander a étudié tous les opérateurs hypo-elliptiques à coefficients constants [2].

2°) Si D est à coefficients constants, on peut montrer que $e_{x-\xi}$ est analytiquement très régulier si et seulement si e est une fonction analytique dans le complémentaire de l'origine [3]. C'est ainsi que Δ^k, $\left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k$, $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$, sont des opérateurs analytiques-hypo-elliptiques. Mais l'opérateur de la chaleur ne l'est pas, car sa solution élémentaire e n'est pas analytique dans le complémentaire de l'origine, où pourtant elle y est solution de l'équation homogène.

(1) C'est la méthode des opérateurs intégraux singuliers. Voir par exemple Seeley [2], Cartan-Schwartz [1], exposé 11, page 11.09, Mizohata [1]

(2) Voir Hörmander [1], et Hörmander [2], partie II, chapitre IV,4.1, p.97

(3) Voir Schwartz [12], exposé n° 6

3°) Tout système différentiel ($n = 1$) sur la droite est hypo-elliptique, car le noyau élémentaire bilatère (V, 6 ; 32) est très régulier ; il est analytique-hypo-elliptique si les coefficients du système sont analytiques.

4°) Si D_1 et D_2 sont des opérateurs différentiels hypo-elliptiques, il en est de même de $D_1 D_2$. Car si, dans un ouvert de R^n, $D_1 D_2 T$ est une fonction indéfiniment dérivable, il en est de même de $D_2 T$ puisque D_1 est hypo-elliptique, donc de T puisque D_2 est hypo-elliptique. Inversement, si $D_1 D_2$ est hypo-elliptique, D_2 est hypo-elliptique. Car si, dans un ouvert de R^n, $D_2 T$ est une fonction indéfiniment dérivable, il en est de même de $D_1 D_2 T$, donc de T puisque $D_1 D_2$ est hypo-elliptique. Ainsi le fait que, dans R^2, l'opérateur $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ soit hypo-elliptique, résulte du fait que $\Delta = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ est hypo-elliptique.

Remarques. On peut se poser les questions suivantes :

1°) Si un système différentiel est tel que toutes les solutions de l'équation homogène DT = 0 soient des fonctions indéfiniment dérivables (resp. analytiques), le système est-il hypo-elliptique (resp. analytique-hypo-elliptique) ? Il en est bien ainsi dans le cas des équations (N = 1) à coefficients constants [1].

2° Si toutes les solutions usuelles d'un système quelconque aux dérivées partielles homogène sont indéfiniment dérivables dés qu'elles sont suffisamment dérivables (resp. sont analytiques dés qu'elles sont indéfiniment dérivables), alors toutes les distributions-solutions du système sont-elles des fonctions indéfiniment dérivables (resp. analytiques) ? Nous démontrerons ce théoréme, sans utiliser ni noyau élémentaire ni paramétrix, pour les systémes à coefficients constants (théoréme XXIX du chapitre VI).

On conçoit toutes les applications du théoréme XII dans les méthodes directes du calcul des variations. Soit par exemple V^n un espace de Riemann indéfiniment différentiable, compact, orienté. On sait [2] qu'à toute forme différentielle ω de degré r, correspond une adjointe, ω^*, de degré $n - r$. Nous appellerons ($\mathcal{H}$) l'espace de

[1] Hörmander [1], théorème 3.7, page 231, pour le cas hypo-elliptique ; le corollaire 3.1 du théoréme 3.2, page 217, prouve que, si toutes les solutions de l'équation homogéne sont des fonctions analytiques, il n'y a pas d'hyperplans caractéristiques, donc l'équation est analytique-hypo-elliptique

[2] Voir de Rham [3], chapitre V, et Kodaira [1], chapitre III

Hilbert des formes ω de degré r pour lesquelles $\iint\ldots\int \omega\omega^* < +\infty$, avec le produit scalaire :

$$\text{(V, 6 ; 36)} \quad <\alpha,\beta> = \iint\ldots\int \alpha\beta^* \quad [\alpha\in(\mathcal{H}),\ \beta\in(\mathcal{H})].$$

Pour ces formes, on définit une dérivation d et une codérivation ∂, lorsqu'elles sont différentiables; lorsqu'elles ne le sont pas, $d\omega$ et $\partial\omega$ sont des courants.

Une forme différentielle ω est fermée (resp. cofermée) si, au sens de la théorie des distributions, $d\omega = 0$ (resp. $\partial\omega = 0$). Cela revient à dire qu'elle est orthogonale à toutes les formes différentielles φ, indéfiniment différentiables, cohomologues (resp. homologues) à 0. Il en résulte, d et ∂ étant des opérateurs linéaires continus pour les courants, que le sous-espace des formes fermées de $(\mathcal{H})$ est fermé dans $(\mathcal{H})$.

Les périodes d'une forme fermée sont les intégrales $\iint\ldots\int \omega\varphi^*$, lorsque φ parcourt un ensemble maximal de formes indéfiniment différentiables cofermées cohomologiquement indépendantes. Une classe d'homologie dans $(\mathcal{H})$, étant constituée de l'ensemble des formes fermées ayant des périodes données, est un sous-espace linéaire non vide et *fermé* W de $(\mathcal{H})$. Il existe donc une forme $\omega\in(\mathcal{H})$, qui est la projection orthogonale de l'origine O de $(\mathcal{H})$ sur W. Cette forme ω est dans W, donc fermée ; elle est orthogonale à la variété parallèle à W menée par O, donc orthogonale à toutes les formes $\in(\mathcal{H})$ homologues à O, donc elle est cofermée. Elle vérifie alors, au sens des distributions :

$$\Delta\omega = d\partial\omega + \partial d\omega = 0.$$

Mais alors, d'après le théorème XII, cette forme ω est une forme différentielle indéfiniment différentiable (analytique si V^n est analytique) harmonique au sens usuel. Nous avons ainsi montré l'existence d'une forme harmonique dans toute classe d'homologie par la méthode qui nous semble la mieux adaptée au problème. D'autres problèmes de calcul des variations se traiteront de la même façon. D'une manière générale, la solution des « problèmes aux limites » elliptiques s'appuiera d'abord sur le théorème XII [1].

[1] On trouvera dans LIONS [1] de nombreux problèmes aux limites elliptiques traitées dans cet esprit

Produit de convolution

Sommaire Ce chapitre étend aux distributions les propriétés classiques du produit de convolution des fonctions sur R^n ; il a une grande importance pour la théorie et pour toutes sortes d'applications pratiques.

Le § 1 donne la définition usuelle du produit de convolution de 2 fonctions f et g, $h = f * g = \iint \cdots \int f(x-t)g(t)dt$ [formule (VI, 1 ; 1)], ainsi que les propriétés essentielles de ce produit.

Le § 2 donne une autre forme de la définition qui sera généralisable aux distributions : le produit de convolution des distributions S et T est défini par $(S * T) . \varphi = (S_\xi \otimes T_\eta) . \varphi(\xi + \eta)$ [formule (VI, 2 ; 4)]. Ce produit existe toujours si l'une au moins des 2 distributions a un support compact (théorème I, page 155).

Le § 3 donne les propriétés fondamentales de la convolution des distributions : continuité (théorème V, page 157), associativité et commutativité (théorème VII, page 158). La translation et la dérivation sont des convolutions particulières (théorème VIII, page 159), d'où la règle de translation ou dérivation d'un produit de convolution (théorème IX, page 160) ; ces propriétés, bien connues sous une forme incomplète, sont fondamentales pour le calcul symbolique, la théorie des équations intégrales ou aux dérivées partielles, la transformation de Fourier ou Laplace. La convolution est la seule opération linéaire continue permutant avec la dérivation (théorème X, page 162).

Le § 4 étudie la « régularisation » : la régularisée de T par α, produit de convolution $T * \alpha$ de la distribution T par la fonction indéfiniment dérivable α, est elle-même une fonction indéfiniment dérivable (théorème XI, page 166). La régularisation des distributions a des applications analogues à la régularisation des fonctions (théorèmes d'approximation). La fin de ce paragraphe est consacrée à des exemples élémentaires.

Le § 5 étend le produit de convolution au cas où aucune des distributions n'a son support compact. Cette extension est le fondement du calcul symbolique à 1 variable, elle est essentielle pour les applications à l'électricité, pour la dérivation d'ordre non entier, la résolution symbolique des équations différentielles à coefficients constants ou des équations intégrales. L'extension analogue à plusieurs variables est la base de la théorie des équations aux dérivées partielles hyperboliques à coefficients constants.

Le § 6 traite de « théorie fine » : étude des propriétés locales d'une distribution à partir de propriétés locales de ses dérivées. Ce paragraphe, qui pose des problèmes difficiles et ne les résoud pas tous, ne sert que dans des questions très spéciales et purement théoriques et ne sera guère utilisé dans le reste du livre (sauf le théorème XIX, page 191).

Le § 7 donne les propriétés d'une distribution à partir de celles de ses régularisées. Les théorèmes XX (page 192), XXI (page 194), XXIV (page 198), de nature taubérienne, sont intéressants dans la théorie. La régularisation est un outil remarquable pour caractériser les ensembles bornés ou les suites convergentes de distributions : les théorèmes XXVII (page 195) et XXIII (page 197) seront d'un usage constant dans la suite pour toutes sortes d'applications théoriques. Les techniciens pourront passer ce paragraphe.

Le § 8 introduit de nouveaux espaces de distributions, les $(\mathcal{D}'_{L^p})$, analogues aux espaces L^p classiques. Ces espaces ont des applications théoriques et pratiques nombreuses, notamment $(\mathcal{D}_{L^\infty})$ ou $(\mathcal{B}')$ (espace des distributions « bornées sur R^n »). On pourra facilement comprendre et appliquer les théorèmes sans en connaître les démonstrations, parfois délicates.

Le § 9 étudie les « distributions presque périodiques », application facile du § 8. Nous ignorons si ces distributions peuvent avoir des usages pratiques.

Le § 10 donne des applications du produit de convolution aux équations aux dérivées partielles et aux équations intégrales, d'une façon générale aux « équations de convolution » [formule (VI, 10; 1)]. Nous définissons correctement la solution élémentaire (VI, 10; 7) et donnons ses principales applications. La formule classique de Poisson en théorie du potentiel (VI, 10; 18) en est un cas particulier. Le théorème XXIX, page 215, est analogue au théorème XII du chapitre v, il démontre l'analyticité des solutions des équations aux dérivées partielles elliptiques à coefficients constants. En même temps que les fonctions harmoniques, la fin du paragraphe étudie les fonctions surharmoniques et donne immédiatement la formule de décomposition de F. Riesz (VI, 10; 32), comme cas particulier d'une étude bien plus générale.

Notation Si A et B sont deux ensembles de R^n, nous appellerons $A + B$ (resp. $A - B$) l'ensemble des éléments de R^n de la forme $x + y$ (resp. $x - y$), où $x \in A$, $y \in B$. Si l'un des deux ensembles est ouvert, $A + B$ est ouvert : si A et B sont compacts, $A + B$ est compact, si l'un des deux ensembles est fermé, l'autre compact, $A + B$ est fermé.

§ 1 Définition du produit de convolution usuel

Produit de convolution de deux fonctions

Le produit de convolution joue un rôle de plus en plus important dans un nombre croissant de domaines de l'analyse : calcul des

probabilités, calcul symbolique, théorie des groupes, séries et intégrales de Fourier, théorie du potentiel, équations intégrales [1].

Le produit de convolution est lié à la structure de groupe. Nous nous placerons dans ce chapitre sur le groupe R^n, mais les résultats sont valables à peu près sans modification sur le tore T^n ou sur un produit $R^m \times T^n$; ceux qui n'utilisent pas la commutativité de la loi de groupe sont même valables sur un groupe de Lie [2].

Pour deux fonctions $f(x)$ et $g(x)$ sur R^n, le produit de convolution que nous noterons $h = f * g = g * f$, est une autre fonction sur R^n, définie par la formule

$$(\text{VI}, 1; 1) \quad h(x) = \iint \cdots \int f(x-t) g(t)\, dt = \iint \cdots \int g(x-t) f(t)\, dt.$$

Cette fonction h n'est pas définie si f et g sont quelconques. Il faut d'abord que f et g soient sommables sur tout compact; ensuite il faut qu'elles décroissent assez vite à l'infini pour assurer la convergence absolue de l'intégrale qui définit h; si par exemple f est une fonction quelconque, g doit décroître d'autant plus vite pour $|x|$ infini que f croît plus vite.

a) On voit facilement que si $f \in L^p$, $g \in L^q$, avec $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $1 \leqslant q \leqslant +\infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1 \geqslant 0$, h existe presque partout, et $h \in L^r$, $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$, avec

$$(\text{VI}, 1; 2) \quad \left(\iint \cdots \int |h(x)|^r\, dx\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \left(\iint \cdots \int |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\iint \cdots \int |g(x)|^q\, dx\right)^{\frac{1}{q}},$$

l'inégalité devenant une égalité pour $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$, $p = q = r = 1$. Pour $r = \infty$, h existe partout et est continue; dans ce cas, sauf pour $p = \infty$ ou $q = \infty$, h tend vers 0 pour $|x| \to \infty$.

b) Si l'une des deux fonctions f, g, est sommable sur tout compact, l'autre $\in L^p$ sur tout compact, et si en outre l'une d'elles est à support compact, h existe presque partout et $\in L^p$ sur tout compact; pour $p = \infty$, h existe partout et est continue.

Si f et g ont des supports compacts, il en est de même de h.

Remarque. Si on modifie f et g sur des ensembles de mesure nulle, on ne modifie en rien h; comme en général h est définie seule-

(1) Pour l'étude du produit de convolution classique, voir A. WEIL, [1], chapitre III.

(2) On trouvera dans Riss [1] une étude du produit de convolution sur un groupe abélien localement compact quelconque.

ment presque partout, le produit de convolution s'applique plutôt aux classes de fonctions sommables sur tout compact, définies à un ensemble de mesure nulle près, qu'aux fonctions elles-mêmes.

Convolution d'une fonction et d'une mesure

On peut aussi définir le produit de convolution d'une fonction $f(x)$ et d'une mesure μ; c'est une fonction $h(x)$ donnée par

$$\text{(VI, 1; 3)} \qquad h(x) = \iint\cdots\int f(x-t)\,d\mu(t).$$

Il est un peu plus délicat d'intervertir les rôles de f et μ; on le fait souvent en faisant intervenir la fonction à variation bornée qui sert à définir μ et qui est, comme nous l'avons vu, une primitive de μ (théorème II du chapitre II). Nous écrirons indifféremment $f*\mu$ ou $\mu*f$. Ici encore f et μ doivent vérifier certaines conditions pour que h existe. f doit être sommable sur tout compact.

a) Si $f \in L^p$ et si μ est sommable sur R^n, h existe presque partout et $\in L^p$, avec

(VI, 1; 4)

$$\left(\iint\cdots\int |h(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\iint\cdots\int |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\iint\cdots\int |d\mu|\right),$$

l'inégalité devenant une égalité pour $f \geqslant 0$, $\mu \geqslant 0$, $p = 1$.

b) Si $f \in L^p$ sur tout compact, et que f ou μ soit à support compact, h existe presque partout et $\in L^p$ sur tout compact; si f est en outre continue, h est alors définie partout et continue. Si μ est une mesure absolument continue, que par conséquent nous identifions à une fonction g, $f*\mu$ est justement $f*g$.

Remarque. Bien que ce soit moins évident que plus haut, on démontre que, si on modifie f sur un ensemble de mesure nulle, h n'est modifiée que sur un ensemble de mesure nulle.

Convolution de deux mesures

Si maintenant μ et ν sont deux mesures, il est possible de définir le produit de convolution, qui est une mesure $\lambda = \mu*\nu = \nu*\mu$ (en utilisant par exemple les fonctions à variation bornée qui définissent μ et ν).

a) Le produit a un sens si μ et ν sont sommables, alors λ est sommable et

$$\text{(VI, 1; 5)} \quad \iint\cdots\int |d\lambda| \leqslant \left(\iint\cdots\int |d\mu|\right) \cdot \left(\iint\cdots\int |d\nu|\right),$$

l'inégalité devenant une égalité si les mesures sont $\geqslant 0$.

b) Le produit a encore un sens si, l'une des mesures étant quelconque, l'autre est à support compact. Si l'une au moins des mesures, μ par exemple, est absolument continue, et peut ainsi être identifiée à une fonction f, le produit de convolution $\mu * \nu$ est une mesure λ absolument continue, identifiée à une fonction h qui est le produit de convolution $f * \nu$ précédemment défini.

Le produit de convolution des mesures est utilisé en calcul des probabilités ; si μ et ν fixent deux lois de répartition de vecteurs de R^n, ce sont deux mesures $\geqslant 0$, de masse totale 1 ; ces vecteurs étant supposés être deux variables aléatoires indépendantes, leur somme suit une loi de probabilité dont la répartition est donnée par la mesure $\lambda = \mu * \nu$; il est alors compréhensible que λ aussi soit une mesure $\geqslant 0$ de masse totale 1.

§ 2 Produit de convolution de deux distributions sur R^n (1)

Définition fonctionnelle. Cas de 2 fonctions

Nous allons modifier la définition du produit de convolution en faisant intervenir les définitions fonctionnelles de f, g, h, considérées comme distributions. Calculons $h(\varphi)$, pour $\varphi \in (\mathcal{D})$:

$$(\text{VI}, 2; 1) \quad h(\varphi) = \iint \cdots \int h(x)\varphi(x)dx$$
$$= \iint_{x \in R^n} \cdots \int \cdot \iint_{t \in R^n} \cdots \int \varphi(x) f(x-t) g(t) dx dt.$$

Par le changement de variables $x - t = \xi$, $t = \eta$, nous obtenons :

$$(\text{VI}, 2; 2) \quad h(\varphi) = \iint_{\xi \in R^n} \cdots \int \cdot \iint_{\eta \in R^n} \cdots \int \varphi(\xi + \eta) f(\xi) g(\eta) d\xi d\eta.$$

Dans tous les cas où nous nous sommes placés au paragraphe 1, le calcul est légitime, l'intégrale obtenue étant absolument convergente. Nous voyons l'intérêt de cette formule : d'abord elle met directement en évidence les rôles symétriques de f et g : ensuite elle s'étend aux mesures et aux distributions. Si en effet f et g sont des fonctions données sur R^n, $f(\xi)\ g(\eta)$ est une fonction sur l'espace à $2n$ dimensions $R^n \times R^n$, dont chaque point (ξ, η) a pour coordonnées $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$. Au chapitre IV, nous avons désigné par *produit tensoriel* cette fonction de $2n$ variables, et nous l'avons appelée $f(\xi) \otimes g(\eta)$. D'autre part, $\varphi(x)$ étant une fonction indéfiniment dérivable sur R^n, $\varphi(\xi + \eta)$ est une fonction bien déterminée, indé-

(1) On peut remplacer R^n par un groupe localement compact. Voir Braconnier [1], Bruhat [1] et [2], Marianne Guillemot [1], Norguet [1], Riss [1]

finiment dérivable, sur $R^n \times R^n$; $h(\varphi)$ n'est autre chose que le produit scalaire de $f(\xi) \otimes g(\eta) \in (\mathcal{D}')_{\xi,\eta}$ par la fonction $\varphi(\xi+\eta) \in (\mathcal{E})_{\xi,\eta}$. Cette propriété, qui définit $h(\varphi)$ pour toute $\varphi(x) \in (\mathcal{D})_x$, caractérise entièrement h. Si donc nous étendons cette dernière définition au cas où l'on remplace f et g par des distributions, on sera sûr lorsque ces distributions seront des fonctions pour lesquelles le produit de convolution usuel sera défini de retrouver ce produit de convolution usuel.

Cas de 2 distributions

Soient alors S et T deux distributions quelconques sur R^n; le produit direct $S_\xi \otimes T_\eta$ existe toujours, comme distribution sur $R^n \times R^n$; pour une fonction de ξ, η, de la forme $u(\xi)v(\eta)$, rappelons que

$$(\text{VI}, 2; 3) \qquad (S_\xi \otimes T_\eta) \cdot [u(\xi)v(\eta)] = S(u)T(v).$$

D'autre part, comme nous l'avons dit plus haut, si $\varphi(x) \in (\mathcal{D})_x$, $\varphi(\xi+\eta)$ est indéfiniment dérivable, *mais son support n'est pas compact*, sauf si $\varphi \equiv 0$: ce support est en effet composé d'une réunion de variétés linéaires parallèles à la « seconde bissectrice » $\xi+\eta=0$. Dans ces conditions, $(S_\xi \otimes T_\eta) \cdot \varphi(\xi+\eta)$ n'aura pas de sens si S et T sont quelconques; des conditions de décroissance à l'infini devront être vérifiées, comme nous l'avons vu au § 1. Mais cette expression aura un sens en particulier *toutes les fois que le support de* $S_\xi \otimes T_\eta$ *et celui de* $\varphi(\xi+\eta)$ *dans* $R^n \times R^n$ *se couperont suivant un compact* (voir page 90).

Restriction sur les supports

Bornons-nous ici au cas où l'une des distributions, S par exemple, est à support compact A. Alors si $\varphi(x)$ a un support compact K dans R^n, les conditions précédentes sont vérifiées. En effet le support de $S_\xi \otimes T_\eta$ est contenu dans $A \times R^n$; le support de $\varphi(\xi+\eta)$ est défini par la relation $\xi+\eta \in K$, alors tout point de l'intersection I de ces supports vérifie $\xi \in A$, $\xi+\eta \in K$, donc $\eta \in K - A$, et I est contenue dans le compact $A \times (K-A)$. En utilisant la méthode de la page 90 du tome I, nous sommes amenés à introduire une fonction $\alpha(\xi)$, indéfiniment dérivable et à support compact, égale à 1 sur un voisinage de A, de sorte que, suivant les formules du chapitre III, § 7,

$$(\text{VI}, 2; 4) \quad (S * T)_x \cdot \varphi(x) = (S_\xi \otimes T_\eta) \cdot \varphi(\xi+\eta) = (S_\xi \otimes T_\eta) \cdot [\alpha(\xi)\varphi(\xi+\eta)].$$

la fonction $\alpha(\xi)\varphi(\xi+\eta)$ étant cette fois-ci à support compact, et égale à $\varphi(\xi+\eta)$ sur un voisinage du support de $S_\xi \otimes T_\eta$. Nous avons pu définir ainsi $(S*T).\varphi$ pour toute $\varphi\epsilon(\mathcal{D})_x$. Si maintenant des $\varphi_j\epsilon(\mathcal{D})_x$ convergent vers o dans $(\mathcal{D})_x$ de manière que leurs supports soient contenus dans un même compact K, alors les $\alpha(\xi)\varphi_j(\xi+\eta)$ ont leurs supports contenus dans un compact fixe de $R^n \times R^n$, et convergent uniformément vers o ainsi que chacune de leurs dérivées; comme $S_\xi \otimes T_\eta$ est une distribution sur $R^n \times R^n$, les valeurs de $(S_\xi \otimes T_\eta).[\alpha(\xi)\varphi_j(\xi+\eta)]$ convergent vers o. La forme linéaire ainsi définie, $(S*T).\varphi$, est donc bien une distribution sur R^n.

Existence et calcul

On peut donc énoncer :

Théorème I *Si* S *et* T *sont deux distributions quelconques sur* R^n, *dont l'une au moins a un support compact, il existe une distribution bien déterminée, appelée produit de convolution de* S *et* T, *notée* $S*T$ *ou* $T*S$, *telle que, pour toute* $\varphi(x)\epsilon(\mathcal{D})_x$.

$$(\text{VI, 2; 5}) \qquad (S*T)_x.\varphi(x)=(S_\xi \otimes T_\eta).\varphi(\xi+\eta)\text{ (1)}.$$

Nous aurons l'occasion de voir plus loin d'autres cas où le produit de convolution est défini (§§ 5 et 8).

Le fait qu'il n'y ait jamais aucune difficulté dans le cas de supports compacts prouve que les seules difficultés dans le produit de convolution proviennent de la croissance à l'infini, et non des irrégularités locales. C'est tout le contraire du produit multiplicatif des distributions (chapitre v); dans ce cas, le comportement à l'infini n'avait aucune importance, seule la régularité locale comptait. De même que, pour la multiplication, nous avons été amenés à supposer l'une des deux distributions totalement régulière localement, c'est-à-dire fonction indéfiniment dérivable au sens usuel, nous supposons ici l'une d'elles totalement régulière à l'infini, c'est-à-dire à support compact.

Il résulte de ce que nous avons vu au sujet du produit tensoriel des distributions qu'il est possible de calculer le produit de convolution par deux « intégrations » successives (théorème de Fubini : voir théorème IV du chapitre IV) :

$$(\text{VI, 2; 6}) \qquad \begin{cases}(S*T).\varphi=(S_\xi \otimes T_\eta).\varphi(\xi+\eta)=S_\xi.[T_\eta.\varphi(\xi+\eta)]\\ \qquad\qquad =T_\eta.[S_\xi.\varphi(\xi+\eta)].\end{cases}$$

(1) Cette expression du produit de convolution était déjà utilisée pour le produit de convolution de deux mesures; voir A. Weil [1], chapitre III

Si S est à support compact, alors $S_\xi . \varphi(\xi + \eta)$ est une fonction de η, indéfiniment dérivable à support compact, $\chi(\eta)$, et l'on peut bien calculer $T_\eta . \chi(\eta)$; quant à $T_\eta . \varphi(\xi + \eta)$, c'est une fonction de ξ qui est indéfiniment dérivable à support *quelconque*, $\psi(\xi)$, mais, S étant à support compact, on peut encore calculer $S_\xi . \psi(\xi)$. Les deux méthodes doivent donner le même résultat.

Remarquons que $\varphi(\xi + \eta)$ est *image transposée* (chapitre I, § 5, 3°) de la fonction $\varphi(x)$ dans l'application (H) de $R^n \times R^n$ dans R^n définie par $(\xi, \eta) \longrightarrow \xi + \eta$. Donc $S * T$ est *l'image tensorielle* de $S_\xi \otimes T_\eta$ par l'application H [formule (I, 5 ; 6)]. Mais l'application H n'est pas régulière à l'infini, c'est ce qui fait que $S * T$ n'a pas de sens pour 2 distributions quelconques, mais a toujours un sens pour des distributions à support compact.

§ 3 Propriétés du produit de convolution

Support Théorème II *Si* S *et* T *ont pour supports respectifs* A *et* B *(l'un au moins des deux étant compact), le support de* $S * T$ *est contenu dans la somme* $A + B$.

$A + B$ est fermé ; soit Ω son complémentaire dans R^n. Il nous faut montrer que si $\varphi(x) \in (\mathcal{D})$ a son support dans Ω, $(S * T) . \varphi$ est nulle. Le support de $\varphi(\xi + \eta)$ sur $R^n \times R^n$ est contenu dans l'ouvert défini par la relation $\xi + \eta \in \Omega$; le support de $S_\xi \otimes T_\eta$ est identique à $A \times B$ (théorème V du chapitre IV), donc défini par la relation $\xi \in A$, $\eta \in B$, qui entraîne

$$\xi + \eta \in A + B ;$$

alors le support de $\varphi(\xi + \eta)$ est sans point commun avec le support de $S_\xi \otimes T_\eta$, et par suite $(S_\xi \otimes T_\eta) . \varphi(\xi + \eta)$ est nul.

En particulier si S et T sont toutes deux à support compact, il en est de même de $S * T$.

Théorème III *Si* S *a pour support* A, *la valeur de* $S * T$ *dans l'ouvert* Ω *ne dépend que de celle de* T *dans l'ouvert* $\Omega - A$.

En effet si $\varphi(x)$ a son support dans Ω, un voisinage du support de $\varphi(\xi + \eta)$ dans $R^n \times R^n$ est défini par la relation $\xi + \eta \in \Omega$. L'intersection I du support de $S_\xi \otimes T_\eta$ avec celui de $\varphi(\xi + \eta)$ est constituée de points (ξ, η) vérifiant tous $\xi \in A$, donc $\eta \in \Omega - A$; I est située dans le produit (ouvert) $R^n \times (\Omega - A)$; on connaît donc $(S_\xi \otimes T_\eta) . \varphi(\xi + \eta)$ si on connaît S partout et T sur l'ouvert $\Omega - A$.

En particulier si S est de support A petit et voisin de *l'origine des coordonnées*, le support de $S * T$ est contenu dans un voisinage petit du support de T et la valeur de $S * T$ dans un ouvert Ω dépend de celle de T dans un voisinage petit de $\overline{\Omega}$.

Continuité THÉORÈME IV *L'application qui au couple* $S \in (\mathcal{E}')$, $T \in (\mathcal{E}')$, *fait correspondre le produit de convolution* $S * T \in (\mathcal{E}')$ *est une application bilinéaire continue.*

Il est évident que c'est une application bilinéaire. Si S et T convergent vers O dans $(\mathcal{E}')$, nous allons montrer que $S * T$ converge vers O dans $(\mathcal{E}')$ (rappelons que, pour des filtres, la convergence n'entraîne pas que S et T restent bornés). La démonstration repose sur le théorème VI du chapitre IV. pour les espaces $(\mathcal{E}')$. Si φ parcourt un ensemble borné B dans $(\mathcal{E})$, $\varphi(\xi + \eta)$ parcourt un ensemble borné B_1 dans $(\mathcal{E})_{\xi, \eta}$. Alors si S et T convergent vers O dans $(\mathcal{E}')$, $S_\xi \otimes T_\eta$ converge vers O dans $(\mathcal{E}')_{\xi, \eta}$, et par suite $S_\xi \otimes T_\eta \cdot \varphi(\xi + \eta)$ converge vers o uniformément pour $\varphi(\xi + \eta) \in B_1$ ou $\varphi \in B$, c. q. f. d.

On peut encore raisonner ainsi. L'application $(S, T) \to S_\xi \otimes T_\eta$ de $(\mathcal{E}') \times (\mathcal{E}')$ dans $(\mathcal{E}')_{\xi, \eta}$ est continue; l'application $S_\xi \otimes T_\eta \to S * T$ de $(\mathcal{E}')_{\xi, \eta}$ dans $(\mathcal{E}')$ est continue, comme image tensorielle (chapitre I, § 5, 3°) définie par l'application $H : (\xi, \eta) \to \xi + \eta$ de $R^n \times R^n$ dans R^n. H n'est pas régulière à l'infini, ce qui n'a aucune importance pour des distributions à support compact.

En ce qui concerne les topologies faibles, mêmes remarques qu'au théorème XI du chapitre III.

THÉORÈME V *L'application qui au couple* $S \in (\mathcal{E}')$, $T \in (\mathcal{D}')$, *fait correspondre* $S * T \in (\mathcal{D}')$, *est une application bilinéaire hypocontinue. Si S garde son support dans un compact fixe, c'est même une application bilinéaire continue* (¹).

a) Si on suppose que S garde son support contenu dans un compact fixe A (ce qui est nécessairement vérifié si S reste bornée), on peut choisir la fonction $\alpha(\xi)$ de la formule (VI, 2; 4) une fois pour toutes. Alors si φ parcourt un ensemble borné B de $(\mathcal{D})$, $\alpha(\xi)\varphi(\xi + \eta)$ parcourt un ensemble borné B_1 de $(\mathcal{D})_{\xi, \eta}$, et nous sommes, comme au précédent théorème, ramenés au théorème VI du chapitre IV.

b) Si on suppose seulement que S converge vers O dans $(\mathcal{E}')$, et

(¹) Le fait que l'application bilinéaire soit non seulement hypocontinue, mais aussi continue, est une conséquence du théorème général signalé dans l'introduction n° 9; voir DIEUDONNÉ-SCHWARTZ [1], p. 96, théorème 9.

que T reste bornée dans $(\mathcal{D}')$, nous devons employer une autre démonstration. On remarque alors que si φ parcourt un ensemble borné B de $(\mathcal{D})$, $\varphi(\xi+\eta)$ est une fonction de η qui reste bornée dans $(\mathcal{D})_\eta$, lorsque ξ parcourt un compact, et il en est de même de chacune de ses dérivées partielles en ξ; si T parcourt un ensemble borné de $(\mathcal{D}')$, $T_\eta \cdot \varphi(\xi+\eta)$ est bornée sur tout compact en ξ ainsi que toutes ses dérivées successives en ξ, donc parcourt un ensemble borné B_1 de $(\mathcal{E})_\xi$; alors si S converge vers o dans $(\mathcal{E}')$, $S_\xi \cdot [T_\eta \cdot \varphi(\xi+\eta)]$ converge vers o uniformément pour $\varphi \in B$, c. q. f. d.

La dernière partie du théorème IV n'introduit qu'une restriction assez faible dans les applications pratiques.

Par contre, on peut voir que l'application bilinéaire est discontinue, si l'on considère $(\mathcal{E}')$ topologique : si S converge vers o dans $(\mathcal{E}')$ et T dans $(\mathcal{D}')$, sans rester bornées, $S * T$ ne converge pas nécessairement vers o dans $(\mathcal{D}')$ (Cela provient de ce que $\varphi(\xi+\eta)$ n'est pas à support compact). L'hypocontinuité est d'ailleurs toujours suffisante en pratique. Mêmes remarques que ci-dessus pour les topologies faibles.

Produit de convolution et produit tensoriel Théorème VI *Si* X^m *et* Y^n *sont 2 espaces vectoriels à m et n dimensions, le produit de convolution de 2 produits tensoriels est le produit tensoriel des produits de convolution : si* $A_x \in (\mathcal{D}')_x$, $B_x \in (\mathcal{D}')_x$, $C_y \in (\mathcal{D}')_y$, $D_y \in (\mathcal{D}')_y$, *alors*

$$(\text{VI, } 3;\ 1) \qquad (A_x \otimes C_y) * (B_x \otimes D_y) = (A_x * B_x) \otimes (C_y * D_y).$$

Pour montrer l'égalité des distributions figurant aux deux membres, il faut montrer qu'elles prennent la même valeur pour toute fonction $\varphi \in (\mathcal{D})_{x,y}$ de la forme $u(x)\,v(y)$ (voir théorème III du chapitre IV) : or c'est évident, la valeur commune des deux quantités étant alors

$$(\text{VI, } 3;\ 2) \qquad (A_\xi \otimes B_\eta \otimes C_\zeta \otimes D_\theta) \cdot u(\xi+\eta)v(\zeta+\theta).$$

Associativité, commutativité Il n'y a aucune difficulté à définir le produit de convolution de plusieurs distributions, pourvu que toutes, sauf une au plus, soient à supports compacts.

Théorème VII *Le produit de convolution de plusieurs distributions qui sont toutes, sauf une au plus, à supports compacts, est associatif et commutatif.*

Si, en effet, A, B, C, sont 3 distributions, on aura aussitôt

$$(\text{VI, } 3;\ 3) \quad (A * B * C) \cdot \varphi = (A_\xi \otimes B_\eta \otimes C_\zeta) \cdot \varphi(\xi+\eta+\zeta).$$

L'associativité et la commutativité montrent que le produit de convolution fait de $(\mathcal{E}')$ une algèbre commutative et de $(\mathcal{D}')$ un module topologique sur $(\mathcal{E}')$.

Remarque En dehors des conditions précises indiquées par l'énoncé, le produit de convolution n'est pas nécessairement associatif (Formule (VI, 5 ; 3)).

Convolution. Translation. Dérivation Théorème VIII *Le produit de convolution* $\delta * \mathrm{T}$ *de* T *avec la mesure de Dirac est égal à* T : *le produit de convolution* $\delta_{(h)} * \mathrm{T}$ *de* T *avec la masse* $+1$ *au point* h *est la translatée* $\tau_h \mathrm{T}$ *de* T ; *le produit de convolution* $\dfrac{\partial \delta}{\partial x_k} * \mathrm{T}$ *de* T *avec une dérivée de la mesure de Dirac est la dérivée* $\dfrac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_k}$.

$$\text{(VI, 3 ; 4)} \quad \delta * \mathrm{T} = \mathrm{T}\,; \qquad \delta_{(h)} * \mathrm{T} = \tau_h(\mathrm{T})\,; \qquad \frac{\partial \delta}{\partial x_k} * \mathrm{T} = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_k}.$$

On a en effet

$$\text{(VI, 3 ; 5)} \quad \begin{aligned}(\delta_{(h)} * \mathrm{T}) \cdot \varphi &= \mathrm{T}_\xi \cdot [(\delta_{(h)})_\eta \cdot \varphi(\xi + \eta)] \\ &= \mathrm{T}_\xi \cdot \varphi(\xi + h) = \mathrm{T} \cdot \tau_{-h}(\varphi) = \tau_h(\mathrm{T}) \cdot \varphi.\end{aligned}$$

En faisant $h = 0$, on obtient en particulier $\delta * \mathrm{T} = \mathrm{T}$; cela prouve que δ est l'unité de l'algèbre de convolution D'autre part si on pose $h_k = (0, 0, \ldots \varepsilon, 0, \ldots 0)$, on a vu, d'après la définition même du doublet, que

$$\text{(VI, 3 ; 6)} \qquad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\delta_{(h_k)} - \delta}{\varepsilon} = -\frac{\partial \delta}{\partial x_k},$$

d'où, en vertu de la continuité du produit de convolution et de la formule (III, 4 ; 3),

$$\text{(VI, 3 ; 7)} \quad \frac{\partial \delta}{\partial x_k} * \mathrm{T} = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\frac{\delta_{(h_k)} - \delta}{-\varepsilon} * \mathrm{T}\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\tau_{h_k}(\mathrm{T}) - \mathrm{T}}{-\varepsilon} = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_k}.$$

Mais il est intéressant de donner une démonstration directe de cette formule très importante.

(VI, 3 ; 8)

$$\left(\frac{\partial \delta}{\partial x_k} * \mathrm{T}\right) \cdot \varphi = \mathrm{T}_\xi \cdot \left[\left(\frac{\partial \delta}{\partial x_k}\right)_\eta \cdot \varphi(\xi + \eta)\right] = \mathrm{T}_\xi \cdot \left(-\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_k}\right) = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial x_k} \cdot \varphi(x).$$

On voit que la dérivation est une opération de convolution : Sa continuité, théorème XVIII du chapitre II, est alors un cas particulier

.u théorème de continuité du produit de convolution (théorème V).
)n déduit immédiatement du théorème VII la conséquence suivante :

Théorème IX *Pour translater ou dériver un produit de convo- ution on translate ou dérive l'un quelconque des facteurs.*

C'est une conséquence immédiate de (VI, 3 ; 4) et du fait que le roduit de convolution est associatif et commutatif :

(VI, 3 ; 9)

$$\tau_h(S*T)=\delta_{(h)}*(S*T)=(\delta_{(h)}*S)*T=\tau_h S*T=S*\tau_h T$$

(VI, 3 ; 10)

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(S*T)=\frac{\partial\delta}{\partial x_k}*(S*T)=\left(\frac{\partial\delta}{\partial x_k}*S\right)*T=\frac{\partial S}{\partial x_k}*T=S*\frac{\partial T}{\partial x_k}.$$

Il en résulte que pour dériver plusieurs fois un produit de convo- ution on dérive chaque fois un facteur, mais on peut changer à haque dérivation le facteur que l'on dérive. Ainsi :

(VI, 3 ; 11)

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}(S*T)=\frac{\partial^2 S}{\partial x_j\partial x_k}*T=S*\frac{\partial^2 T}{\partial x_j\partial x_k}=\frac{\partial S}{\partial x_j}*\frac{\partial T}{\partial x_k}=\frac{\partial S}{\partial x_k}*\frac{\partial T}{\partial x_j}.$$

Ces formules sont naturellement bien connues ; mais elles exigent abituellement pour être utilisées des hypothèses très restrictives : n doit supposer que S et T sont des fonctions continuement diffé- entiables au sens usuel. Autrement ces formules peuvent être ausses au sens usuel et nécessiter l'adjonction de termes supplé- nentaires ; ici elles sont toujours exactes. Un exemple simple llustrera bien la chose. Prenons pour S la fonction $Y(x)$ d'Heaviside, gale à 0 pour $x\leqslant 0$, à $+1$ pour $x>0$ (cas d'une variable ; $n=1$), t pour T une fonction continue f, à support compact. On a alors, n théorie des distributions :

$$\text{(VI, 3 ; 12)}\qquad \frac{d}{dx}(Y*f)=\frac{dY}{dx}*f=\delta*f=f;$$

lors que si nous nous en tenons à la définition usuelle de la dérivée, $\frac{dY}{dx}$ est presque partout nulle, et l'application brutale de la formule VI, 3 ; 10) donnerait la formule fausse $\frac{d}{dx}(Y*f)=\frac{dY}{dx}*f=0$.

On corrige habituellement ce genre d'erreurs en écrivant que pour

une fonction $g(x)$ présentant une discontinuité de première espèce, avec un « saut » g_0 à l'origine, on a

$$\text{(VI, 3; 13)} \qquad \frac{d}{dx}(g * f) = g'(x) * f + g_0 f,$$

ce qui revient à appliquer la dérivation au sens de la théorie des distributions. Nous évitons ainsi toutes les règles spéciales aux divers cas particuliers, et n'avons à appliquer qu'une même règle générale.

Remarquons aussi que les formules (VI, 3; 4) sont couramment utilisées en mécanique ondulatoire sous la forme suivante. On écrit la mesure de Dirac avec la notation d'une fonction : fonction de Dirac $\delta(x)$. On écrit d'autre part le produit de convolution de la même manière que s'il s'agissait de fonctions (formule (VI, 1; 1)). Alors (VI, 3; 4) s'écrit

$$\text{(VI, 3; 14)} \qquad \begin{cases} f(x) = \displaystyle\iint \cdots \int \delta(x-t) f(t)\, dt \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_k} = \displaystyle\iint \cdots \int \frac{\partial \delta}{\partial x_k}(x-t) f(t)\, dt. \end{cases}$$

La convolution, combinaison de translations

Toute distribution $S \in (\mathcal{E}')$ est limite, dans $(\mathcal{E}')$, de mesures qui sont des combinaisons linéaires finies de masses ponctuelles (théorème XV du chapitre III et suite) :

$$\text{(VI, 3; 15)} \quad S = \lim_j \sum_\nu (a_{\nu j})\, \delta_{(h_{\nu j})} = \lim_j \sum_\nu (a_{\nu j}) \tau_{(h_{\nu j})} \delta.$$

Alors la continuité du produit de convolution montre que la convoluée $S * T$ est limite de combinaisons linéaires finies des translatées de T :

$$\text{(VI, 3; 16)} \qquad S * T = \lim_j \sum_\nu (a_{\nu j}) \tau_{(h_{\nu j})} T :$$

nous avons utilisé constamment de telles propriétés dans un mémoire antérieur [1].

La formule (VI, 3; 16) suggère immédiatement une nouvelle définition du produit de convolution. Soit T une distribution : sa translatée $\tau_h T$ est une fonction de h définie pour $h \in R^n$, à valeurs dans l'espace des distributions $(\mathcal{D}')$. Comme nous l'avons vu page 80 du

[1] Schwartz, [4]

tome I, c'est une fonction indéfiniment dérivable de h, que nous appellerons $\Phi(h)$. Alors, S étant une distribution sur R^n, espace de la variable h, on peut calculer $S_h \cdot \Phi(h)$ [1], qui est une nouvelle distribution (chapitre 1, § 5, 2°); cette nouvelle distribution n'est autre que $S * T$. En effet, pour toute $\varphi \in (\mathcal{D})$, on a

$$\Phi(h) \cdot \varphi = \tau_h T \cdot \varphi = T_x \cdot \varphi(x+h),$$

de sorte que

$$\text{(VI, 3; 17)} \quad [S_h \cdot \Phi(h)] \cdot \varphi = S_h \cdot [T_x \cdot \varphi(x+h)] = (S_h \otimes T_x) \cdot \varphi(x+h) = (S * T) \cdot \varphi$$

d'après la formule de Fubini (VI, 2; 6). Si en particulier S est une mesure composée d'un nombre fini de masses ponctuelles

$$\text{(VI, 3; 18)} \qquad S = \sum_\nu a_\nu \delta_{(h_\nu)},$$

on aura

$$\text{(VI, 3; 19)} \qquad S * T = \sum_\nu a_\nu \Phi(h_\nu) = \sum_\nu a_\nu \tau_{h_\nu} T,$$

ce qui est l'origine de la formule (VI, 3; 16). Si S est une fonction continue $f(x)$, on représentera $f * T$ comme une moyenne ordinaire de translatées de T

$$\text{(VI, 3; 20)} \quad f * T = \iint \cdots \int f(h) \Phi(h) dh = \iint \cdots \int f(h) \tau_h T \, dh.$$

Opérations permutant avec les dérivations THÉORÈME X *Toute opération linéaire continue de* $(\mathcal{E}')$ *dans* $(\mathcal{D}')$, *permutant avec les dérivations partielles* $\partial/\partial x_k (k = 1, 2, \ldots n)$, *est le produit de convolution*

$$\text{(VI, 3; 21)} \qquad \mathfrak{L}(T) = S * T$$

avec une distribution fixe $S \in (\mathcal{D}')$; *et réciproquement.*

La réciproque résulte de ce qui précède, c'est le théorème direct qu'il faut montrer. Par hypothèse

$$\text{(VI, 3; 22)} \qquad \frac{\partial}{\partial x_k} \mathfrak{L}(T) = \mathfrak{L}\left(\frac{\partial T}{\partial x_k}\right).$$

Montrons que l'opération $\mathfrak{L}$ permute avec les translations τ_h, ce qui inversement entraînera (VI, 3; 22) en vertu de (III, 4; 3):

$$\text{(VI, 3; 23)} \qquad \tau_h[\mathfrak{L}(T)] = \mathfrak{L}(\tau_h T)$$

[1] Il n'y a aucune difficulté à définir $S_h \cdot \Phi(h)$ si S est à support compact. Si c'est T qui est à support compact c'est un peu plus délicat : Φ n'est pas en effet à support compact, et $S_h \cdot \Phi(h)$ n'a a priori pas de sens. Mais Φ est scalairement à support compact, car pour toute $\varphi \in (\mathcal{D})$, $\Phi(h) \cdot \varphi$ est une fonction de h à support compact, et cela suffit pour qu'on puisse définir $S_h \cdot \Phi(h)$. Voir à ce sujet SCHWARTZ [9], proposition 21, p. 135

ou

(VI, 3 ; 24) $\tau_h[\mathfrak{L}(\mathrm{T})] \cdot \varphi(x-h) = \mathfrak{L}(\tau_h \mathrm{T}) \cdot \varphi(x-h), \qquad \varphi \in (\mathfrak{D}),$

et comme le 1^er^ membre vaut $\mathfrak{L}(\mathrm{T}) \cdot \varphi(x)$, nous n'avons qu'à montrer que la fonction numérique de h

(VI, 3 ; 25) $\psi(h) = \mathfrak{L}(\tau_h \mathrm{T}) \cdot \varphi(x-h)$

est, pour T et φ fixées, indépendante de h. Nous allons montrer que ses dérivées partielles sont nulles.

(VI, 3 ; 26)

$$\frac{\partial}{\partial h_k} \psi(h) = \left[\frac{\partial}{\partial h_k} \mathfrak{L}(\tau_h \mathrm{T})\right] \cdot \varphi(x-h) + \mathfrak{L}(\tau_h \mathrm{T}) \cdot \frac{\partial}{\partial h_k} \varphi(x-h).$$

Pour le 1^er^ terme du 2^e^ membre on a :

(VI, 3 ; 27)

$$\frac{\partial}{\partial h_k} \mathfrak{L}(\tau_h \mathrm{T}) = \mathfrak{L}\left[\frac{\partial}{\partial h_k} (\tau_h \mathrm{T})\right] = -\mathfrak{L}\left[\frac{\partial}{\partial x_k} (\tau_h \mathrm{T})\right] = -\frac{\partial}{\partial x_k} \mathfrak{L}(\tau_h \mathrm{T})$$

en vertu de la continuité de $\mathfrak{L}$ et des formules (III, 4 ; 11) et (VI, 3 ; 22). Finalement on a bien

(VI, 3 ; 28)

$$\frac{\partial}{\partial h_k} \psi(h) = \mathfrak{L}(\tau_h \mathrm{T}) \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \varphi(x-h) + \frac{\partial}{\partial h_k} \varphi(x-h)\right] = 0.$$

$\mathfrak{L}$ permute alors avec tous les produits de convolution avec des distributions à support compact en vertu de (VI, 3 ; 16), ce qui inversement entraîne (VI, 3 ; 23) et (VI, 3 ; 22). Posons alors

(VI, 3 ; 29) $\mathfrak{L}(\delta) = \mathrm{S}.$

On aura si T est à support compact,

(VI, 3 : 30) $\mathfrak{L}(\mathrm{T}) = \mathfrak{L}(\mathrm{T} * \delta) = \mathrm{T} * \mathfrak{L}(\delta) = \mathrm{S} * \mathrm{T}$, c. q. f. d.

Remarque Si $\mathfrak{L}$ est une opération linéaire continue de $(\mathfrak{D}')$ dans $(\mathfrak{D}')$, S est nécessairement à support compact. En effet, on considérera des masses ponctuelles $C_\nu \delta_{(h_\nu)}$ arbitrairement grandes s'éloignant indéfiniment dans R^n ; elles convergent vers 0 dans $(\mathfrak{D}')$, donc aussi leurs transformées $C_\nu(\mathrm{S} * \delta_{(h_\nu)}) = C_\nu(\tau_{(h_\nu)} \mathrm{S})$, ce qui serait impossible si le support de S n'était pas compact. S étant à support compact, la formule (VI, 3 ; 30), vraie pour $\mathrm{T} \in (\mathcal{E}')$, est vraie pour $\mathrm{T} \in (\mathfrak{D}')$, par passage à la limite, $(\mathcal{E}')$ étant dense dans $(\mathfrak{D}')$.

Extension Nous verrons plus loin (voir page 197) que, si $\mathcal{L}$ est une opération linéaire continue de $(\mathcal{D})$ dans $(\mathcal{D}')$ permutant avec les dérivations partielles, c'est le produit de convolution avec une distribution $\in(\mathcal{D}')$. Ce théorème général couvre tous les cas pratiques rencontrés. Supposons par exemple que $\mathcal{L}$ soit une opération linéaire continue de $L^2(R^n)$ dans lui-même, permutant avec les dérivations pour les fonctions différentiables de L^2 (ou avec les translations dans tous les cas), elle est sûrement une opération linéaire continue de $(\mathcal{D})$ dans $(\mathcal{D}')$, donc de la forme $\mathcal{L}(T) = S * T$ où S est une distribution, qui, en général, n'est pas une fonction ni une mesure, mais possède la propriété : Si $f \in (\mathcal{D})$ tend vers 0 dans L^2, $S * f$ tend vers 0 dans L^2. Exemple : $S = v \cdot p \cdot \frac{1}{x}$ (pour $n = 1$) ; l'opération $f(x) \rightarrow v \cdot p \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)dt}{x - t}$ est continue dans L^2 (1). On peut voir que, dans ce cas, S est une distribution dont la transformée de Fourier est une fonction bornée. Mais le théorème général n'utilise pas la transformation de Fourier.

Polynomes de dérivation

Dans toute la théorie du produit de convolution, il sera parfois commode d'écrire $\frac{\partial}{\partial x_k}$ pour représenter la distribution $\frac{\partial \delta}{\partial x_k}$, et l'on aura alors

$$\frac{\partial}{\partial x_k} * T = \frac{\partial T}{\partial x_k}. \tag{VI, 3; 31}$$

Mais dans une telle formule il n'y a pas lieu de faire jouer un rôle différent à $\frac{\partial}{\partial x_k}$ et à T ; ce sont deux distributions dont on effectue le produit de convolution, et l'on pourra aussi bien écrire

$$T * \frac{\partial}{\partial x_k} = \frac{\partial T}{\partial x_k}. \tag{VI, 3; 32}$$

Les polynomes de dérivation (à coefficients constants) sont alors des distributions bien déterminées :

$$D = \sum_p A_p D^p \tag{VI, 3; 33}$$

(notations du chapitre 1) ; p est un système de n entiers

(1) Voir Marcel Riesz [3]

$\geqslant 0$, $p_1, p_2, \ldots, p_n$, $\sum$ est une somme finie. Les A_p sont des constantes complexes ; D est une abréviation de

$$\text{(VI, 3; 34)} \qquad D\delta = \sum A_p D^p \delta$$

et on a, quelle que soit $T \in (\mathcal{D}')$,

$$\text{(VI, 3; 35)} \qquad DT = D * T = T * D.$$

Le produit de convolution de deux tels polynomes de dérivation se forme comme le produit des polynomes par rapport aux lettres $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}$:

$$\text{(VI, 3; 36)} \quad \Big(\sum_p A_p D^p\Big) * \Big(\sum_q B_q D^q\Big) = \sum_{p,q} A_p B_q D^{p+q}.$$

On voit par là que le produit de convolution définit sur l'espace vectoriel des distributions ayant pour support l'origine une algèbre isomorphe à l'algèbre des polynomes.

§ 4 Régularisation des distributions

Définition Soit μ une mesure, f une fonction continue (l'une des deux ayant un support compact). Nous avons vu au § 1 que l'on a

$$\text{(VI, 4; 1)} \quad \mu * f = \iint \cdots \int f(x-t)\, d\mu(t) = \mu_t \cdot f(x-t).$$

Cette formule utilise la définition fonctionnelle de μ, comme forme linéaire sur des fonctions continues ; le produit de convolution est une fonction continue, et la formule précédente le définit pour toute valeur de x. Cette formule se généralise de la façon suivante. Si T est une distribution, α une fonction indéfiniment dérivable au sens usuel (l'une des deux ayant un support compact), $\alpha(x-t)$, x étant supposé fixe, est une fonction de t indéfiniment dérivable ; on peut donc calculer

$$\text{(VI, 4; 2)} \qquad \theta(x) = T_t \cdot \alpha(x-t) ;$$

c'est une fonction de x, qui d'ailleurs est, d'après le théorème II du chapitre IV, une fonction indéfiniment dérivable, avec

$$\text{(VI, 4; 3)} \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k}[T_t \cdot \alpha(x-t)] = T_t \cdot \frac{\partial}{\partial x_k}[\alpha(x-t)].$$

Mais cette fonction de x. indéfiniment dérivable au sens usuel. n'est autre que le produit de convolution $T * \alpha$; en effet

(VI. 4 ; 4)
$$\begin{cases} (T*\alpha).\varphi = T_\xi.[\alpha_\eta.\varphi[(\xi+\eta)] = T_\xi.\iint\cdots\int\alpha(\eta)\varphi(\xi+\eta)\,d\eta \\ \qquad = T_\xi.\iint\cdots\int\alpha(x-\xi)\varphi(x)dx = T_\xi \times \varphi_x.\alpha(x-\xi) \\ \qquad = \varphi_x.[T_\xi.\alpha(x-\xi)] = \varphi_x.\theta_x = \theta.\varphi. \end{cases}$$

Nous pouvons donc énoncer :

Théorème XI *Le produit de convolution de la distribution* T *et de la fonction indéfiniment dérivable* α, *quand les conditions à l'infini sont telles qu'il existe* [$T\in(\mathcal{D}')$, $\alpha\in(\mathcal{D})$: *ou* $T\in(\mathcal{E}')$, $\alpha\in(\mathcal{E})$]. *est une fonction indéfiniment dérivable au sens usuel, appelée régularisée de* T *par* α *et donnée par la formule*

(VI, 4 ; 5) $$(T*\alpha)_x = T_t.\alpha(x-t), \quad \frac{\partial}{\partial x_k}(T*\alpha) = T*\frac{\partial\alpha}{\partial x_k}.$$

On verrait de même que si $T\in(\mathcal{D}'^m)$, $\alpha\in(\mathcal{D}^m)$ [ou $T\in(\mathcal{E}'^m)$, $\alpha\in(\mathcal{E}^m)$], $T*\alpha$ est donnée par la même formule (VI, 4 ; 5) et est une fonction continue.

Ce théorème redémontre d'une façon particulièrement élégante le théorème XV du chapitre III. Si T est une distribution quelconque, α une fonction indéfiniment dérivable à support compact, la *régularisée* $T*\alpha$ est une fonction indéfiniment dérivable ; si des α_j convergent vers δ dans $(\mathcal{E}')$ (par exemple si les α_j sont $\geqslant 0$, de supports tendant uniformément vers l'origine, et telles que $\iint\cdots\int\alpha_j(x)\,dx = 1$), les régularisées $T*\alpha_j$ convergent vers T dans $(\mathcal{D}')$ en vertu de la continuité du produit de convolution. La régularisation nous donne un procédé linéaire régulier pour approcher une distribution par une suite de fonctions indéfiniment dérivables [1]. De plus, si T est une fonction continue, ses régularisées sont des fonctions continues, qui, avec le choix des α_j indiqué entre parenthèses, convergent uniformément vers elle sur tout compact (et uniformément dans R^n. si T est uniformément continue sur R^n) ; si T est une fonction m fois continuement différentiable, la convergence a lieu dans $(\mathcal{E}^m)$ puisque

(VI, 4 ; 6) $$\frac{\partial}{\partial x_k}(T*\alpha) = \frac{\partial T}{\partial x_k}*\alpha.$$

[1] Le théorème XV du chapitre III prouvait seulement que toute distribution est limite d'un filtre de fonctions indéfiniment dérivables.

Si T est une fonction $\in L^p$ (resp. L^p sur tout compact) ($1 \leqslant p < \infty$) la convergence a lieu dans L^p (resp. L^p sur tout compact); si T est une fonction bornée (resp. une mesure ou une distribution d'ordre m), la convergence a lieu faiblement dans L^∞ [resp. $(\mathcal{C}')$ ou $(\mathcal{D}'^m)$].

Naturellement la régularisation approche une distribution T à support non compact par des fonctions indéfiniment dérivables à supports non compacts, mais celles-ci peuvent être très facilement approchées par des fonctions $\in(\mathcal{D})$ (par exemple par multiplication par des fonctions $\beta\in(\mathcal{D})$, à supports de plus en plus étendus, égales à 1 sur des compacts de plus en plus étendus).

Continuité THÉORÈME XII *L'application qui au couple* $T\in(\mathcal{D}')$, $\alpha\in(\mathcal{D})$, *fait correspondre la régularisée* $(T*\alpha)\in(\mathcal{E})$ *est une application bilinéaire hypocontinue.*

Supposons en effet que l'un des deux éléments α, T, reste borné, l'autre convergeant vers 0; si x parcourt un compact, alors, considérée comme fonction de t, $\alpha(x-t)$ est uniformément bornée si α reste bornée dans $(\mathcal{D})$, et elle converge uniformément vers 0 si α converge vers 0 dans $(\mathcal{D})$: donc la fonction $\theta(x)=T*\alpha$ converge vers 0 au sens usuel, uniformément sur tout compact en x, dans l'une quelconque des deux hypothèses; comme il en est de même pour chacune de ses dérivées, elle converge vers 0 dans $(\mathcal{E})$.

Par contre l'application bilinéaire, hypocontinue, n'est pas continue. A ce propos, et au sujet des topologies faibles, mêmes remarques qu'au théorème XI du chapitre III.

Le théorème ci-dessus s'étend immédiatement aux applications bilinéaires $(T, \alpha)\to T*\alpha$ *de* $(\mathcal{E}')\otimes(\mathcal{E})$ *dans* $(\mathcal{E})$, *de* $(\mathcal{E}')\otimes(\mathcal{D})$ *dans* $(\mathcal{D})$, *de* $(\mathcal{D}'^m)\otimes(\mathcal{D}^m)$ *ou* $(\mathcal{E}'^m)\otimes(\mathcal{E}^m)$ *dans l'espace* $(\mathcal{E}^0)$ *des fonctions continues muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.*

Produit scalaire et trace du produit de convolution

La formule (VI, 4; 5) nous montre que, pour T et φ quelconques, pourvu que le produit de convolution ait un sens, $T(\varphi)$ n'est autre que la valeur à l'origine de $T*\varphi(-x)$. Si nous appelons $\check{\varphi}$ et $\check{T}$ la fonction et la distribution déduites de φ et T par une symétrie par rapport à l'origine,

$$\text{(VI, 4; 7)} \qquad \check{\varphi}(x)=\varphi(-x); \qquad \check{T}(\check{\varphi})=T(\varphi); \qquad \check{T}(\varphi)=T(\check{\varphi}),$$

et si nous désignons par « trace » d'une fonction continue sa valeur

à l'origine. Tr. $f(x) = f(0)$, on voit que l'on peut écrire :

$$(\text{VI}, 4; 8) \qquad T(\varphi) = \text{Tr.}\,(T * \check{\varphi}) = \text{Tr.}\,(\check{T} * \varphi).$$

Cette formule joue le même rôle que la formule (V, 1 ; 5) ; cette dernière représentait $T(\varphi)$ comme l'intégrale du produit $T\varphi$, tandis que (VI, 4 ; 8) représente $T(\varphi)$ comme trace du produit de convolution $T * \check{\varphi}$. On voit ainsi que si $T * \varphi = 0$, quelle que soit $\varphi \in (\mathcal{D})$, T est nulle.

L'opération $\check{}$, symétrie par rapport à l'origine, conserve évidemment toutes les structures algébriques de l'ensemble des fonctions et distributions ; en particulier la multiplication et la convolution,

$$(\text{VI}, 4, 9) \qquad (ST)\check{} = \check{S}\check{T}\,; \qquad (S * T)\check{} = \check{S} * \check{T}.$$

On voit que dans une formule de produit scalaire entre fonctions et distributions, où interviennent des produits de convolution, on peut faire passer un élément d'un côté à l'autre en le remplaçant par son symétrique : par exemple

$$(\text{VI}, 4; 10) \qquad (A * B * C).(D * E * \varphi * \psi)$$
$$= (A * B * \check{\varphi} * \check{\psi}).(\check{C} * D * E) = \text{Tr.}\,(A * B * C * \check{D} * \check{E} * \check{\varphi} * \check{\psi}).$$

(A, B, C, D, E, φ, ψ, doivent avoir toutes des supports compacts, sauf une au plus).

La formule (VI, 4 ; 10) montre en particulier que

$$(\text{VI}, 4; 11) \qquad (S * T).\varphi = T.(\check{S} * \varphi) = S.(\check{T} * \varphi),$$

ce qui prouve que, dans la dualité entre $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$, la convolution avec $S \in (\mathcal{E}')$ dans $(\mathcal{D})$ a pour transposée la convolution avec $\check{S}$ dans $(\mathcal{D}')$.

On retrouve, comme cas particulier, ce qui a été dit à propos des formules (II, 1 ; 6) et (II, 5 ; 2) : τ_{+h} et τ_{-h} sont transposées de même que $\frac{\partial}{\partial x_k}$ et $-\frac{\partial}{\partial x_k}$.

La formule (VI, 4 ; 11) montre encore qu'on connaît le produit de convolution $S * T$, si, pour $\varphi \in (\mathcal{D})$, on connaît $\check{T} * \varphi$, mais ce dernier produit est donné directement par (VI, 4 ; 5).

Terminons ce paragraphe par quelques exemples et formules.

Formule I Si $E(x)$ et $L(x)$ sont respectivement une fonction exponentielle et une fonction linéaire

$$\text{(VI, 4 ; 12)} \quad E(x) = \exp.(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n) = \exp.(a \cdot x)$$
$$\text{(VI, 4 ; 13)} \quad L(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n = (a \cdot x),$$

on démontre immédiatement, en appliquant les définitions, les formules suivantes, où interviennent des produits de convolution et des produits de multiplication :

$$\text{(VI, 4 ; 14)} \qquad E(x)(S * T) = [E(x)S] * [E(x)T]$$
$$\text{(VI, 4 ; 15)} \qquad L(x)(S * T) = [L(x)S] * T + S * [L(x)T].$$

Formule II Quelle que soit la distribution T à support compact, $T * 1$ est la constante $T(1) = \iint \cdots \int T$ (formule (VI, 4 ; 5) avec $\alpha = 1$).

Plus généralement, si $P(x)$ est un polynome de degré $\leqslant m$, la formule de Taylor

$$\text{(VI, 4 ; 16)} \qquad P(x-t) = \sum_{|p| \leqslant m} \frac{x^p}{p\,!} [D^pP(t)]^{\check{}}$$

montre que

$$\text{(VI, 4 ; 17)} \quad T * P = T_t \cdot P(x-t) = \sum_{|p| \leqslant m} [T \cdot (D^pP)^{\check{}}] \frac{x^p}{p\,!}$$

est un polynome de degré $\leqslant m$.

Ainsi, la régularisée de T par un polynome α est un polynome $T * \alpha$; si l'on utilise une suite de polynomes α_j tendant vers la mesure de Dirac δ dans $(\mathcal{D}')$, les $T * \alpha_j$ donneront une approximation polynomiale de T. Si T était une distribution à support quelconque, on pourrait sur tout ouvert d'adhérence compacte Ω la remplacer par une distribution à support compact T_1, dont les régularisées $T_1 * \alpha_j$ donneraient une approximation polynomiale de T sur Ω.

Formule III L'application de la formule (VI, 4 ; 5) à $\alpha = E(x)$ montre que le produit de convolution d'une distribution à support compact T et d'une exponentielle est une exponentielle proportionnelle :

$$\text{(VI, 4 ; 18)} \qquad E(x) * T = (T \cdot \check{E})E(x).$$

Plus généralement on voit que le produit de convolution de T avec une exponentielle-polynome de degré $\leqslant m$ (produit d'une exponentielle par un polynome de degré $\leqslant m$) est une exponentielle-polynome de degré $\leqslant m$; le produit de composition avec une

combinaison linéaire finie d'exponentielles ou d'exponentielles-polynomes est une combinaison d'exponentielles ou d'exponentielles-polynomes.

Ainsi la régularisée de T par un polynome trigonométrique est un polynome trigonométrique (un polynome trigonométrique est une exponentielle où $a_1, a_2, \dots a_n$ sont purement imaginaires) : en utilisant une suite α_j de polynomes trigonométriques tendant vers δ dans $(\mathcal{D}')$, on en déduit une approximation trigonométrique de T.

§ 5 Produit de convolution dans le cas de supports non compacts

Définition et propriétés

Soient S et T deux distributions, de supports non compacts A et B. Le produit de convolution de S et T a un sens bien défini si A et B possèdent la propriété suivante : pour $\xi \in A$, $\eta \in B$, $\xi + \eta$ ne peut rester à distance finie que si ξ et η restent tous deux à distance finie. Cela revient à dire que l'application $(\xi, \eta) \to \xi + \eta$ de $A \times B$ dans $A + B$ est régulière à l'infini : cela s'exprime par le fait que, quel que soit le compact K, l'intersection $A \cap (K - B)$ est un compact.

En effet soit $\varphi \in (\mathcal{D})$, de support compact K, l'intersection I des supports de $\varphi(\xi + \eta)$ et $S_\xi \otimes T_\eta$ dans $R^n \times R^n$ est composée de points (ξ, η) vérifiant $\xi \in A$, $\eta \in B$, et $\xi + \eta \in K$; donc I est compacte ; alors, d'après ce qui a été dit page 90 du tome I, on peut définir $(S_\xi \otimes T_\eta) \cdot \varphi(\xi + \eta)$, qui sera égale à $(S_\xi \otimes T_\eta) \cdot \alpha(\xi)\varphi(\xi + \eta)$; $\alpha(\xi)$ est une fonction $\in (\mathcal{D})$, égale à 1 sur un voisinage de $A \cap (K - B)$.

La quantité $(S_\xi \otimes T_\eta) \cdot \varphi(\xi + \eta)$ ainsi définie est bien une forme linéaire continue sur $(\mathcal{D})$, et par conséquent elle définit bien une distribution $S * T \in (\mathcal{D}')$. *Le support de* $S * T$ *est encore contenu dans la somme* $A + B$ *des supports de* S *et* T, qui, moyennant les hypothèses sur A et B, est bien un ensemble fermé. On voit de plus que *le produit de convolution* $S * T$ *est une fonction bilinéaire continue de* S *et* T, *au sens suivant : si des distributions* S_j *convergent vers* 0 *dans* $(\mathcal{D}')$ *en gardant leurs supports contenus dans un ensemble fermé fixe* A, *et si les distributions* T_j *convergent vers* 0 *dans* $(\mathcal{D}')$ *en gardant leurs supports contenus dans un ensemble fermé fixe* B, A *et* B *ayant la propriété ci-dessus, les distributions* $S_j * T_j$ *convergent vers* 0 *dans* $(\mathcal{D}')$.

Commutativité, associativité

Le produit de convolution ainsi défini est commutatif, mais il

n'est pas nécessairement associatif. Soient R, S, T, 3 distributions de supports respectifs A, B, C. L'associativité signifie que l'on a

$$(\text{VI}, 5; 1) \qquad (R * S) * T = R * (S * T).$$

On ne pourra l'affirmer que si l'on peut d'emblée définir le produit de convolution nécessairement commutatif des 3 distributions, $R * S * T$.

Cela sera possible si A, B, C, possèdent la propriété suivante : pour $\xi \in A$, $\eta \in B$, $\zeta \in C$, $\xi + \eta + \zeta$ ne peut rester à distance finie que si ξ, η, ζ, restent tous à distance finie. Ou encore : si l'application $(\xi, \eta, \zeta) \to \xi + \eta + \zeta$ de $A \times B \times C$ dans $A + B + C$ est régulière à l'infini. Alors, quelle que soit $\varphi \in (\mathcal{D})$, de support compact K, on peut directement poser

$$(\text{VI}, 5; 2) \quad (R * S * T) \cdot \varphi = (R_\xi \otimes S_\eta \otimes T_\zeta) \cdot \varphi(\xi + \eta + \zeta),$$

l'intersection des supports de $R_\xi \otimes S_\eta \otimes T_\zeta$ et $\varphi(\xi + \eta + \zeta)$ dans $R^n \times R^n \times R^n$ étant compacte. La valeur commune des deux membres de (VI, 5 ; 1) est alors celle de $R * S * T$, définie par (VI, 5 ; 2).

Exemple de non associativité : si Y est la fonction d'Heaviside (Cas d'une variable, $n = 1$),

$$(\text{VI}, 5; 3) \quad \begin{cases} \left(1 * \dfrac{d}{dx}\right) * Y = 0, & \text{car} \quad 1 * \dfrac{d}{dx} = 0, \\ 1 * \left(\dfrac{d}{dx} * Y\right) = 1 * \delta = 1. \end{cases}$$

On voit d'ailleurs que le produit de convolution de plusieurs distributions ne peut avoir sûrement un sens, lorsque l'une a pour support l'espace entier, que si toutes les autres sont à supports compacts.

Nous donnerons ici deux exemples très importants dans la pratique, de produits de composition de distributions à supports non compacts.

Les opérations du calcul symbolique à une variable ($n = 1$)

Nous considérerons les distributions dont le support est « limité à gauche » (resp. à droite), c'est-à-dire contenu dans une demi-droite $(c, +\infty)$ (resp. $(-\infty, c)$), c pouvant dépendre de la distribution considérée. Si en particulier les deux distributions S et T sont des

fonctions f et g de supports contenus dans $(0, +\infty)$, le produit de convolution $f * g$ prend la forme très simple classique :

$$\text{(VI. 5 ; 4)} \quad h(x) = \int_0^x f(x-t)g(t)dt \qquad (\text{donc } 0 \text{ pour } x \leqslant 0).$$

On voit sur cette formule que h existe toujours, les comportements de f et g pour $x \to +\infty$ sont sans importance. Mais les remarques faites ci-dessus montrent que plus généralement le produit de convolution d'un nombre fini quelconque de distributions à supports limités à gauche a toujours un sens ; car une somme de nombres bornés inférieurement ne peut rester bornée que si tous restent bornés.

Remarquons que si T est une distribution à support limité à gauche et φ une fonction indéfiniment dérivable (au sens usuel) à support limité à droite, le produit scalaire $T . \varphi$ a un sens, car les supports de T et φ se coupent suivant un compact. Nous sommes donc amenés à poser les définitions suivantes :

a) $(\mathcal{D}_+)$ [resp. $(\mathcal{D}_-)$] sera l'espace des fonctions φ indéfiniment dérivables (au sens usuel) à support limité à gauche (resp. à droite) : on introduira dans $(\mathcal{D}_+)$ la topologie limite inductive des $(\mathcal{E}_{(c, +\infty)})$, où $(\mathcal{E}_{(c, +\infty)})$ est l'espace des fonctions $\varphi \in (\mathcal{E})$ à support dans $(c, +\infty)$, muni de la topologie induite par $(\mathcal{E})$;

b) $(\mathcal{D}'_+)$ [resp. $(\mathcal{D}'_-)$] sera l'espace des distributions $\in (\mathcal{D}')$ à supports limités à gauche (resp. à droite). On introduira dans $(\mathcal{D}'_+)$ la topologie limite inductive des $(\mathcal{D}'_{(c, +\infty)})$, où $(\mathcal{D}'_{(c, +\infty)})$ est le sous-espaces de $(\mathcal{D}')$ formé des distributions à support dans $(c, +\infty)$, muni de la topologie induite par $(\mathcal{D}')$.

Alors $(\mathcal{D}'_+)$ est le dual de l'espace $(\mathcal{D}_-)$, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires continues sur $(\mathcal{D}_-)$; d'ailleurs $(\mathcal{D}_-)$ est aussi le dual de $(\mathcal{D}'_+)$. [1].

On démontre alors que $(\mathcal{D}_-)$ et $(\mathcal{D}'_+)$ sont en dualité forte réciproque et possèdent les différentes propriétés données au chapitre III pour $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$. De même $(\mathcal{D}_+)$ et $(\mathcal{D}'_-)$ sont en dualité forte réciproque.

Théorème XIII. — *Le produit de convolution des distributions* $\in (\mathcal{D}'_+)$ *est associatif et commutatif. Le support de* $S * T$ *est contenu dans la somme* $A + B$ *des supports de* S *et* T. *L'application qui à* S *et* T

[1] Voir page 90

fait correspondre $S * T$ *est une application bilinéaire dont la restriction à* $(\mathcal{D}'_{(c, +\infty)}) \times (\mathcal{D}'_{(c, +\infty)})$ *est continue.*

Démonstrations analogues à celles des paragraphes précédents. L'introduction de l'espace $(\mathcal{D}'_+) \times (\mathcal{D}'_+)$ donnerait lieu à une fonction bilinéaire hypocontinue, mais discontinue, comme au théorème V.

Pour $T \in (\mathcal{D}'_+)$ et $\varphi \in (\mathcal{D}_-)$, la symétrique $\check{\varphi}$ est $\in (\mathcal{D}_+)$ et l'on a encore

$$(\text{VI}, 4; 8) \qquad T(\varphi) = \text{Tr.}\, T * (\check{\varphi}) = \text{Tr.}(\check{T} * \varphi),$$

la régularisée $T * \check{\varphi}$ étant une fonction $\in (\mathcal{D}_+)$. *L'application bilinéaire* $(T, \alpha) \to T * \alpha$ *de* $(\mathcal{D}'_+) \times (\mathcal{D}_+)$ *dans* $(\mathcal{D}_+)$ *est hypocontinue.*

L'espace $(\mathcal{D}'_+)$ est une algèbre commutative, comme $(\mathcal{E}')$. La mesure de Dirac δ est son élément unité.

Théorème XIV *L'algèbre* $(\mathcal{D}'_+)$ *n'a pas de diviseurs de* o

On sait en effet que le produit de convolution $f * g$ de deux fonctions continues à supports limités à gauche ne peut être $\equiv 0$ que si l'une des deux est $\equiv 0$ [1]. Il faut démontrer la même propriété pour deux distributions S et T de $(\mathcal{D}'_+)$.

Soient α et β deux fonctions $\not\equiv 0$ de $(\mathcal{D}_+)$; de $S * T = 0$ on déduit $(S * \alpha) * (T * \beta) = (S * T) * (\alpha * \beta) = 0$.

Mais $S * \alpha$ et $T * \beta$ sont deux fonctions continues à supports limités à gauche; leur produit de convolution étant nul, l'une d'elles est nulle, par exemple $S * \alpha$. Alors quelle que soit $\varphi \in (\mathcal{D}_-)$,

$$(S * \check{\varphi}) * \alpha = (S * \alpha) * \check{\varphi} = 0;$$

comme $S * \check{\varphi}$ et α sont deux fonctions continues, l'une d'elles est nulle, et comme, par hypothèse, α n'est pas nulle, $S * \check{\varphi}$ est nulle; alors, d'après (VI, 4; 8), $S(\varphi)$ est nulle pour toute φ, donc S est bien nulle, c. q. f. d.

Cette propriété très importante est spéciale au cas de deux distributions dont les supports sont limités du même côté; elle est a fortiori vérifiée pour deux distibutions de supports compacts, $(\mathcal{E}')$ n'a pas de diviseurs de o. Par contre le produit de convolution de

[1] Ce théorème a été démontré d'abord par Titchmarsh [2] page 327, puis par Crum [1] et Dufresnoy [1], Mikusinski [7].

C'est sur ce théorème que M. Mikusinski dans [2], [3], base une théorie analogue à celle des distributions

deux distributions, l'une $\in(\mathcal{D}')$, l'autre $\in(\mathcal{E}')$, peut être nul sans qu'aucune soit nulle : ainsi

$$\text{(VI, 5 ; 5)} \qquad \frac{d}{dx} * 1 = \frac{d}{dx}(1) = 0.$$

L'étude du produit de composition dans $(\mathcal{D}'_+)$ et des équations auxquelles il donne naissance se fait habituellement par la transformation de Laplace ; elle constitue le calcul symbolique.

Application : dérivation d'ordre non entier.

Prenons comme distribution particulière de $(\mathcal{D}'_+)$ la distribution Y_m définie à la formule (II, 2 ; 31). $Y_m(\varphi)$ pour $\varphi\in(\mathcal{D}_-)$ fixée est une fonction holomorphe entière de la variable complexe m ; on peut dire aussi que Y_m est une fonction holomorphe entière de m à valeurs dans $(\mathcal{D}'_+)$.

On a la formule de convolution suivante :

$$\text{(VI, 5 ; 6)} \qquad Y_p * Y_q = Y_{p+q}.$$

En effet cette formule est évidente si p et q sont des nombres complexes de partie réelle > 0, car alors le symbole Pf. est inutile, Y_p et Y_q sont des fonctions, et la formule précédente s'écrit :

$$\text{(VI, 5 ; 7)} \qquad \int_0^x \frac{(x-t)^{p-1}\,t^{q-1}}{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}\,dt = \frac{x^{p+q-1}}{\Gamma(p+q)} \quad \text{pour} \quad x > 0,$$

ce qui est une conséquence classique des propriétés des fonctions eulériennes. Alors les deux fonctions holomorphes de p et q $Y_p * Y_q$ et Y_{p+q}, qui sont égales pour $\mathcal{R}p$ et $\mathcal{R}q > 0$, sont égales quels que soient p et q.

La formule (VI, 5 ; 6) permet, pour m quelconque, d'écrire Y_m sous la forme Y^{*m} puisque, pour m entier, c'est la puissance $m^{\text{ième}}$ de Y dans l'algèbre $(\mathcal{D}'_+)$. Nous pouvons alors définir la primitive et la dérivée d'ordre complexe, m, de T, par les formules

$$\text{(VI, 5 ; 8)} \qquad I^m T = Y_m * T ; \qquad D^m T = Y_{-m} * T.$$

On a les formules suivantes, conséquences de (VI, 5 ; 6) :

(VI, 5 ; 9)

$$I^p(I^q T) = I^{p+q}(T) ; \quad D^p(D^q T) = D^{p+q} T ; \quad D^m(I^m T) = I^m(D^m T) = T$$

On retrouve des formules classiques (qui habituellement exigent des hypothèses restrictives sur la dérivabilité : voir (VI, 3 ; 13)), mais qui sont valables sans restriction. Pour toute distribution à

support limité à gauche, $I^m T$ dépend continûment de la distribution à intégrer T et analytiquement de l'ordre d'intégration complexe m.

Pour m entier > 0, $D^m S$ est bien la dérivée ordinaire, à cause de la 2ᵉ formule (II, 2; 31). $I^m S$ n'est pas n'importe quelle primitive de S : c'est la seule qui soit à support limité à gauche; toute autre diffère de celle-ci d'un polynome de degré $\leqslant m-1$, donc a nécessairement un support illimité à gauche [voir aussi formules (VI, 5, 24)].

On voit sur ces formules que la dérivation et l'intégration des distributions $\in (\mathcal{D}'_+)$ sont des opérations de même nature : ce sont des opérations de convolution

Si l'on voulait définir les mêmes notions pour des distributions à support limité à droite, il faudrait considérer les distributions $(\check{Y})_m = (Y_m)^\vee$ et définir la puissance $m^{\text{ième}}$ des opérateurs $(-I)$ et $(-D)$ par

$$\text{(VI, 5; 10)} \quad (-I)^m S = \check{Y}_m * S, \qquad (-D)^m S = \check{Y}_{-m} * S.$$

Les deux opérations peuvent être à la fois définies si S est à support limité à la fois à gauche et à droite, c'est-à-dire compact. Il en résulte en particulier, en faisant $m=1$, que, si S est une distribution à support compact, sa seule primitive à support limité à gauche est $Y * S$, et sa seule primitive à support limité à droite est $-\check{Y} * S$.

Cela nous donne un nouveau procédé pour trouver une primitive d'une distribution quelconque T (chapitre II, § 4). Nous choisirons une fonction quelconque α, indéfiniment dérivable au sens usuel, égale à 0 pour $x \leqslant -c$, à 1 pour $x \geqslant c > 0$; et nous poserons

$$\text{(VI, 5; 11)} \qquad S = \alpha S + (1-\alpha) S;$$

αS a son support limité à gauche, et $(1-\alpha)S$ a son support limité à droite. Une primitive particulière de S sera alors

$$\text{(VI, 5; 12)} \qquad (Y * \alpha S) + \left[-\check{Y} * (1-\alpha) S\right].$$

Ce procédé s'étend aussitôt à la recherche, dans R^n, d'une solution de l'équation $\dfrac{\partial T}{\partial x_1} = S$: on remplace Y par la mesure linéaire $Y_{x_1} \times \delta_{x_2 x_3 \ldots x_n} = Y_1$ [formule (IV, 5; 9)], et on utilise la même fonction $\alpha(x_1)$.

Si maintenant nous posons

$$\text{(VI, 5; 13)} \qquad {}_a Y_m = [\exp. (ax)] Y_m,$$

la formule (VI, 4 ; 14), jointe à (VI, 5 ; 6), montre que l'on a aussi

$$(\text{VI}, 5 ; 14) \quad {}_aY_p * {}_aY_q = {}_aY_{p+q}, \qquad \text{d'où} \qquad {}_aY_m = ({}_aY)^{*m},$$

Posons alors, quels que soient le nombre complexe m et la distribution $T \in (\mathcal{D}'_+)$,

$$(\text{VI}, 5 ; 15) \qquad \begin{cases} {}_aI^m T = {}_aY_m * T \\ {}_aD^m T = {}_aY_{-m} * T ; \end{cases}$$

les opérateurs ${}_aI^m$ et ${}_aD^m$ sont encore du type des intégrations et dérivations d'ordre complexe. Mais on voit immédiatement que

$$(\text{VI}, 5 ; 16) \qquad {}_aY_{-1} = [\exp. (ax)]\delta' = \delta' - a\delta,$$

de sorte que l'opération ${}_aD$ est la dérivation composée

$$(\text{VI}, 5 ; 17) \qquad {}_aDT = \frac{dT}{dx} - aT$$

et ${}_aD^m$ est la puissance $m^{\text{ième}}$ de l'opération ${}_aD$. En particulier si m est un entier $\geqslant 0$, $T = {}_aI^m S$ est l'unique solution à support limité à gauche de l'équation différentielle de degré m

$$(\text{VI}, 5 ; 18) \qquad \left(\frac{d}{dx} - a\right)^m T = S.$$

Le procédé indiqué aux formules (VI, 5 ; 11 et 12) en donnerait une solution dépendant continûment de T, même si T est à support quelconque.

Ce procédé peut d'ailleurs s'étendre aux équations différentielles à coefficients non constants, moyennant une généralisation du produit de convolution de Volterra. D'autre part, en utilisant dans R^n les produits directs, on généralisera les formules du chapitre IV, § 5, ex. 3, en dérivations d'ordre non entier par rapport aux diverses variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Il serait d'ailleurs facile de multiplier les applications de ce paragraphe au calcul symbolique des équations différentielles, de simplifier (ou de rendre correctes) les formules d'usage courant et d'en trouver de nouvelles.

Les opérations du calcul symbolique à plusieurs variables

Nous nous contenterons de quelques indications. Soit Γ un cône (c'est-à-dire un ensemble de R^n qui est réunion de demi-droites issues d'un même point. Γ peut être réduit à 1 demi-droite ou être

un volume conique) de sommet origine, fermé, convexe, tel qu'il existe au moins un hyperplan passant par son sommet dans lequel il n'ait pas de génératrice. Nous appellerons support « limité à gauche par rapport à Γ » un support contenu dans un translaté du cône Γ; support limité à droite par rapport à Γ un support contenu dans un translaté du symétrique $-\Gamma = \check{\Gamma}$ de Γ.

Le produit de convolution de distributions en nombre fini quelconque à supports limités à gauche est alors possible; il est associatif et commutatif.

Théorème XIV *bis* — *L'algèbre* $(\mathcal{D}'_{+\Gamma})$ *n'a pas de diviseurs de* O.

La démonstration de ce théorème figure dans Lions [2].

On voit aussi que le produit de convolution d'un nombre fini quelconque de distributions a un sens et est associatif et commutatif, si toutes ces distributions, sauf une au plus, appartiennent à $(\mathcal{D}'_{+\Gamma})$, celle qui éventuellement n'appartient pas à $(\mathcal{D}'_{+\Gamma})$ ayant un support qui coupe tous les $K-\Gamma$, K compact, suivant des compacts (par exemple un demi-espace convenable).

Ces considérations sont le véritable fondement de la théorie des équations aux dérivées partielles à coefficients constants du type hyperbolique normal (et même à coefficients non constants, en généralisant le produit de convolution de Volterra). Le cône Γ est alors le volume conique d'équation

$$x_n \geqslant 0, \qquad x_n^2 - x_1^2 - x_2^2 \cdots - x_{n-1}^2 \geqslant 0.$$

Si nous considérons alors les distributions Z_m de M. Marcel Riesz [formule (II, 3; 31)], elles appartiennent toutes à $(\mathcal{D}'_{+\Gamma})$ et Z_m est une fonction holomorphe entière de la variable complexe m à valeurs dans $(\mathcal{D}'_{+\Gamma})$. On a la formule de convolution suivante :

$$Z_p * Z_q = Z_{p+q}. \tag{VI, 5; 19}$$

Lorsque p et q ont des parties réelles $> n$, Z_p et Z_q sont des fonctions continues, le produit de convolution se calcule par une intégrale usuelle, et la formule ci-dessus est une conséquence des propriétés des intégrales eulériennes(1); elle est donc vraie pour p et q quelconques, les 2 membres étant des fonctions holomorphes de p et q. Compte tenu de (II, 3; 32), la formule (II, 3; 33) est alors un cas particulier de (VI, 5; 19) pour $p=-2k$ entier pair $\leqslant 0$.

(1) C'est cette formule de convolution (étendue aussi par prolongement analytique) qu'utilise M. Marcel Riesz dans la résolution du problème de Cauchy pour l'équation des ondes. Voir M. Riesz [2], p. 32-33

Nous pouvons alors écrire :

(VI, 5 ; 20) $Z_1 = Z, \quad Z_m = Z^{*m}, \quad Z_{-2m} = (\nabla\delta)^{*m} = \nabla^{*m}$

$$\nabla^{*(-m)} = \frac{1}{\pi^{\frac{n-2}{2}} 2^{2m-1}\Gamma(m)\Gamma\left(1+m-\frac{n}{2}\right)} \operatorname{Pf.}(s^{2m-n}).$$

Nous sommes amenés à poser, si T a son support dans le demi-espace $x_n \geqslant 0$ (ou plus généralement si son support coupe les translatés du cône $-\Gamma$ suivant des compacts) :

(VI, 5 ; 21) $\quad J^m T = Z_{2m} * T; \qquad \nabla^m T = Z_{-2m} * T.$

Les opérateurs d'intégration et de dérivation J^m et ∇^m ont les mêmes propriétés que I_m et D_m [formules (VI, 5 ; 9)]. Pour m entier > 0

(VI, 5 ; 22) $\qquad J^m T$

est la seule solution T de l'équation des ondes itérée, à second membre S,

(VI, 5 ; 23) $\qquad \nabla^m T = S,$

qui ait son support contenu dans le demi-espace $x_n \geqslant 0$. En effet, si S et T ont leurs supports dans ce demi-espace, et si m est complexe quelconque, (VI, 5 ; 22) et (VI, 5 ; 23) sont équivalentes, comme on le voit par application de (VI, 5 ; 9) :

(VI, 5 ; 24) $\quad \begin{cases} \nabla^m T = S \Rightarrow J^m \nabla^m T = T = J^m S \\ J^m S = T \Rightarrow \nabla^m J^m S = S = \nabla^m T. \end{cases}$

Les opérateurs J^m donnent la solution du problème de Cauchy pour les équations des ondes. En effet, comme nous l'avons vu au chapitre v, § 6, le problème de Cauchy pour l'équation (VI, 5 ; 23), avec une solution T qui soit égale à une fonction définie pour $x_n \geqslant 0$ et des données initiales sur l'hyperplan $x_n = 0$, revient à la résolution d'une équation modifiée de (VI, 5 ; 23) :

(VI, 5 ; 25) $\qquad \nabla^m T = S + H,$

où H est une distribution connue, portée par l'hyperplan $x_n = 0$, dépendant des données initiales. L'unique solution T, distribution définie dans R^n, à support contenu dans le demi-espace $x_n \geqslant 0$, est

(VI, 5 ; 26) $\qquad T = J^m(S + H).$

Elle sera bien solution du problème si S et H sont assez régulières

pour que T soit une fonction continue pour $x_n \geqslant 0$ avec ses dérivées d'ordre $\leqslant 2m-1$. L'absence de diffusion des ondes (principe de Huyghens) pour n pair $> 2m$ provient de ce que le support de Z_{2m} est la surface du cône d'ondes.

Si maintenant nous développons suivant la formule du binome les puissances de $\nabla - \lambda\delta$, où λ est un nombre complexe, nous obtenons formellement :

$$\text{(VI, 5; 27)} \quad (\nabla - \lambda\delta)^{*(-m)} = \sum_k \frac{(-m)(-m-1)\ldots(-m-k+1)}{k!}(-1)^k\lambda^k\nabla^{*(-m-k)}$$

La série du 2e membre est bien convergente dans $(\mathcal{D}'_{+\Gamma})$, quelque soit m complexe, car pour k assez grand, $\nabla^{*(-m-k)} = Z_{2(m+k)}$ est une fonction continue, et son expression (II, 3; 31) ou (VI, 5; 20) donne immédiatement une majoration (classique dans la théorie des équations intégrales de Volterra) qui rend la serie uniformément convergente sur tout compact de R^n. Les relations algébriques entre coefficients du binome donnent alors

$$\text{(VI, 5; 28)} \quad (\nabla - \lambda\delta)^{*p} * (\nabla - \lambda\delta)^{*q} = (\nabla - \lambda\delta)^{*p+q},$$

ce qui, à posteriori, justifie l'écriture $(\nabla - \lambda\delta)^{*m}$. On obtient ainsi des distributions liées à la résolution des équations du type « ondes amorties » $\nabla T - \lambda T = 0$. Le calcul donne immédiatement :

$$\text{(VI, 5; 29)} \quad {}_\lambda\nabla^{*(-m)} = (\nabla - \lambda\delta)^{*(-m)} = \frac{\mathrm{Pf.}\, s^{2m-n}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(m)2^{2m-1}}\left(\sum_k \frac{\left(\frac{\lambda s^2}{4}\right)^k}{k!\,\Gamma\left(k+1+m-\frac{n}{2}\right)}\right)$$

étant entendu que, pour les valeurs singulières de m, la distribution reste continue en m et s'obtient par passage à la limite. Pour λ réel, on obtient [1]

$$\text{(VI, 5; 30)} \quad {}_\lambda\nabla^{*(-m)} = \frac{|\lambda|^{\frac{n}{4}-\frac{m}{2}}}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\Gamma(m)2^{m+\frac{n}{2}-1}} \times \begin{cases} \mathrm{Pf.}\, s^{m-\frac{n}{2}} I_{m-\frac{n}{2}}(\sqrt{\lambda}s) & \text{pour } \lambda > 0 \\ \mathrm{Pf.}\, s^{m-\frac{n}{2}} J_{m-\frac{n}{2}}(\sqrt{|\lambda|}s) & \text{pour } \lambda < 0 \end{cases}$$

[1] M. Riesz [2], p. 89-90, effectue ce calcul d'une manière « symbolique ». Nous voyons ici qu'il est rigoureusement justifié et constitue une véritable méthode permettant de passer d'une équation aux dérivées partielles à une autre

I et J étant des fonctions de Bessel. Pour $\lambda = 0$ on réobtient (VI, 5 ; 20).

Par ailleurs la solution élémentaire relative à l'opérateur $(\nabla - \lambda\delta) * (\nabla - \mu\delta)$ s'obtient par décomposition d'une fraction en éléments simples :

(VI, 5 ; 31)

$$[(\nabla - \lambda\delta) * (\nabla - \mu\delta)]^{*(-1)} = \frac{1}{\lambda - \mu} [(\nabla - \lambda\delta)^{*(-1)} - (\nabla - \mu\delta)^{*(-1)}]$$

ou

$$\text{(VI, 5 ; 32)} \quad {}_{\lambda}\nabla^{*(-1)} * {}_{\mu}\nabla^{*(-1)} = \frac{1}{\lambda - \mu} ({}_{\lambda}\nabla^{*(-1)} - {}_{\mu}\nabla^{*(-1)}).$$

§ 6 Application du produit de convolution a l'étude de l'intégration

Application à la recherche des primitives

Le produit de convolution permet de résoudre à nouveau d'une façon complète le problème de l'intégration des distributions. Nous avons vu [formule (VI, 5 ; 12)] comment il donne une solution particulière de l'équation $\frac{\partial T}{\partial x_1} = S$; il donne aussi l'indétermination du problème, car si une distribution T vérifie $\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0$, toutes ses régularisées $T * \alpha$, $\alpha \in (\mathcal{D})$, sont des fonctions qui vérifient

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(T * \alpha) = \frac{\partial T}{\partial x_1} * \alpha = 0,$$

ce sont donc des fonctions continues indépendantes de x_1 au sens usuel ; on a donc, quel que soit $h = \{h_1, 0, \ldots 0\}$, $\tau_h(T * \alpha) - T * \alpha = 0$, ou, d'après le théorème IX, $(\tau_h T - T) * \alpha = 0$, ce qui prouve que $\tau_h T - T = 0$, c'est-à-dire que T est invariante par translation parallèle à l'axe des x_1 (théorème IV du chapitre II). Si de même T est une distribution dont toutes les dérivées premières sont nulles, toute régularisée $T * \alpha$ est une fonction continue dont les dérivées premières sont nulles, donc une constante ; alors T, limite de ses régularisées lorsque α tend vers δ dans $(\mathcal{E}')$, est limite de fonctions constantes, mais les fonctions constantes forment un sous-espace vectoriel à 1 dimension de $(\mathcal{D}')$ donc fermé, et T est une fonction constante.

Mais le produit de convolution va surtout nous donner les propriétés d'une distribution T dont on sait que les dérivées partielles $\frac{\partial T}{\partial x_1} = S_1$, $\frac{\partial T}{\partial x_2} = S_2$, ... $\frac{\partial T}{\partial x_n} = S_n$, possèdent certaines propriétés de régularité locale.

Distributions dont les dérivées premières sont des mesures

Nous nous appuierons sur un lemme démontré par M. Soboleff (1):

Lemme *Si $f(x)$ est à support compact, et $\in L^p$, $p \geqslant 1$, et si $0 \leqslant \lambda < n$, le produit de convolution $g(x) = (1/r)^\lambda * f$ appartient à L^q sur tout compact, dès que*

$$\text{(VI, 6; 1)} \quad \frac{1}{q} \geqslant \sup\left(\frac{1}{q_1}, 0\right), \qquad \frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} + \frac{\lambda}{n} - 1.$$

Il n'y a exception que pour :

a) $p = 1$. *Alors $g \in L^q$, sur tout compact, dès que $\frac{1}{q} > \frac{1}{q_1} = \frac{\lambda}{n}$. Mais alors la propriété reste vraie si on remplace f par une mesure.*

b) $\frac{1}{q_1} = 0$, $\lambda \neq 0$. *Alors $g \in L^q$ sur tout compact pour tout q fini.*

Dans tous ces cas on a, sur tout compact, des majorations :

$$\text{(VI, 6; 2)} \qquad \|g\|_q \leqslant C\|f\|_p,$$

la constante C dépendant de q, du compact sur lequel on majore g, et du support compact de f.

Remarque On peut supprimer toutes les restrictions « à support compact » ou « sur tout compact »; si $f(x) \in L^p(R^n)$, alors $g \in L^q(R^n)$, avec cette fois l'égalité $\frac{1}{q} = \frac{1}{q_1}$, sauf pour $p = 1$ ou $\frac{1}{q_1} \leqslant 0$, où aucune conclusion globale n'est possible.

On peut alors généraliser comme suit le théorème VII du chapitre II :

Théorème XV (Kryloff) (2) *Si les dérivées premières S_i de T sont des fonctions $\in L^p$ sur tout compact, alors T est une fonction*

(1) Soboleff [3]

(2) Voir Kryloff [1]. Le théorème démontré par Kryloff est uniquement relatif au cas où l'on sait d'avance que T est une fonction, mais le genre de difficultés est le même. Notre démonstration est très analogue à celle de Kryloff

$\in L^q$ *sur tout compact, dès que* $\frac{1}{q} \geqslant \sup\left(\frac{1}{q_1}, 0\right)$, $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$, *et* T *est une fonction continue si* $p > n$ *ou* $p = n = 1$.

Il n'y a exception que pour :

a) $p = 1$, $n \neq 1$. *Alors* $T \in L^q$ *sur tout compact, dès que* $\frac{1}{q} > \frac{1}{q_1}$. *Mais alors ce résultat subsiste si les* S_i *sont des mesures.*

b) $p = n \neq 1$. *Alors* T *est une fonction dont toutes les puissances finies sont sommables sur tout compact.*

1° Supposons d'abord que T soit à support compact. Considérons la somme :

$$\sum_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} * \left(-\frac{1}{N}\frac{1}{r^{n-2}}\right)\right) * S_i = \frac{n-2}{N}\sum_i \left(\frac{x_i}{r^n} * S_i\right), \tag{VI, 6; 3}$$

N étant la constante de la formule (II, 3; 10). Cette expression vaut, d'après (II, 3; 10)

(VI, 6; 4)
$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} * \left(-\frac{1}{N}\frac{1}{r^{n-2}}\right) * \frac{\partial}{\partial x_i} * T = \Delta * \left(-\frac{1}{N}\frac{1}{r^{n-2}}\right) * T = \delta * T = T.$$

D'où :

$$T = \frac{n-2}{N}\sum_i \left(\frac{x_i}{r^n} * S_i\right). \tag{VI, 6; 5}$$

Pour $n = 2$, il faudrait remplacer $-\frac{1}{N}\frac{1}{r^{n-2}}$ par $-\frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{r}$, et, dans (VI, 6; 5), $\frac{n-2}{N}$ par $\frac{1}{2\pi}$.

On vérifie, d'ailleurs, que la distribution trouvée admet bien les S_i comme dérivées partielles :

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x_j} &= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} * \left(-\frac{1}{N}\frac{1}{r^{n-2}}\right) * \frac{\partial S_i}{\partial x_j} \\ &= \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} * \left(-\frac{1}{N}\frac{1}{r^{n-2}}\right) * \frac{\partial S_j}{\partial x_i} \\ &= \sum_i \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} * \left(-\frac{1}{N}\frac{1}{r^{n-2}}\right) * S_j = \Delta * \left(-\frac{1}{N}\frac{1}{r^{n-2}}\right) * S_j \\ &= \delta * S_j = S_j. \end{aligned} \tag{VI, 6; 6}$$

Comme les S_i sont par hypothèse des mesures et que les $\frac{x_i}{r^n}$ sont

des fonctions, T est une fonction. De plus, si μ est une mesure $\geqslant 0$ majorant toutes les mesures S_i, comme on a $\left|\frac{x_i}{r^n}\right| \leqslant \frac{1}{r^{n-1}}$, T est majorée par $C\left(\frac{1}{r}\right)^{n-1} * \mu$, et l'application du lemme de M. Soboleff, suivant les diverses hypothèses sur les S_i, ou, ce qui revient au même, sur μ, donne les résultats du théorème. Cependant, dans le cas exceptionnel *b*), la continuité de T ne saurait résulter d'une simple majoration, pour $p > n$; mais comme $S_i \in L^p$ et $(x_i/r^n) \in L^{p'}$ sur tout compact, avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} \leqslant 1$, la continuité résulte de ce qui a été dit à propos de (VI, 1; 2).

2° Supposons maintenant T à support quelconque. Soit γ une fonction $\in (\mathcal{D})$, égale à $+1$ sur un voisinage de l'origine. Au lieu de $\frac{1}{r^{n-2}}$, nous utiliserons la fonction γ/r^{n-2}.

(VI, 6; 7)
$$\Delta\left(-\frac{1}{N}\frac{\gamma}{r^{n-2}}\right) = -\frac{1}{N}\left[\frac{\Delta\gamma}{r^{n-2}} + 2\sum_i \frac{\partial\gamma}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)\right] + \delta = \zeta + \delta,$$

où $\zeta \in (\mathcal{D})$, puisque $\frac{1}{r^{n-2}}$ n'est singulière qu'à l'origine, où les dérivées de γ sont nulles. Nous avons substitué à la solution élémentaire de l'équation de Laplace une « paramétrix » à support compact (tome I, page 139).

(VI, 6; 8)
$$\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(-\frac{1}{N}\frac{\gamma}{r^{n-2}}\right) * S_i = \Delta * \left(-\frac{1}{N}\frac{\gamma}{r^{n-2}}\right) * T = T + \zeta * T,$$

et comme $\zeta * T \in (\mathcal{E})$ (théorème XI), l'étude locale de T est ramenée à celle du 1er membre. Mais les quantités $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\gamma}{r^{n-2}}\right)$ sont majorées par $\frac{A}{r^{n-1}}$, et les S_i sont majorés par une même mesure $\mu \geqslant 0$. Pour l'étude de T sur un ouvert Ω d'adhérence compacte, les produits de convolution du 1er membre de (VI, 6; 8) ne font intervenir, puisque γ est à support compact, que les valeurs de S_i sur un ouvert d'adhérence compacte (théorème III), ce qui revient à supposer μ à support compact; nous sommes encore ramenés au lemme de M. Soboleff.

En prenant le support de γ assez voisin de l'origine, on pourra étudier T en fonction des S_i lorsque ces distributions ne sont définies que dans un ouvert Ω de R^n. Le théorème a un caractère purement local et se transporte, par conséquent, sur toute variété indéfiniment différentiable V^n avec des modifications convenables.

Remarques. — 1° Si les S_i, à supports quelconques, sont dans $L^p(R^n)$, la fonction définie au 2e membre de (VI, 6 ; 5) existe et appartient à $L^q(R^n)$, $\frac{1}{q}=\frac{1}{p}-\frac{1}{n}$, sauf pour $p=1$ ou $p\geqslant n$, cas où l'on ne peut rien conclure de global. Alors cette fonction admet encore les S_i comme dérivées premières (¹), donc elle est égale à T à une fonction constante près ; on sera par exemple sûr qu'elle est égale à T elle-même si T converge vers 0 à l'infini ou $\in L^r$, r fini quelconque (ou si T est une « distribution convergeant vers 0 à l'∞ », voir § 8). Dans le cas où $p>n$, le 1er membre de (VI, 6 ; 8) est borné sur R^n en vertu de l'inégalité de Hölder, donc T elle-même est une fonction continue bornée sur R^n toutes les fois qu'on sait qu'il en est ainsi de $\zeta * T$, par exemple si $T\in L^r(R^n)$, $r\geqslant 1$ quelconque (ou si T est une « distribution bornée sur R^n », voir § 8).

2° Le théorème se généralise aux ensembles bornés et suites ou filtres convergents de distributions. Si les dérivées premières des T_j convergent vers 0 dans L^p sur tout compact, *les* T_j *sont sommes de constantes* C_j *et de fonctions* f_j *convergeant vers* 0 *dans* L^q *sur tout compact*, $\frac{1}{q}\geqslant\frac{1}{p}-\frac{1}{n}$ (avec les cas exceptionnels signalés). C'est encore la formule (VI, 6 ; 8) qui le montre : le 1er membre converge bien vers 0 dans L^q ; et au 2e membre, les $g_j=\zeta * T_j$ sont des fonctions continues dont les dérivées premières $\frac{\partial g_j}{\partial x_k}=\zeta * S_{kj}$ convergent vers 0 uniformément sur tout compact, de sorte que les g_j sont sommes de constantes $C_j=g_j(0)$ et de fonctions continues convergeant vers 0 uniformément sur tout compact. Extension aux propriétés globales sur R^n comme au théorème XV. On utilise souvent cette propriété sous la forme :

Si les T_j *convergent vers* 0 *dans* $(\mathcal{D}')$ *et si leurs dérivées premières*

(¹) On le voit en remarquant que les calculs (VI, 6 ; 6) conservent un sens, d'après le théorème XXVI qui sera vu plus loin $\left(\frac{1}{r^\lambda}\in(\mathcal{D}')_{L^k},\quad k>n/\lambda\right)$

convergent vers o dans L^p sur tout compact, les T_j convergent vers o *dans L^q sur tout compact.*[1].

3° Si les S_i sont des fonctions, T est (théorème V du chapitre II) absolument continue sur presque toutes les droites et admet les S_i presque partout comme dérivées usuelles.

4° L'exemple de la fonction $1/r^\lambda (0 < \lambda < n)$ montre que la borne $\frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ est la meilleure possible. L'exemple de la fonction

$$\left(\log \frac{1}{r}\right)^k, \qquad k < 1 - \frac{1}{n}, \qquad (n > 1),$$

montre que, pour $p = n$, on ne peut prendre $q = \infty$.

Par contre, je n'ai pas de contre-exemple prouvant que, pour $p = 1$, on ne peut pas prendre $\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{n}$. Cette valeur de q est donc peut-être encore acceptable, bien que cela ne résulte pas du lemme de M. Soboleff.

Conditions de Lipschitz.

On dit qu'une fonction $f(x) \in L^p$ satisfait à une condition de Lipschitz dans L^p, d'ordre s, $0 \leqslant s \leqslant 1$, s'il existe une constante K telle que l'on ait, pour tout $h \in R^n$,

$$\text{(VI, 6; 9)} \qquad \|f(x+h) - f(x)\|_p \leqslant K|h|^s.$$

Pour $p = \infty$, f est continue, et c'est la condition de Lipschitz au sens ordinaire.

Si la majoration ci-dessus est appliquée à une fonction $f(x)$ de puissance p-ième sommable *sur tout compact*, et si elle est vraie seulement au sens de la norme dans L^p sur tout compact et pour h assez petit, on dira que f satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre s dans L^p sur tout compact.

Théorème XVI. — *Si les dérivées premières de* T *sont des fonctions de puissance p-ième sommable sur tout compact,* T *est une fonction qui satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre $s < 1$ dans L^q sur tout compact, dès que* $\frac{1}{q} \geqslant \sup\left(\frac{1}{q_1}, 0\right)$, $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n} + \frac{s}{n}$.

Il n'y a exception que pour :

a) $p = 1$, $n \neq 1$. *Alors* T *satisfait à une condition de Lipschitz*

[1] Voir d'autres théorèmes globaux dans Schwartz [19]

d'ordre s dans L^p *sur tout compact dès que* $\frac{1}{q} > \frac{1}{q_1}$. *Mais alors ce résultat subsiste si les dérivées de* T *sont des mesures.*

b) $\frac{1}{q_1} = 0$, $n \neq 1$. *Alors* T *satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre s dans* L^q *sur tout compact, pour tout q fini.*

On a en effet la majoration suivante pour $0 \leqslant s \leqslant 1$

$$\text{(VI, 6; 10)} \quad \left|\frac{x_i + h_i}{|x+h|^n} - \frac{x_i}{|x|^n}\right| \leqslant K|h|^s \left[\frac{1}{|x|^{n-1+s}} + \frac{1}{|x+h|^{n-1+s}}\right].$$

(Cette majoration est évidente pour h fixe; quand h varie, la présence de $|h|^s$ au numérateur résulte de considérations d'homogénéité.)

Soit d'abord $n > 1$. Bornons-nous à la démonstration du théorème lorsque T est à support compact; nous avons vu au théorème précédent comment on procède lorsqu'il n'en est pas ainsi. La formule (VI, 6; 5) montre que

(VI, 6; 11)

$$\tau_{-h}T - T = (\delta_{(-h)} - \delta) * T = \sum_i \frac{n-2}{N}\left((\delta_{(-h)} - \delta) * \frac{x_i}{r^n}\right) * S_i.$$

Si les S_i sont majorées par une mesure $\mu \geqslant 0$, on déduit alors de (VI, 6, 11) la majoration, valable pour $s < 1$,

$$\text{(VI, 6; 12)} \quad |\tau_{-h}T - T| \leqslant K_1|h|^s \left[\frac{1}{r^{n-1+s}} * \mu + \delta_{(-h)} * \frac{1}{r^{n-1+s}} * \mu\right].$$

Les deux expressions entre crochets se majorent de la même manière à l'aide du lemme de M. Soboleff, et l'on trouve aussitôt les résultats du théorème.

Si maintenant $n = 1$, on remarquera simplement que

$$T(x+h) - T(x) = \int_x^{x+h} S(t)\,dt,$$

et des majorations élémentaires donnent le résultat cherché [formule (VI, 1; 2)].

Nous avons laissé de côté le cas d'une condition de Lipschitz d'ordre $s = 1$; on peut alors renforcer le théorème:

Théorème XVII. — *Si la fonction $f(x)$ admet poar dérivée $\partial f/\partial x_1$ (au sens de la théorie des distributions) une fonction g_1, et si f et g_1 sont localement dans* L^p, *f vérifie une condition de Lipschitz d'ordre* 1

localement dans L^p, *pour tout déplacement* h *parallèle à* Ox_1 ; *de plus, pour* p *fini*, f *admet* g_1 *comme dérivée forte dans* L^p *sur tout compact.*

L'expression « sur tout compact » (ou « localement ») peut être supprimée partout dans l'énoncé du théorème. Faisons justement la démonstration pour $L^p(R^n)$. Comme f est absolument continue sur presque toutes les parallèles à Ox_1, on a la formule suivante, pour $h = \{h_1, 0, \ldots, 0\}$

$$\text{(VI, 6 ; 13)} \quad \frac{f(x+h)-f(x)}{h_1} = \frac{1}{h_1}\int_{x_1}^{x_1+h_1} g_1(t_1, x_2, \ldots, x_n)dt_1.$$

Cette formule peut d'ailleurs s'écrire :

$$\text{(VI, 6 ; 14)} \qquad \frac{\tau_{-h}f - f}{h_1} = g_1 * \mu = \int \tau_\xi g_1 d\mu(\xi),$$

où μ est une mesure portée par l'axe des Ox_1, de densité linéaire égale à $1/h_1$ sur le segment $(-h_1, 0)$ de cet axe, et 0 sur le reste de cet axe. La formule (VI, 6 ; 14) est alors vraie si l'on remplace f par une distribution quelconque T, car

$$\text{(VI, 6 ; 15)} \quad \frac{\tau_{-h}T - T}{h_1} = \frac{\delta_{(-h)} - \delta}{h_1} * T = \frac{\partial\mu}{\partial x_1} * T = \mu * \frac{\partial T}{\partial x_1}.$$

Comme μ est une moyenne (c.-à.-d. une mesure $\geqslant 0$ de masse totale 1), on voit que, quelle que soit la distribution T, $\tau_{-h}T - T$ est une mesure ou une fonction $\in L^p$ si $\dfrac{\partial T}{\partial x_1}$ est une mesure ou une fonction $\in L^p$. Si $g_1 \in L^p$, on voit que $\|g_1 * \mu\|_p$ est majorée par $\|g_1\|_p$ [formule (VI, 1 ; 4)], de sorte que f satisfait bien à une condition de Lipschitz d'ordre 1 dans L^p. Mais de plus, lorsque $\xi \to 0$, $\tau_\xi g_1$ converge vers g_1 dans L^p, donc aussi $g_1 * \mu$, si p est fini. Alors, pour p fini, $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h_1}$ converge dans L^p vers g_1, c. q. f. d.

Pour p infini, $\tau_\xi g_1$ converge seulement faiblement dans L^∞ vers g_1 pour $\xi \to 0$, on peut seulement dire que f satisfait à une condition de Lipschitz ordinaire d'ordre 1, et que g_1 est la *dérivée faible* de f dans L^∞. Pour $p = 1$, on peut supposer que g_1 est une mesure ; la formule de convolution (VI, 6 ; 14) est encore applicable, et montre que, si f est une mesure, elle vérifie encore une condition de Lipschitz d'ordre 1 et admet g_1 comme dérivée faible dans l'espace $(\mathcal{C}')$ des mesures.

Réciproquement si une fonction $f(x)$ vérifie une condition de Lipschitz d'ordre 1 dans L^p (sur tout compact) pour tout déplacement parallèle à Ox_1, elle a une dérivée-distribution qui est une fonction $\in L^p$ (sur tout compact) pour $p > 1$, une mesure pour $p = 1$; car cette dérivée est la limite dans $(\mathcal{D}')$ de $\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h_1}$, et il suffit alors d'appliquer la remarque 2 de la page 77 (tome I).

Si, dans le théorème précédent, on suppose que non seulement $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ mais toutes les dérivées $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ sont des mesures ou des fonctions, on a des conditions de Lipschitz d'ordre 1 pour tout déplacement $h \in R^n$.

Remarque Il en résulte un critère suffisant de compacité relative dans L^p : *si des fonctions $f(x)$ sont bornées dans L^p sur tout compact ainsi que leurs dérivées premières* (au sens des distributions), *elles forment un ensemble relativement compact pour la convergence dans L^p sur tout compact* (1).

Dérivées d'ordre supérieur

Supposons maintenant qu'une distribution ait toutes ses dérivées d'ordre m qui soient des mesures ou des fonctions $\in L^p$ sur tout compact. En remontant par intégrations successives on en déduira des propriétés de T elle-même. On verra immédiatement que T est une fonction $\in L^q$ sur tout compact, avec

$$\text{(VI, 6 ; 16)} \quad \frac{1}{q} \geqslant \sup\left(\frac{1}{q_1}, 0\right), \quad \frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n},$$

le signe $\geqslant$ étant éventuellement remplacé par $>$ dans les cas exceptionnels déjà signalés $\left(p = 1, \text{ ou } \dfrac{1}{p} - \dfrac{m}{n} = 0\right)$. Ainsi, T est une fonction continue si toutes ses dérivées d'ordre $\left[\dfrac{n}{2}\right] + 1$ sont dans L^2 sur tout compact.

On a naturellement des extensions analogues à celles du th. XV au cas des ensembles bornés, ou des suites ou filtres convergents, et au cas où les dérivées d'ordre m appartiennent à $L^p(R^n)$. (Les constantes sont seulement remplacées par des polynomes de degré $\leqslant m-1$). Par exemple, si les dérivées d'ordre m des T_j convergent

(1) Voir A. Weil [1], p. 52-54

vers o dans L^p sur tout compact, et si les T_j convergent vers o dans $(\mathcal{D}')$, elles convergent vers o dans L^q sur tout compact, $\frac{1}{q} \geqslant \sup\left(\frac{1}{q_1}, 0\right)$ (sauf dans les cas exceptionnels signalés).

Mais il est remarquable que, pour les dérivées d'ordre $m = n$, les cas exceptionnels disparaissent, et l'on peut énoncer :

THÉORÈME XVIII. — *Si toutes les dérivées de rang* $\leqslant 1$ *d'une distribution* T *sont des mesures,* T *est une fonction localement bornée à variation localement bornée ; si toutes ses dérivées de rang* $\leqslant 1$ *sont des fonctions,* T *est une fonction absolument continue.*

Rappelons que pour une dérivée D^pT, le rang est $\sup(p_1, p_2, \dots p_n)$. L'hypothèse relative aux rangs $\leqslant 1$ est donc bien moins restrictive qu'une hypothèse analogue relative aux dérivées d'ordre $\leqslant n$.

Pour étudier T sur un ouvert Ω relativement compact, on pourra remplacer T par αT, où $\alpha \in (\mathcal{D})$ est égale à 1 sur Ω ; mais alors αT est à support compact, et ses dérivées de rang $\leqslant 1$ sont aussi des mesures (ou des fonctions) comme le montre aussitôt la formule de Leibnitz. Cela revient à conserver T mais à supposer *qu'elle est à support compact*. Mais nous allons démontrer que si T est à support compact, la seule hypothèse : « $S = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} T$ est une mesure μ ou une fonction g » entraîne les conclusions du théorème. Utilisons la fonction $Y(x)$ d'Heaviside [formule (IV, 5 ; 8)] égale à 1 pour $x \geqslant 0$ et o ailleurs. On a

$$(\text{VI}, 6 ; 17) \quad Y * S = Y * \frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} * T$$
$$= \left(\frac{\partial^n}{\partial x_1 \dots \partial x_n} * Y\right) * T = \delta * T = T.$$

Alors, si S est une mesure μ, T, produit de convolution d'une mesure et de la fonction bornée Y, est une fonction *bornée* ; si S est une fonction, T est une fonction continue ; l'on a

$$|T| \leqslant \iint \cdots \int |d\mu|.$$

La formule ci-dessus peut encore s'écrire :

$$(\text{VI}, 6 ; 18) \quad T = f(x) = \iint \cdots \int_{t \leqslant x} d\mu(t_1, t_2, \dots, t_n) ;$$

(expression déjà utilisée page 84 si S est une fonction ;

mais la formule (III, 6 ; 11) est maintenant une conséquence de la théorie du produit de convolution).

Réciproquement d'ailleurs, toute fonction f à variation bornée, c'est-à-dire toute intégrale indéfinie d'une mesure, s'exprime localement par un produit de convolution $\mu * Y$, et comme Y a toutes ses dérivées de rang $\leqslant 1$ qui sont des mesures, il en est de même de f.

Remarque En majorant les dérivées de (αT) à partir de celles de T, on voit immédiatement, avec la démonstration ci-dessus, que *si les dérivées de rang* $\leqslant 1$ *de* T *sont des mesures (ou des fonctions) bornées en norme dans* $(\mathcal{C}')$ (ou L^1) *sur une boule de rayon* R *par* M, T *est une fonction, bornée en module sur la boule concentrique de rayon* $R-\varepsilon$, *par* $C(R, n)\varepsilon^{-n}M$, *où la constante* C *est indépendante de* T *et de* ε.

Dans tous les théorèmes précédents nous avons fait intervenir des hypothèses relatives à toutes les dérivées d'un ordre ou d'un rang déterminé ; mais les mêmes hypothèses relatives à une seule combinaison « elliptique » de ces dérivées donnent les mêmes conclusions. Ainsi si le laplacien $S = \Delta T \in L^p$ sur tout compact, T a les mêmes propriétés que si toutes ses dérivées d'ordre 2 sont $\in L^p$ sur tout compact : elle est $\in L^q$ sur tout compact, avec $\frac{1}{q} \geqslant \sup\left(\frac{1}{q_1}, 0\right)$, $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} - \frac{2}{n}$ $\left(\text{avec les cas exceptionnels } p = 1 \text{ ou } \frac{1}{p} - \frac{2}{n} = 0\right)$. On utilisera à cet effet la formule de Poisson (pour T à support compact)

$$(\text{VI}, 6 ; 19) \quad -\frac{1}{N}\frac{1}{r^{n-2}} * S = \Delta * \left(-\frac{1}{N}\frac{1}{r^{n-2}}\right) * T = \delta * T = T,$$

et on appliquera le lemme de M. Soboleff. De même dans le plan à 2 dimensions, si la distribution (complexe) T a sa dérivée $S = \frac{\partial T}{\partial \bar{z}}$ (voir chapitre II, § 3, ex. 3) dans L^p, T a les mêmes propriétés que si ses deux dérivées d'ordre 1 sont dans L^p : $T \in L^q$, avec $\frac{1}{q} \geqslant \sup\left(\frac{1}{q_1}, 0\right)$, $\frac{1}{q_1} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$ (sauf les cas exceptionnels). On utilisera cette fois la formule (pour T à support compact)

$$(\text{VI}, 6 ; 20) \quad \frac{1}{\pi z} * S = \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}} * \frac{1}{\pi z}\right) * T = \delta * T = T.$$

Enfin si E est la « solution élémentaire » de l'équation de Laplace itérée, $\Delta^k E = \delta$, définie au 1^{er} membre de la formule (II, 3; 19), la formule de Poisson généralisée appliquée à $S = \Delta^k T$ (si T est à support compact) :

$$(\text{VI}, 6; 21) \qquad E * S = E * \Delta^k * T = \delta * T = T$$

permet d'étudier T directement en fonction de S. Pour k assez grand, E est m fois continûment différentiable, de sorte que si S est d'ordre m $[\in(\mathcal{D}'^m)]$, T est une fonction continue. On en déduit :

Théorème XIX *Toute distribution dont toutes les dérivées successives sont des mesures (ou plus généralement* $\in(\mathcal{D}'^m)$, *m fixe) est une fonction indéfiniment dérivable au sens usuel.*

La formule (VI, 6; 21) jouera un rôle essentiel dans la suite (§§ 7, 8, 9,), après modification pour des distributions T à support quelconque. Comme dans la démonstration du théorème XV, nous remplacerons E par une « paramétrix » γE $[\gamma \in (\mathcal{D})$, égale à 1 sur un voisinage de l'origine dans $R^n]$, et l'on aura :

$$(\text{VI}, 6; 22) \qquad \begin{cases} \Delta^k * \gamma E - \zeta = \delta, \quad \zeta \in (\mathcal{D}) \\ \Delta^k * (\gamma E * T) - \zeta * T = T. \end{cases}$$

Par exemple, si, dans la 2^e formule, nous prenons pour T une fonction $\in L^p(R^n)$, et k assez grand pour que E soit une fonction continue, on voit que : *toute fonction* $\in L^p(R^n)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ (*resp. toute mesure* μ de *norme* $\iint \cdots \int |d\mu|$ *finie*) *est somme finie de dérivées de fonctions appartenant à* $L^p(R^n)$ [*resp.* $L^1(R^n)$] *continues et bornées sur* R^n, *et, pour* $p < +\infty$, *convergeant vers* 0 *à l'infini.*

Nous emploierons souvent la formule obtenue en appliquant 2 fois la même opération :

$$(\text{VI}, 6; 23) \quad \begin{cases} \Delta^{2k} * (\gamma E * \gamma E) - 2\Delta^k * (\gamma E * \zeta) + (\zeta * \zeta) = \delta \\ \Delta^{2k} * (\gamma E * \gamma E * T) - 2\Delta^k * (\gamma E * \zeta * T) + (\zeta * \zeta * T) = T. \end{cases}$$

Problèmes posés : Si les dérivées premières S_i de T sont des distributions d'ordre $\leqslant m$, T est-elle, pour $m \geqslant 1$, une distribution d'ordre $\leqslant m - 1$?

Si ses dérivées d'ordre l sont d'ordre $\leqslant m$, est-elle d'ordre $\leqslant m - l$, pour $m - l \geqslant 0$?

C'est exact sur la droite ($n = 1$); autrement c'est faux, d'après Ornstein [1].

Il résulte des travaux de M. J. Deny[1] que, si les dérivées premières de T sont des mesures, on peut définir T de façon qu'elle soit quasi partout pseudo-continue, au sens des potentiels de tout ordre $\alpha < 1$ de M. Riesz (peut-on aussi prendre $\alpha = 1$?); et que si ces dérivées sont localement $\in L^2$, T peut-être définie de façon à être quasi-partout pseudo-continue, au sens des potentiels newtoniens (d'ordre 2) (T est alors localement le potentiel d'une distribution ΔT d'énergie finie).

§ 7 Application du produit de convolution a l'étude de la régularité d'une distribution ou d'une famille de distributions

Caractérisation des mesures et des distributions d'ordre fini

Théorème XX. — *Pour qu'une distribution* T *soit une mesure, il faut et il suffit que toutes ses régularisées* $T * \alpha$ *par des fonctions* $\alpha \in (\mathcal{C})$ *(continues à support compact) soient des fonctions continues.*

La nécessité de la condition résulte du § 1, (2°) (cas particulier de ce qui a été dit après le théorème XI). Montrons que la condition est suffisante, et montrons même un peu plus : T est une mesure si, quelle que soit $\alpha \in (\mathcal{C})$, $T * \alpha$ est une fonction localement bornée.

Soit K un compact quelconque, H un voisinage compact de l'origine. La restriction de $T * \check{\varphi}$ à H appartient à L^∞_H pour $\varphi \in (\mathcal{C})$; montrons que l'application linéaire $\mathcal{L}$ de $(\mathcal{C}_K)$ dans L^∞_H définie par $\varphi \rightarrow T * \check{\varphi}$ est continue. Elle l'est évidemment si T est une fonction continue; si alors on remplace T par $T_j = T * \alpha_j$, où $\alpha_j \in (\mathcal{D})$, l'application $\mathcal{L}_j$ définie par $\varphi \rightarrow T_j * \check{\varphi}$ est continue. Mais si $\alpha_j \geqslant 0$, $\iint \cdots \int \alpha_j(x)\,dx = 1$, et si le support de α_j tend vers l'origine pour $j \rightarrow \infty$, de sorte que α_j tend vers δ dans $(\mathcal{E}')$, $T_j * \check{\varphi} = (T * \check{\varphi}) * \alpha_j$ converge faiblement vers $T * \check{\varphi}$ puisque $T * \check{\varphi}$ est une fonction bornée sur tout compact, par hypothèse (voir page 167). Alors un théorème classique de Banach-Steinhaus[2] nous permet d'affirmer que $\mathcal{L}(\varphi)$, limite faible pour toute φ des $\mathcal{L}_j(\varphi)$ ($\mathcal{L}_j$ continues), est elle-même une application linéaire continue.

(1) Deny [1], p. 171. Il faut compléter le résultat de Deny, suivant une méthode qu'il m'a signalée.

(2) Banach-Steinhaus [1].

Démontrons maintenant que, pour toute $\varphi \in (\mathcal{C})$, $T * \dot{\varphi}$ est non seulement bornée sur tout compact, mais continue. Il en est ainsi lorsque $\varphi \in (\mathcal{D})$; mais $(\mathcal{D})$ est dense dans l'espace topologique $(\mathcal{C})$ (ch. I, Th. I), donc pour toute $\varphi \in (\mathcal{C})$, $T * \dot{\varphi}$ est limite forte dans L^∞_H de fonctions continues, donc c'est une fonction continue elle-même.

Alors si l'on pose, pour toute fonction $\varphi \in (\mathcal{C})$,

$$(\mathrm{VI}, 7, 1) \qquad T(\varphi) = \mathrm{Tr}.(T * \dot{\varphi}),$$

on définit une forme linéaire sur $(\mathcal{C})$, continue sur tout $(\mathcal{C}_K)$, et identique à $T(\varphi)$ pour $\varphi \in (\mathcal{D})$ d'après (VI, 4; 8). Cela prouve bien que T est une mesure.

Remarques et conséquences 1° Si l'on suppose que $T * \alpha$ soit une fonction localement bornée pour toute $\alpha \in L^p$ à support compact $(1 \leqslant p < +\infty)$, ou pour toute $\alpha \in (\mathcal{D}^m)$, alors T est une fonction $\in L^{p'}$ sur tout compact $\left(p' = \frac{p}{p-1}\right)$, ou une distribution d'ordre $\leqslant m\,[\in (\mathcal{D}'^m)]$. La démonstration est la même et résulte de ce que $L^{p'}$ est le dual de L^p, $(\mathcal{D}'^m)$ le dual de $(\mathcal{D}^m)$.

2° Si, quelle que soit $\beta \in L^1$ et à support compact, la régularisée $T * \beta$ est une mesure [resp. une fonction $\in L^p$ sur tout compact, $1 < p \leqslant +\infty$; ou une distribution $\in (\mathcal{D}'^m)$] T possède la même propriété. En effet, on considère $(T*\beta)*\alpha$ [$\alpha \in (\mathcal{C})$; ou $\alpha \in L^{p'}$ et à support compact; ou $\alpha \in (\mathcal{D}^m)$] qui est une fonction continue; en l'écrivant alors $(T*\alpha)*\beta$, on est ramené à appliquer deux fois le théorème précédent ou la remarque 1°: $(T*\alpha) \in L^\infty$ sur tout compact, d'où les conclusions pour T.

Ce genre de théorèmes est habituellement étudié avec les « multiplicateurs » dans les séries trigonométriques :

« Si les multiplicateurs λ_i sont tels que, lorsque les a_i sont les coefficients de Fourier d'une fonction continue, les $\lambda_i a_i$ soient encore les coefficients de Fourier d'une fonction continue, alors les λ_i sont les coefficients de Fourier-Stieltjes d'une mesure[1]. »

Cela vient de ce que les multiplicateurs considérés ne sont pas nécessairement a priori des « coefficients de Fourier » (c'est même souvent ce qu'on veut démontrer). En réalité ce sont toujours les coefficients de Fourier d'une distribution T (chapitre VII, § 1) et il reste à démontrer que T est une mesure ou une fonction d'une classe

[1] ZYGMUND [1], p. 101

déterminée. Nous venons de voir comment on peut le faire dans la théorie du produit de convolution ; ces théorèmes n'ont rien à voir avec les séries trigonométriques.

3° Pour que T soit une mesure *dans un ouvert* Ω *de* R^n, il suffit que dans tout ouvert ω d'adhérence $\overline{\omega}$ compacte dans Ω, $T*\alpha$ soit une fonction continue lorsque $\alpha \in (\mathcal{C})$ a son support assez voisin de l'origine.

Soit en effet a un point de Ω, ω un petit voisinage de a. Prenons $\varphi \in (\mathcal{C}_\omega)$, et définissons $T(\varphi)$ par

$$\text{(VI, 7; 2)} \qquad T(\varphi) = \mathrm{Tr.}\left[(T * \check{\varphi} * \delta_{(a)}) * \delta_{(-a)}\right].$$

Le support de $\check{\varphi} * \delta_{(a)}$ est voisin de l'origine ; alors $T * \check{\varphi} * \delta_{(a)}$ est une fonction continue au voisinage de a et par suite $(T * \check{\varphi} * \delta_{(a)}) * \delta_{(-a)}$ au voisinage de l'origine ; on peut prendre sa trace, et définir ainsi $T(\varphi)$ comme forme linéaire continue sur $(\mathcal{C}_\omega)$. Alors T est une mesure au voisinage de tout point de Ω et par suite dans Ω. *Dans tous les théorèmes énoncés plus loin, on pourra se borner à considérer des distributions dans un ouvert* Ω, en se bornant, comme ici, aux α de support assez voisin de l'origine et à l'étude des $T*\alpha$ sur tout ouvert relativement compact dans Ω. Nous donnerons les énoncés pour $\Omega = R^n$.

4° En dehors du cas de l'espace à 1 dimension ($n = 1$), une distribution T telle que, pour toute $\alpha \in (\mathcal{D}^m)$, $T * \alpha$ soit une fonction m fois continuement différentiable, n'est pas nécessairement une mesure. En effet, cela revient à dire que ses dérivées d'ordre $\leqslant m$ sont $\in (\mathcal{D}'^m)$; voir alors le bas de la page 191.

5° On a un théorème analogue au Th. XX, pour un ensemble de mesures borné ou pour une suite de mesures faiblement convergente dans $(\mathcal{C}')$.

Théorème XXI *Si une distribution* T *est telle que, pour un entier* $m \geqslant 0$ *convenable,* $T*\alpha$ *soit une fonction indéfiniment dérivable au sens usuel pour toute* $\alpha \in (\mathcal{D}^m)$, T *est elle-même une fonction indéfiniment dérivable, au sens usuel.*

Il suffit en effet d'appliquer à T la formule (VI, 6 ; 22) en prenant k assez grand pour que $\gamma E \in (\mathcal{D}^m)$.

Ensembles bornés de distributions

On voit immédiatement qu'on pourrait caractériser les ensembles bornés de distributions de la façon suivante :

Pour qu'un ensemble B' *de distributions* T *soit borné dans* $(\mathcal{D}')$, *il*

faut et il suffit que, quelle que soit $\alpha \in (\mathcal{D})$, *les fonctions régularisées* $T * \alpha$ *restent bornées (au sens usuel) sur tout compact quand* T *parcourt* B'.

La condition est nécessaire à cause de la continuité de la régularisation (théorème XII), et suffisante parce que les $T(\alpha) = \mathrm{Tr}\,.\,(T * \check{\alpha})$ sont bornés pour tout α (chapitre III, théorème IX).

Mais on peut démontrer le théorème beaucoup plus fin qui va suivre. Dans de nombreuses applications (théorèmes XXV ; VI et IX du chap. VII), nous énoncerons les théorèmes, comme ci-dessus, sous leur forme élémentaire, étant entendu qu'on peut les rendre plus fins, comme au théorème qui suit et avec le même principe de démonstration.

Théorème XXII 1° *Si* B' *est un ensemble de distributions borné dans* $(\mathcal{D}')$, *alors, quel que soit l'ouvert* Ω *relativement compact de* R^n, *il existe un entier* $m \geqslant 0$ *tel que, pour toute* $\alpha \in (\mathcal{D}^m)$ *de support assez voisin de l'origine, l'ensemble des* $T * \alpha$, $T \in B'$, *soit dans* Ω *un ensemble borné de fonctions continues.*

2° *Si quelle que soit* $\alpha \in (\mathcal{D})$, *l'ensemble des régularisées* $T * \alpha$, $T \in B'$, *est borné dans* $(\mathcal{D}')$, B' *est borné dans* $(\mathcal{D}')$ (¹).

La première partie du théorème résulte immédiatement du théorème XXII du chapitre III. Mais nous allons au contraire utiliser les propriétés du produit de convolution pour démontrer à la fois le théorème ci-dessus et les théorèmes XXI, XXII, et XXVI du chapitre III, sans utiliser le théorème de Hahn-Banach. De plus nous obtiendrons un procédé linéaire explicite pour exprimer les $T \in B'$ dans Ω comme dérivées de fonctions continues bornées.

Il nous suffit évidemment de montrer que les hypothèses de la 2ᵐᵉ partie du théorème entraînent la possibilité d'exprimer les $T \in B'$ dans Ω comme sommes finies $T = \sum_{|p| \leqslant m} D^p f_p$ de dérivées d'indices fixes p de fonctions continues f_p bornées (la somme finie pouvant, sauf dans le cas du théorème XXVI du chapitre III, se ramener par intégration à une dérivée unique). On en déduira en effet que B' est borné, car pour toute $\varphi \in (\mathcal{D}_\Omega)$,

$$T\,.\,\varphi = \sum_{|p| \leqslant m} (-1)^p\, f_p\,.\,D^p \varphi.$$

(¹) On pourrait utiliser la transformation de Fourier pour démontrer ces théorèmes. Nous préférons une démonstration directe, le produit de convolution ayant un sens dans des cas où la transformation de Fourier n'en a pas (groupes non abéliens)

D'autre part la première partie du théorème en résulte aussi immédiatement ; car, si l'on utilise cette même décomposition, non pour Ω, mais pour un voisinage U relativement compact de $\overline{\Omega}$, $T * \alpha$ s'exprimera dans Ω, si α a son support assez voisin de l'origine, à l'aide de l'expression de T dans U (théorème III), d'où

$$T * \alpha = \sum_{|p| \leqslant m} f_p * D^p \alpha .$$

Supposons donc que, quelle que soit $\alpha \in (\mathcal{D})$, les $T * \alpha$ soient, pour $T \in B'$, des distributions bornées. Soit ω un ouvert relativement compact contenant l'origine, $\overline{\omega} = K$ son adhérence dans R^n. Pour α fixée dans $(\mathcal{D}_K)$, il résulte du théorème XII que les applications linéaires $\beta \rightarrow (T * \alpha) * \beta$ de $(\mathcal{D}_K)$ dans L^∞_Ω sont équicontinues, pour $T \in B'$. Mais de même, pour β fixée dans $(\mathcal{D}_K)$, les applications linéaires $\alpha \rightarrow (T * \beta) * \alpha$ de $(\mathcal{D}_K)$ dans L^∞_Ω sont équicontinues. Nous nous appuierons alors sur un théorème de Baire[1] : si des applications bilinéaires $(\alpha, \beta) \rightarrow T * \alpha * \beta$, de $(\mathcal{D}_K) \times (\mathcal{D}_K)$ dans L^∞_Ω (les espaces $(\mathcal{D}_K)$ et L^∞_Ω étant métrisables et complets), sont équicontinues par rapport à chacune des variables α, β, lorsque l'autre est fixée, elles sont équicontinues par rapport à l'ensemble des 2 variables α, β. Il existe donc un voisinage $V = V(m ; \varepsilon ; K)$ de 0 dans $(\mathcal{D}_K)$ tel que, pour α et β dans V, et T dans B', $T * \alpha * \beta$ soit, dans Ω, une fonction continue majorée par 1. Les applications bilinéaires restent alors équicontinues lorsqu'on munit $(\mathcal{D}_K)$ de la topologie induite par $(\mathcal{D}^m_K)$. Si alors α et β sont dans $(\mathcal{D}^m_\omega)$, on peut trouver des α_j et β_j qui sont dans $(\mathcal{D}_K)$, et convergent vers α et β dans $(\mathcal{D}^m_K)$ (d'après la remarque suivant le théorème XI), donc aussi dans $(\mathcal{E}')$; donc les $T * \alpha_j * \beta_j$ convergent uniformément vers une fonction continue dans Ω, et cette fonction continue ne peut être que $T * \alpha * \beta$ qui est leur limite dans $(\mathcal{D}')$ (théorème V). Les α_j et β_j sont contenues dans cV ($c = \underset{|p| \leqslant m}{\operatorname{Max}} \{|D^p\alpha|, |D^p\beta|\}/\varepsilon$) ; donc $|T * \alpha * \beta| \leqslant c^2$ dans Ω, pour $T \in B'$ (les applications bilinéaires $(\alpha, \beta) \rightarrow T * \alpha * \beta$ de $(\mathcal{D}^m_\omega) \times (\mathcal{D}^m_\omega)$ dans L^∞_Ω sont ainsi équicontinues par prolongement). Si alors on utilise la formule (VI, 6 ; 23), on exprime T comme somme finie de dérivées de bi-régularisées $T * \alpha * \beta$, qui sont dans Ω des fonctions continues bornées, si k est assez grand pour que γE soit dans $(\mathcal{D}^m_\omega)$. c. q. f. d.

[1] Bourbaki [6], fascicule XVIII, chap. III, § 4, n° 5, proposition 10, page 43

Suites convergentes de distributions

On caractérise aisément les suites convergentes de distributions de la façon suivante :

Pour qu'une suite de distributions T_j *converge vers* o *dans* $(\mathcal{D}')$, *il faut et il suffit que, quelle que soit* $\alpha \in (\mathcal{D})$, *les régularisées* $T_j * \alpha$ *convergent uniformément vers* o *sur tout compact.*

Mais on peut montrer un théorème beaucoup plus fin, valable aussi pour des filtres convergents ayant une base de filtre bornée ou dénombrable (Voir à ce sujet la remarque qui précède le théorème XXII).

THÉORÈME XXIII 1° *Si une suite* T_j *converge vers* o *dans* $(\mathcal{D}')$, *alors, quel que soit l'ouvert* Ω *d'adhérence* $\overline{\Omega}$ *compacte dans* R^n, *il existe un entier* $m \geqslant$ o. *tel que les régularisées* $T_j * \alpha$ *soient, dans* Ω, *pour toute* $\alpha \in (\mathcal{D}^m)$ *de support assez voisin de l'origine, des fonctions continues convergeant uniformément vers* o.

2° *Si* T_j *est une suite de distributions telle que, pour toute* $\alpha \in (\mathcal{D})$, *les* $T_j * \alpha$ *convergent vers* o *dans* $(\mathcal{D}')$, *il en est de même des* T_j.

On déduit en effet des hypothèses de (2°) que, quelle que soit $\alpha \in (\mathcal{D})$ fixe, les $T_j * \alpha$ convergent vers o dans $(\mathcal{D}')$, donc restent bornées dans $(\mathcal{D}')$.

Alors on déduit du théorème précédent, avec les mêmes notations, qu'il existe un entier $m \geqslant 0$, tel que les applications bilinéaires $(\alpha, \beta) \to T_j * \alpha * \beta$ de $(\mathcal{D}^m_{\cup}) \times (\mathcal{D}^m_{\cup})$ dans L^∞_Ω soient équicontinues; mais les fonctions continues $T_j * \alpha * \beta$ convergent uniformément vers o dans Ω, pour $j \to \infty$, si α et $\beta \in (\mathcal{D}_K)$, c'est-à-dire pour des α et β qui forment un ensemble dense dans $(\mathcal{D}^m_{\cup})$, donc elles convergent aussi uniformément vers o dans Ω pour α et β dans $(\mathcal{D}^m_{\cup})$.

Il suffit alors d'appliquer aux T_j la formule (VI, 6; 23) dans les mêmes conditions qu'au théorème précédent.

Application. Amélioration du théorème X

Soit $\varphi \to \mathcal{L}(\varphi)$ une application linéaire continue de $(\mathcal{D})$ dans $(\mathcal{D}')$ permutant avec les dérivations. La même démonstration qu'au théorème X montre que $\mathcal{L}$ permute avec les convolutions, de sorte que, si $\alpha \in (\mathcal{D})$, on a

(VI, 7; 3) $$\mathcal{L}(\alpha * \varphi) = \mathcal{L}(\alpha) * \varphi.$$

Si une suite $\alpha_\nu \in (\mathcal{D})$ converge vers δ dans $(\mathcal{E}')$, les $\alpha_\nu * \varphi$ convergent vers φ dans $(\mathcal{D})$ (théorème XII), donc les $\mathcal{L}(\alpha_\nu * \varphi)$ convergent vers $\mathcal{L}(\varphi)$ dans $(\mathcal{D}')$. Cela prouve que les distributions $\mathcal{L}(\alpha_\nu)$ sont telles

que leurs régularisées $\mathfrak{L}(\alpha_\nu) * \varphi$, pour toute $\varphi \in (\mathfrak{D})$, convergent dans $(\mathfrak{D}')$, donc elles convergent elles-mêmes dans $(\mathfrak{D}')$. Si S est leur limite, on aura

$$\text{(VI, 7; 4)} \qquad \mathfrak{L}(\varphi) = S * \varphi; \qquad S \in (\mathfrak{D}') \quad \text{(c. q. f. d.)}.$$

Application : caractérisation des fonctions analytiques

Théorème XXIV *Pour qu'une distribution* T *soit une fonction analytique au sens usuel, il faut et il suffit que la régularisée* $T * \alpha$ *soit une fonction analytique pour toute fonction* $\alpha \in (\mathfrak{D})$.

1° La condition est nécessaire. Si en effet T est une fonction analytique $f(x)$, on a sur tout compact K les majorations suivantes :

$$\text{(VI, 7; 5)} \qquad |D^p f(x)| \leqslant p!\,[c(K)]^{|p|}$$

c étant une constante > 0 convenable, dépendant du compact K. Mais sur tout compact K les valeurs de $f * \alpha$ ne dépendent que de celles de f sur un autre compact K', de sorte que

$$\text{(VI, 7; 6)} \qquad |D^p(f*\alpha)| = |D^p f * \alpha| \leqslant p!\,[c(K')]^{|p|} \iint \ldots \int |\alpha(x)|\,dx,$$

ce qui prouve l'analyticité de $f * \alpha$.

2° La condition est aussi suffisante. Soient ω un voisinage relativement compact de l'origine dans R^n, $\overline{\omega} = K$, et Ω un ouvert relativement compact quelconque de R^n.

Montrons d'abord que sur Ω, le rayon de convergence de la fonction analytique $T * \alpha$ est borné inférieurement lorsque α parcourt un ouvert convenable de $(\mathfrak{D}_K)$. Pour p fixé, la quantité

$$\operatorname*{Max.}_{x \in \overline{\Omega}} \sqrt[|p|]{\left|\frac{(D^p T * \alpha)}{p!}\right|}$$

est une fonction continue de $\alpha \in (\mathfrak{D}_K)$. En vertu de l'analyticité de $T * \alpha$, ces fonctions de α sont, lorsque p varie, bornées dans leur ensemble pour toute α fixée. Mais $(\mathfrak{D}_K)$ est un espace de Baire (métrisable et complet) ; donc, d'après un théorème classique de Baire [1], ces fonctions de α sont bien bornées dans leur ensemble sur un ouvert convenable de $(\mathfrak{D}_K)$. Soit c la borne supérieure.

Alors les distributions $\dfrac{D^p(T * \alpha)}{p!\,c^{|p|}}$ sont dans Ω des fonctions continues bornées dans leur ensemble, pour toute $\alpha \in (\mathfrak{D}_K)$. D'après le théorème XXII, il en sera de même pour $\alpha \in (\mathfrak{D}^m_\omega)$, si m est assez grand. Autrement dit, $T * \alpha$ est encore une fonction analytique dans Ω si α

[1] Voir Bourbaki, [2], § 5, n° 4, théorème 2, page 111

a son support assez voisin de l'origine et est seulement m fois continument différentiable. Alors si γE est la paramétrix de la formule (VI, 6 ; 22), $\gamma E * T$ est une fonction analytique dans Ω pour k assez grand ; il en sera de même de son laplacien itéré Δ^k ; comme $\zeta^\gamma * T$ est analytique par hypothèse, T est bien dans Ω une fonction analytique, c. q. f. d.

Remarques Le théorème peut être mis sous une autre forme. Nous avons vu que l'application $h \to \tau_h T$ de R^n dans $(\mathcal{D}')$ est toujours indéfiniment différentiable ; pour qu'elle soit analytique, il faut et il suffit que T soit une fonction analytique usuelle. Le théorème s'étend immédiatement de la façon suivante : Si (Γ) est une classe de fonctions indéfiniment différentiables (au sens de la théorie des fonctions quasi-analytiques), et si cette classe est différentiable (c'est-à-dire si les dérivées de toute fonction de la classe appartiennent à la classe), alors, pour que toutes les régularisées de T appartiennent à (Γ), il faut et il suffit que T soit une fonction indéfiniment dérivable et appartienne à (Γ). Si la classe (Γ) n'est pas différentiable et si les régularisées de T appartiennent à (Γ), T est une fonction indéfiniment dérivable appartenant sur tout ouvert relativement compact à une classe dérivée de (Γ).

§ 8 Nouveaux espaces de distributions, les $(\mathcal{D}'_{L^p})$ [1]

Les espaces $(\mathcal{D}_{L^p})$

Appelons $(\mathcal{D}_{L^p})$ l'espace vectoriel des fonctions φ indéfiniment dérivables, dont toutes les dérivées appartiennent à $L^p(R^n)(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. Nous le munirons de la topologie suivante : des $\varphi_j \in (\mathcal{D}_{L^p})$ convergent vers 0 dans $(\mathcal{D}_{L^p})$, si les φ_j convergent vers 0 dans $L^p(R^n)$, ainsi que chacune de leurs dérivées. $(\mathcal{D}_{L^p})$ est un espace vectoriel topologique complet, localement convexe, à base dénombrable de voisinages.

Nous appellerons aussi $(\mathcal{B})$ l'espace $(\mathcal{D}_{L^\infty})$ (espace des « fonctions indéfiniment dérivables bornées sur R^n ») et $(\dot{\mathcal{B}})$ le sous espace formé des fonctions φ convergeant vers 0 à l'infini ainsi que chacune de leurs dérivées.

$(\mathcal{D})$ est dense dans $(\mathcal{D}_{L^p})(p < +\infty)$ et dans $(\dot{\mathcal{B}})$, mais non dans $(\mathcal{B})$.

D'après la remarque qui suit le théorème XVIII, si $\varphi \in (\mathcal{D}_{L^p})$,

[1] Les espaces $\mathcal{D}_{L^p}$ et $\mathcal{D}'_{L^p}$ sont liés aux espaces de Soboleff $\mathcal{H}^{s,p}$ ou $W^{s,p}$ (ils correspondent à $s = +\infty$ et $s = -\infty$), utilisés constamment en théorie des équations aux dérivées partielles

$p < +\infty$, φ est bornée sur R^n, donc aussi $\in L^q$, $q \geqslant p$, et ell converge vers o à l'infini ; il en est de même de chacune de ses dérivées ; donc $(\mathcal{D}_{L^p}) \subset (\mathcal{D}_{L^q})$ pour $q \geqslant p$ et $\subset (\dot{\mathcal{B}})$ pour $p < \infty$. De plus si des φ_j convergent vers o dans $(\mathcal{D}_{L^p})$, elles convergent aussi vers o dans $(\mathcal{D}_{L^q})$ pour $q \geqslant p$. Les $(\mathcal{D}_{L^p})$ ne sont pas des espaces de Montel : l'ensemble des translatées $\tau_h \varphi$ d'une fonction $\varphi \in (\mathcal{D}_{L^p})$ est borné dans $(\mathcal{D}_{L^p})$, mais n'est pas relativement compact. Cependant, on pourra montrer, avec le théorème XXV, que, dans $(\mathcal{D}_{L^p})$, tout ensemble borné est *faiblement* relativement compact pour $1 < p < +\infty$, de sorte que $(\mathcal{D}_{L^p})$ est quand même réflexif d'après le théorème de Mackey-Arens [1]. $(\mathcal{D}_{L^1})$, $(\dot{\mathcal{B}})$, $(\mathcal{B})$, ne sont pas réflexifs.

Les espaces de distributions $(\mathcal{D}'_{L^p})$

Nous appellerons $(\mathcal{D}'_{L^p})(1 < p \leqslant +\infty)$ le dual de

$$(\mathcal{D}_{L^{p'}})[p' = p/(p-1)]$$

et $(\mathcal{D}'_{L^1})$ le dual de $(\dot{\mathcal{B}})$; ces espaces doivent être munis de la topologie canonique du dual (chapitre III, § 3) ; ce sont des espaces de distributions $\subset (\mathcal{D}')$, car toute forme linéaire continue sur $(\mathcal{D}_{L^{p'}})(1 \leqslant p' < \infty)$ ou $(\dot{\mathcal{B}})$ est définie et continue sur $(\mathcal{D}) \subset (\mathcal{D}_{L^{p'}}) \subset (\dot{\mathcal{B}})$, et si cette forme linéaire coïncide, pour $\varphi \in (\mathcal{D})$, avec une distribution $T \in (\mathcal{D}')$, elle est entièrement déterminée par T puisque $(\mathcal{D})$ est dense dans $(\mathcal{D}_{L^{p'}})$ et dans $(\dot{\mathcal{B}})$.

$(\mathcal{D})$ n'est pas dense dans $(\mathcal{B})$, dont le dual n'est pas un espace de distributions.

Nous appellerons aussi $(\mathcal{B}')$ l'espace $(\mathcal{D}'_{L^\infty})$, et nous dirons d'une distribution $T \in (\mathcal{B}')$ qu'elle est *bornée sur* R^n ; si des $T_j \in (\mathcal{B}')$ convergent vers o dans $(\mathcal{B}')$, nous dirons que ces distributions *convergent vers* o *uniformément sur* R^n. Nous appellerons $(\dot{\mathcal{B}}')$ l'adhérence dans $(\mathcal{B}')$ du sous-espace $(\mathcal{E}')$ des distributions à support compact ; une distribution $T \in (\dot{\mathcal{B}}')$ est une distribution qui *converge vers* o *à l'infini*. $(\mathcal{D})$ est évidemment dense dans $(\dot{\mathcal{B}}')$, puisque dense dans $(\mathcal{E}')$. Bien évidemment $(\mathcal{D}_{L^p}) \subset L^p \subset (\mathcal{D}'_{L^p})$; toutes les dérivées successives d'une distribution de $(\mathcal{D}'_{L^p})$ sont dans $(\mathcal{D}'_{L^p})$, et la dérivation est une opération linéaire continue.

En vertu de la réflexivité, $(\mathcal{D}'_{L^p})$ a pour dual $(\mathcal{D}_{L^{p'}})$ pour $1 < p < +\infty$. Nous verrons plus loin que $(\mathcal{D}'_{L^1})$ a pour dual $(\mathcal{B})$. Il en résulte que $(\mathcal{D})$ est dense dans $(\mathcal{D}'_{L^p})(1 \leqslant p < +\infty)$ (théorème XV

[1] Voir note (1) page 75

du chapitre III). D'autre part, on voit aisément que le dual de $(\dot{\mathcal{B}}')$ est $(\mathcal{D}_{L^1})$. Le dual de $(\mathcal{B}')$ n'est pas un espace de fonctions et $(\mathcal{D})$ n'est pas dense dans $(\mathcal{B}')$, mais le théorème XXV permettra de montrer que $(\mathcal{B})$ est dense dans $(\mathcal{B}')$. Toute forme linéaire continue sur $(\mathcal{D}_{L^{p'}})$ est a fortiori définie et continue sur $(\mathcal{D}_{L^{q'}})$, $q' \leqslant p'$; donc pour $q \geqslant p$, $(\mathcal{D}'_{L^p}) \subset (\mathcal{D}'_{L^q}) \subset (\mathcal{B}')$ et la topologie de $(\mathcal{D}'_{L^p})$ est plus fine que celle de $(\mathcal{D}'_{L^q})$. Pour $p < +\infty$, $(\mathcal{D})$ étant dense dans $(\mathcal{D}'_{L^p})$, $(\mathcal{D}'_{L^p}) \subset (\dot{\mathcal{B}}')$.

Tous les théorèmes démontrés aux §§ 1, 2, 3, du chapitre III relativement à $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont vrais pour $(\mathcal{D}_{L^p})$ et $(\mathcal{D}'_{L^{p'}})$, $1 < p < +\infty$, sauf les théorèmes VII et XII (espaces de Montel) et XIII (identité des topologies forte et faible sur les ensembles bornés). Ces mêmes théorèmes sont encore exacts pour $(\mathcal{D}_{L^1})$ et $(\mathcal{B}')$, $(\mathcal{B})$ et $(\mathcal{D}'_{L^1})$, sauf VII, XII, XIII et XIV (réflexité).

Caractérisation des distributions de $(\mathcal{D}'_{L^p})$ THÉORÈME XXV

1° *Pour qu'une distribution* T *appartienne à* $(\mathcal{D}'_{L^p})$, *il faut et il suffit qu'elle soit somme finie de dérivées de fonctions* $\in L^p(R^n)$.

2° *Pour qu'une distribution* T *soit dans* $(\mathcal{D}'_{L^p})$, *il faut et il suffit que, quelle que soit* $\alpha \in (\mathcal{D})$, *la régularisée* $T * \alpha$ *soit dans* $L^p(R^n)$.

On pourrait remplacer (2°) par un théorème beaucoup plus fin (voir ce qui précède le théorème XXII). On voit en particulier que toute distribution de $(\mathcal{D}'_{L^p})$ est d'ordre borné dans R^n.

Pour simplifier l'écriture, prenons $1 < p \leqslant \infty$; le cas $p = 1$ n'exigerait que des modifications de détail.

Nous ferons une démonstration « circulaire » en 3 parties, qui démontrera tout le théorème :

a) si T est somme finie de dérivées de fonctions $\in L^p$, alors $T \in (\mathcal{D}'_{L^p})$. Évident.

b) si $T \in (\mathcal{D}'_{L^p})$, montrons que, pour $\alpha \in (\mathcal{D})$, $(T * \alpha) \in L^p$.

Appelons B l'ensemble des fonctions $\varphi \in (\mathcal{D})$ de normes bornées par 1 dans $L^{p'}(R^n) \left[p' = p/(p-1) \right]$; B est dense dans la boule unité de $L^{p'}$. Considérons les fonctions $\check{\alpha} * \varphi$; pour α fixe et $\varphi \in B$, elles forment un ensemble borné dans $(\mathcal{D}_{L^{p'}})$, de sorte que les nombres

$$(T * \alpha) \cdot \varphi = T \cdot (\check{\alpha} * \varphi) \qquad \text{(VI, 8 ; 1)}$$

sont bornés ; cela prouve que $T * \alpha$ est une forme linéaire continue sur $(\mathcal{D})$ muni de la topologie induite par $L^{p'}$, donc $T * \alpha \in L^p(R^n)$. On voit d'ailleurs que $T * \alpha \in (\mathcal{D}_{L^p})$.

c) si $T * \alpha \in L^p$ pour toute $\alpha \in (\mathcal{D})$, montrons que T est somme de dérivées de fonctions de L^p. Les nombres

$$\text{(VI, 8; 2)} \qquad (T * \check{\varphi}) \cdot \check{\alpha} = (T * \alpha) \cdot \varphi$$

sont, pour toute α fixe $\in (\mathcal{D})$, bornés pour $\varphi \in B$, en vertu de l'hypothèse $T * \alpha \in L^p$. Alors les distributions $T * \check{\varphi}$ sont bornées dans $(\mathcal{D}')$, et, en vertu du théorème XXII, quel que soit le compact K, il existe un entier $m \geqslant 0$ tel que, pour α fixe $\in (\mathcal{D}^m_K)$, les premiers membres de (VI, 8; 2), donc aussi les 2es membres, soient bornés pour $\varphi \in B$. Alors $S = T * \alpha$ est encore dans L^p pour $\alpha \in (\mathcal{D}^m_K)$, et il suffit de prendre pour α la fonction γE de la formule (VI, 6; 22) pour achever la démonstration.

La démonstration d'une forme plus fine du théorème (voir théorème XXII) exigerait la considération des quantités $(T * \alpha * \beta) \cdot \varphi$, α et $\beta \in (\mathcal{D})$, et la formule (VI, 6; 23).

Remarques 1° On aurait pu directement montrer le 1° et le 2° du théorème en utilisant une méthode analogue à celle du théorème XXVII du chapitre III. Mais une telle méthode utilisait le théorème de Hahn-Banach (voir à ce sujet le théorème XXII). Voir l'amélioration (VI, 8; 6).

2° De plus la démonstration que nous venons de donner permet de généraliser immédiatement le théorème à *un ensemble de distributions borné dans* $(\mathcal{D}'_{L^p})$, *ou à une suite de distributions* (*ou un filtre ayant une base de filtre bornée ou dénombrable*) *convergeant vers* 0 *dans* $(\mathcal{D}'_{L^p})$ (méthode du théorème XXIII), ce que ne permettrait pas, au moins pour les suites convergentes, le théorème de Hahn-Banach. On voit ainsi que si une suite T_j converge vers 0 dans $(\mathcal{D}'_{L^p})$, les T_j sont sommes finies de dérivées d'indices fixes de fonctions continues f_j qui :

a) dans le cas de convergence forte, convergent vers 0 dans L^p et dans L^∞ ;

b) dans le cas de convergence faible, convergent vers 0 uniformément sur tout compact, en restant bornées dans L^p et dans L^∞.

3° Grâce à ce qui a été dit après la formule (VI, 6; 22), on peut toujours supposer que les fonctions de $L^p(R^n)$ qui interviennent dans l'énoncé du théorème sont continues, bornées, et qu'elles convergent vers 0 à l'infini pour $p < +\infty$ ou pour $T \in (\dot{\mathcal{B}}')$.

Munissons $(\mathcal{B})$ de la topologie $(\mathcal{B}_c)$ localement convexe la plus fine induisant sur les parties bornées de $(\mathcal{B})$ la topologie induite par $(\mathcal{E}).(\mathcal{D})$, donc *a fortiori* $(\dot{\mathcal{B}})$, est dense dans $(\mathcal{B}_c)$. L'expression de $T \in (\mathcal{D}'_{L^1})$ comme somme finie de dérivées de fonctions sommables montre que T est prolongeable en une forme linéaire continue sur $(\mathcal{B}_c)$; ce prolongement est unique puisque $(\dot{\mathcal{B}})$ est dense dans $(\mathcal{B}_c)$: le dual de $(\mathcal{B}_c)$ est donc l'espace topologique $(\mathcal{D}'_{L^1})$. En particulier, on peut calculer $T(1) = \iint \cdots \int T$, *intégrale de T sur R^n*; une distribution $T \in (\mathcal{D}'_{L^1})$ peut être appelée *sommable* sur R^n. Mais, dans $(\mathcal{B}_c)$, toute partie bornée est relativement compacte (théorème d'Ascoli); donc, en vertu du théorème de Mackey-Arens (voir chapitre III, théorème XIV), $(\mathcal{B}_c)$ est semi-réflexif, et *le dual de* $(\mathcal{D}'_{L^1})$ *est* $(\mathcal{B})$; mais, sur $\mathcal{B}$, la topologie canonique de dual est celle qui a été initialement définie page 199. On démontre que $(\mathcal{B}_c)$ a la topologie de la convergence uniforme sur les *compacts* de $(\mathcal{D}'_{L^1})$ (d'où la lettre c). On pourrait munir $(\mathcal{B}')$ d'une topologie analogue $(\mathcal{B}'_c)$, ayant pour dual $(\mathcal{D}_{L^1})$ [1].

Multiplication et convolution dans les $(\mathcal{D}'_{L^p})$ **Théorème XXVI**

1° *Si* $T \in (\mathcal{D}'_{L^p})$, $\alpha \in (\mathcal{D}_{L^q})$, *le produit multiplicatif* αT *appartient à* $(\mathcal{D}'_{L^r})$ *avec* $r \geqslant 1$, $(1/r) \leqslant (1/p) + (1/q)$, *et dans ces conditions l'application bilinéaire* $(\alpha, T) \to \alpha T$ *de* $(\mathcal{D}'_{L^p}) \times (\mathcal{D}_{L^q})$ *dans* $(\mathcal{D}'_{L^r})$ *est hypocontinue*.

2° *Si* $S \in (\mathcal{D}'_{L^p})$, $T \in (\mathcal{D}'_{L^q})$, $(1/p) + (1/q) - 1 \geqslant 0$, *on peut donner un sens au produit de convolution* $S * T$; *alors* $S * T \in (\mathcal{D}'_{L^r})$, $(1/r) = (1/p) + (1/q) - 1$; *l'application bilinéaire* $(S, T) \to S * T$ *de* $(\mathcal{D}'_{L^p}) \times (\mathcal{D}'_{L^q})$ *dans* $(\mathcal{D}'_{L^r})$ *est continue* [2].

(1°) se voit immédiatement (comme au théorème III du chapitre v) à partir de la définition $\alpha T . \varphi = T . \alpha\varphi$, et des propriétés connues d'un produit $\alpha\varphi$, pour $\varphi \in L^{r'}[r' = r/(r-1)]$, $\alpha \in L^q$. Ajoutons que, pour $p = q = r = \infty$, si α ou T « converge vers 0 à l'infini » ($\alpha \in (\dot{\mathcal{B}})$ ou $T \in (\dot{\mathcal{B}}')$), il en est de même de αT.

(2°) pourrait se voir en utilisant une décomposition de $T \in (\mathcal{D}'_{L^p})$ en somme finie de dérivées de fonctions $\in L^p(R^n)$, et en appliquant alors les propriétés indiquées au § 1, (1°) (formules (VI, 1 ; 2)), et la formule (VI, 3 ; 10). Il faudrait naturellement montrer que le produit

(1) Voir des démonstrations plus détaillées de tout cela à Schwartz [9], pages 99 102

de convolution trouvé est indépendant des décompositions choisies pour S et T.

Il est préférable de considérer l'expression

$$(\text{VI, 8; 3}) \qquad (S * T) \cdot \varphi = S_\xi \otimes T_\eta \cdot \varphi(\xi + \eta)$$

pour S, T, φ, à supports compacts, et de montrer que, pour les topologies de $(\mathcal{D}'_{L^p})$, $(\mathcal{D}'_{L^q})$, $(\mathcal{D}_{L^r})$, la forme trilinéaire $(S * T) \cdot \varphi$ est hypocontinue. La marche à suivre est analogue à celle qui sera donnée en détail au théorème XI du chapitre VII. Cela permet, d'un seul coup (sauf pour $p = \infty$ ou $q = \infty$), de définir par prolongement $S * T \in (\mathcal{D}'_{L^r})$ pour $S \in (\mathcal{D}'_{L^p})$, $T \in (\mathcal{D}'_{L^q})$, et de montrer l'hypocontinuité de l'application bilinéaire $(S, T) \to S * T$. On voit en même temps que, si $(1/p) + (1/q) = 1$, $S * T$ est limite de distributions de $(\mathcal{E}')$, donc converge vers 0 à l'infini, sauf pour $p = \infty$ ou $q = \infty$. Cette méthode de prolongement montre en outre que si, pour S et T données, plusieurs valeurs de p et q sont possibles, le produit trouvé $S * T$ est toujours le même; car, si S appartient à plusieurs $(\mathcal{D}'_{L^p})$, les mêmes distributions à support compact $(\alpha_j S, \alpha_j \in (\mathcal{D}))$ convergent vers S dans tous les $(\mathcal{D}'_{L^p})$.

On peut aussi naturellement étudier la « régularisation » sur $(\mathcal{D}'_{L^p})$ (théorème XI) :

Si $T \in (\mathcal{D}'_{L^p})$, $\alpha \in (\mathcal{D}_{L^q})$, $(1/p) + (1/q) - 1 \geqslant 0$, *le produit de convolution* $\alpha * T$ *est une fonction de* $(\mathcal{D}_{L^r})$, $1/r = (1/p) + (1/q) - 1$, *définie par :*

$$(\text{VI, 8; 4}) \qquad T * \alpha = T_t \cdot \alpha(x - t),$$

et l'application bilinéaire $(T, \alpha) \to T * \alpha$ *de* $(\mathcal{D}'_{L^p}) \times (\mathcal{D}_{L^q})$ *dans* $(\mathcal{D}_{L^r})$ *est hypocontinue. Si* $\alpha \in (\mathcal{D}_{L^1})$ *converge vers* δ *dans* $(\mathcal{D}'_{L^1})$, *la régularisée* $T * \alpha \in (\mathcal{D}_{L^p})$ *converge vers* T *dans* $(\mathcal{D}'_{L^p})$.

Exemple Considérons les distributions L_l de la formule (II, 3; 20). Comme, en dehors de l'origine, ce sont des fonctions, décroissant exponentiellement à l'infini, leurs produits de convolution ont un sens, et on peut montrer (voir aussi chapitre VII, § 8, exemple 2) que l'on a :

$$(\text{VI, 8; 5}) \qquad L_p * L_q = L_{p+q}.$$

Les formules (II, 3; 21) et (II, 3; 22) en sont des cas particuliers, compte tenu de la formule qui donne L_{-2k}.

Si alors $T \in (\mathcal{D}'_{L^p})$, comme $L_l \in (\mathcal{D}'_{L^1})$, $L_l * T$ existe toujours et appartient à $(\mathcal{D}'_{L^p})$; en prenant $l = 2k$, k entier $\geqslant 0$, on voit que, *quelle*

que soit $T \in (\mathcal{D}'_{L^p})$, *il existe une distribution* $S \in (\mathcal{D}'_{L^p})$ *et une seule telle que* $\left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k S = T$. Mais de plus, si k est assez grand, L_{2k} devient une fonction m fois continument différentiable, dont toutes les dérivées d'ordre $\leqslant m$ sont des fonctions sommables ; alors, compte tenu de la décomposition de T en somme finie de dérivées de fonctions de $L^p(R^n)$, $S = L_{2k} * T$ est une fonction appartenant à L^p, qu'on pourra, à cause de la remarque (3°) qui suit le théorème XXV, supposer continue, bornée, et convergeant vers o à l'infini pour $p < +\infty$ ou $T \in (\mathcal{B}')$.

Ainsi la décomposition de T pourra s'obtenir par le procédé très simple :

(VI, 8 ; 6) $$S = L_{2k} * T, \quad k \text{ assez grand}, \quad S \in L^p(R^n)$$
$$T = \left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k S.$$

Autre définition des distributions bornées. Extensions

On peut encore dire qu'une distribution T est bornée sur R^n, si l'ensemble de ses translatées $\tau_h T$ est borné dans $(\mathcal{D}')$ (si l'application continue $h \to \tau_h T$ de R^n dans $(\mathcal{D}')$ est bornée sur R^n) ; que T converge vers o à l'infini, si $\tau_h T$ converge vers o dans $(\mathcal{D}')$ pour $|h| \to \infty$. L'espace $(\mathcal{B}')$ de ces distributions bornées sur R^n peut être muni de la topologie suivante : des T_j convergeront vers o dans $(\mathcal{B}')$ si les $\tau_h T_j$ convergent vers o dans $(\mathcal{D}')$, uniformément par rapport à $h \in R^n$.

La nouvelle définition est identique à celle du précédent paragraphe. Car il revient au même de dire que les $\tau_h T . \check{\alpha}$ sont, pour toute $\alpha \in (\mathcal{D})$, bornés pour $h \in R^n$, ou que $T * \alpha$ est une fonction bornée sur R^n (Théorème XXV, (2°), $p = \infty$).

L'application des mêmes théorèmes aux ensembles bornés et aux suites convergentes, montre que la nouvelle topologie donnée pour $(\mathcal{B}')$ est identique à l'ancienne, tant qu'on ne considère que des suites convergentes ou des filtres bornés ou à base dénombrable. On peut montrer (par un procédé plus compliqué) qu'il en est encore ainsi pour des filtres convergents quelconques ; les deux définitions de la topologie sont entièrement identiques.

La nouvelle définition a des extensions considérables ; elle permet de définir les distributions ayant un mode de croissance donné à l'infini. Nous appliquerons cette méthode aux §§ 4 et 5 du chapitre VII.

§ 9 Distributions presque-périodiques

Définition

Nous allons généraliser aux distributions la notion de fonction presque-périodique au sens de Stepanoff[1].

On dira qu'une fonction $\varphi \in (\mathcal{B})$ est presque-périodique (pp) dans $(\mathcal{B})$ si les translatées $\tau_h \varphi$ forment dans $(\mathcal{B})$ un ensemble relativement compact. Cela revient à dire que φ et toutes ses dérivées sont des fonctions continues pp. usuelles (au sens de Bohr). Ces fonctions φ forment un sous-espace vectoriel fermé $(\mathcal{B}_{pp})$ de $(\mathcal{B})$. On dira qu'une distribution T est pp. si $T \in (\mathcal{B}')$ et si l'ensemble des $\tau_h T$ est relativement compact dans $(\mathcal{B}')$. Cela revient à dire que l'application $h \to \tau_h T$ est une fonction continue pp. usuelle de $h \in R^n$, à valeurs dans $(\mathcal{D}')$. On en déduit aussitôt que l'ensemble des distributions pp. est un sous-espace vectoriel fermé $(\mathcal{B}'_{pp})$ de $(\mathcal{B}')$.

Opérations et propriétés :

1° *Si* $\alpha \in (\mathcal{B}_{pp})$, *si* $T \in (\mathcal{B}'_{pp})$, *alors* $\alpha T \in (\mathcal{B}'_{pp})$.

2° *Si* $T \in (\mathcal{B}'_{pp})$, *si* $S \in (\mathcal{D}'_{L^1})$, *alors* $(S * T) \in (\mathcal{B}'_{pp})$.

Les dérivées d'une distribution pp sont pp.

Évident (théorème XXV).

3° a) *Pour qu'une distribution* T *soit pp. il faut et il suffit qu'elle soit somme finie de dérivées de fonctions continues pp usuelles.*

b) *Pour qu'une distribution* T *soit pp, il faut et il suffit que ses régularisées* $T * \alpha$, $\alpha \in (\mathcal{D})$, *soient toutes des fonctions continues pp usuelles.*

En effet, les $\tau_h T$ forment un ensemble borné dans $(\mathcal{B}')$, donc, d'après le théorème XXV (2°) (pour $p = \infty$), étendu à des ensembles bornés de distributions, la relative compacité des $\tau_h T$ dans $(\mathcal{B}')$ est identique à la relative compacité des $\tau_h(T * \alpha) = \tau_h T * \alpha$ dans L^∞, ce qui démontre (b). T étant limite dans $(\mathcal{B}')$ de ses régularisées $T * \alpha$), $(\mathcal{B}'_{pp})$ est l'adhérence de $(\mathcal{B}_{pp})$ dans $(\mathcal{B}')$. Mais on peut aussi dire (en appliquant la forme fine du théorème XXV) que pour $\alpha \in (\mathcal{D}^m)$, m assez grand, $(T * \alpha)$ est une fonction continue pp. usuelle, donc, avec (VI, 6 ; 22). on montre (a).

Comme pour les théorèmes XXII et XXV, on peut donner une forme plus fine du théorème, et l'étendre aux ensembles bornés et aux suites convergentes de distributions pp.

(1) Voir par exemple Besicovitch [1], p. 77

Comme nous l'avons vu [formule (VI, 8; 6)], le meilleur moyen de décomposer T sera de former $S = L_{2k} * T$, qui, pour k assez grand, est une fonction continue pp. usuelle, et $T = \left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^{*k} S$.

Moyennes et convolution

4° On sait qu'à toute fonction continue pp. $f(x)$ on peut faire correspondre un nombre complexe, sa moyenne $\mathfrak{M}(f)$, qui est une forme linéaire continue pour la convergence dans L^∞. C'est aussi une forme linéaire continue pour la convergence dans $(\mathcal{B}')$. Car si des fonctions f_j continues pp. convergent vers 0 dans $(\mathcal{B}')$, les $f_j * \alpha$, $\alpha \in (\mathcal{D})$, convergent vers 0 dans $(\mathcal{B})$; alors les $\mathfrak{M}(f_j * \alpha)$ convergent vers 0; mais

$$\text{(VI, 9; 1)} \qquad \mathfrak{M}(f * \alpha) = \mathfrak{M}(f)\left(\iint \cdots \int \alpha(x)dx\right);$$

donc, en prenant $\iint \cdots \int \alpha(x)dx \neq 0$, on voit que les $\mathfrak{M}(f_j)$ convergent vers 0 aussi.

On peut alors définir par prolongement, d'une manière unique, $\mathfrak{M}(T)$ pour $T \in (\mathcal{B}'_{pp})$, et c'est une forme linéaire continue sur $(\mathcal{B}'_{pp})$. Si $T \in (\mathcal{B}'_{pp})$, $S \in (\mathcal{D}'_{L^1})$, on a, par passage à la limite

$$\text{(VI, 9; 2)} \qquad \mathfrak{M}(S * T) = \mathfrak{M}(T)\left(\iint \cdots \int S\right).$$

5° Si $T \in (\mathcal{B}'_{pp})$, $\varphi \in (\mathcal{B}_{pp})$, on posera

$$\text{(VI, 9; 3)} \qquad T \odot \varphi = \mathfrak{M}(\varphi T),$$

ce qui définit un produit scalaire séparément continu entre $(\mathcal{B}_{pp})$ et $(\mathcal{B}'_{pp})$ (Mais aucun de ces espaces n'est le dual de l'autre).

De même, si S et $T \in (\mathcal{B}'_{pp})$ et $\varphi \in (\mathcal{B}_{pp})$, $S_\xi \otimes T_\eta$ et $\varphi(\xi + \eta)$ sont pp., et on peut définir par prolongement un produit de convolution vérifiant

$$\text{(VI, 9; 4)} \qquad \begin{cases} (S \circledast T) \odot \varphi = (S_\xi \otimes T_\eta) \odot \varphi(\xi + \eta) \\ \mathfrak{M}(S \circledast T) = \mathfrak{M}(S)\mathfrak{M}(T). \end{cases}$$

Ce produit de convolution qui, pour 2 fonctions continues pp. f et g s'écrit

$$\text{(VI, 9; 5)} \qquad f \circledast g = \mathfrak{M}_t[f(x - t)g(t)],$$

est une application bilinéaire séparément continue de $(\mathcal{B}'_{pp}) \times (\mathcal{B}'_{pp})$ dans $(\mathcal{B}'_{pp})$, et possède les propriétés démontrées aux §§ 3 et 4. Il se calcule aisément grâce à la décomposition 3° (a). La régularisation sera définie par

$$\text{(VI, 9; 6)} \qquad \begin{cases} T \circledast \alpha = T_t \odot \alpha(x - t), \qquad T \in (\mathcal{B}'_{pp}), \qquad \alpha \in (\mathcal{B}_{pp}). \\ T \odot \varphi = \text{Tr.}\,(T \circledast \check{\varphi}). \end{cases}$$

Développement de Fourier

6° Si $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$, et si $\lambda . x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ (les λ_i sont réels), le coefficient de Fourier a_λ est défini par la formule

(VI, 9 ; 7)
$$a_\lambda = a_\lambda(\mathrm{T}) = \mathfrak{M}\,[\exp(-2i\pi\lambda . x)\mathrm{T}] = \mathrm{T} \odot \exp(-2i\pi\lambda . x).$$

C'est une forme linéaire continue de $\mathrm{T} \in (\mathcal{B}'_{pp})$. De (VI, 9 ; 4) résulte, $\exp(-2i\pi\lambda . x)$ étant dans $(\mathcal{B}_{pp})$,

(VI, 9 ; 8) $\quad a_\lambda(\mathrm{S} \circledast \mathrm{T}) = a_\lambda(\mathrm{S}) a_\lambda(\mathrm{T}), \qquad \mathrm{S}$ et $\mathrm{T} \in (\mathcal{B}'_{pp})$;

(VI, 9 ; 9)
$$a_\lambda(\mathrm{S} * \mathrm{T}) = a_\lambda(\mathrm{T}) \Big(\iint \cdots \int \exp(-2i\pi\lambda . x)\mathrm{S} \Big), \ \mathrm{T} \in (\mathcal{B}'_{pp}), \ \mathrm{S} \in (\mathcal{D}'_{L^1}).$$

La décomposition (3°) (*a*) montre que seuls des a_λ en infinité dénombrable sont $\neq 0$. Ils forment le « spectre » de T.

Les $a_\lambda \exp(2i\pi\lambda . x)$ pour lesquelles $a_\lambda \neq 0$ sont les seules exponentielles trigonométriques qui soient limites, dans $(\mathcal{B}')$, de combinaisons linéaires de translatées $\tau_h \mathrm{T}$. Inversement T est limite dans $(\mathcal{B}')$ d'une suite de polynomes trigonométriques formés uniquement avec les $\exp(2\pi i\lambda . x)$, où λ parcourt le spectre, puisqu'il en est ainsi des régularisées $\mathrm{T} * \alpha$, $\alpha \in (\mathcal{D})$, dont T est limite ; alors T est nulle si tous ses coefficients de Fourier $a_\lambda(\mathrm{T})$ sont nuls.

§ 10 Application aux équations aux dérivées partielles et aux équations intégrales

Équations de convolution

Nous appelons équation de convolution toute équation du type

(VI, 10 ; 1) $$\mathrm{A} * \mathrm{T} = \mathrm{B},$$

où A (coefficient) et B (2ᵉ membre) sont des distibutions données, T une distribution inconnue. Nous supposerons que A est à support compact, pour que le 1ᵉʳ membre de (VI, 10 ; 1) ait un sens quelle que soit $\mathrm{T} \in (\mathcal{D}')$ (On pourrait traiter aussi d'autres cas ; si par exemple $\mathrm{A} \in (\mathcal{D}'_{L^1})$, $\mathrm{B} \in (\mathcal{B}')$, on pourra chercher une solution $\mathrm{T} \in (\mathcal{B}')$ (voir § 8) ; si A est à support « limité à gauche » par rapport à un cône Γ (voir § 5) ainsi que B, on pourra chercher une solution T à support limité à gauche). Ce que nous allons dire s'appliquera aussi à un système de N équations à N distributions inconnues ; il suffira pour cela,

comme au § 6 du chapitre v, de supposer que $T = \{T_1, T_2, \ldots T_N\}$ et $B = \{B_1, B_2, \ldots B_N\}$ sont des distributions à valeurs dans R^N, tandis que $A = \left(A_{jk}\right)$ est une matrice à N lignes et N colonnes, $A_{jk} \in (\mathcal{E}')$. La notation matricielle (VI, 10 ; 1) reviendra alors à

$$\text{(VI, 10 ; 2)} \qquad \sum_{k=1,2,\ldots N} A_{jk} * T_k = B_j\,; \qquad j = 1, 2, \ldots N.$$

Pour simplifier l'écriture, nous supposerons toujours $N = 1$. L'équation est dite homogène si $B = 0$.

Les équations de convolution comprennent un grand nombre de cas particuliers importants :

1°) $$\text{Si } A = D = \sum_{|p| \leqslant m} a_p D^p \delta$$

est un polynome de dérivation [formule (VI, 3 ; 33)], (VI, 10 ; 1) devient l'équation aux dérivées partielles à coefficients constants la plus générale :

$$\text{(VI, 10 ; 3)} \qquad D * T = \sum_{|p| \leqslant m} a_p D^p T = B.$$

Ces équations apparaissent donc, d'une part, comme cas particuliers des équations aux dérivées partielles à coefficients variables, d'autre part, comme cas particuliers des équations de convolution

2°) Si $A = \sum_\nu a_\nu \delta_{(h_\nu)}$ est une combinaison finie de masses discrètes, (VI, 10 ; 1) est l'équation aux différences finies à coefficients constants la plus générale :

$$\text{(VI, 10 ; 4)} \qquad A * T = \sum_\nu a_\nu \tau_{h_\nu} T = B.$$

3° Si A est une fonction $K(x)$ [resp. la somme de δ et d'une fonction $K(x)$], (VI, 10 ; 1) est une équation intégrale à limites fixes de 1re (resp. 2e) espèce, si T est une fonction $f(x)$, et B une fonction $g(x)$:

$$\text{(VI, 10 ; 5)} \qquad \begin{cases} A = K(x) \\ A * f = \iint \cdots \int K(x-t) f(t)\,dt = g(x)\,; \end{cases}$$

$$\text{(VI, 10 ; 6)} \qquad \begin{cases} A = \delta + K(x) \\ A * f = f(x) + \iint \cdots \int K(x-t) f(t)\,dt = g(x). \end{cases}$$

Si, dans ces conditions, A avait son support limité à gauche par

rapport à un cône Γ ainsi que B, et qu'on cherchât une solution $T = f$ à support également limité à gauche, on obtiendrait des équations intégrales de Volterra.

En combinant ces divers types d'équations, on obtiendra des équations intégro-différentielles, de types variés.

Propriétés générales des solutions des équations de convolution

Théorème XXVII 1° *L'ensemble des solutions d'une équation de convolution est un sous-espace vectoriel fermé de* $(\mathcal{D}')$

2° *Le produit de composition d'une solution d'une équation homogène et d'une distribution à support compact est encore une solution de l'équation homogène. En particulier, les dérivées et les régularisées* (Théorème XI) *d'une solution sont des solutions: toute solution d'une équation homogène est limite de solutions qui sont des fonctions indéfiniment dérivables.*

Ce théorème est évident à cause de l'associativité et de la continuité du produit de convolution, et du fait que toute distribution est limite de ses régularisées. Il est vrai pour un système (N quelconque).

On en déduit à nouveau que les solutions d'un système différentiel $(n = 1)$ homogène à coefficients constants sont les solutions usuelles (cas particulier du théorème IX du chapitre V). Car, d'après le théorème ci-dessus, l'espace des solutions est l'adhérence dans $(\mathcal{D}')^N$ de l'espace des solutions usuelles; mais ce dernier est de dimension finie, donc identique à son adhérence.

Théorème XXVIII *Dans le cas de la dimension* $n = 1$, *toute solution d'une famille d'équations de convolution homogènes est limite de combinaisons linéaires d'exponentielles-polynomes solutions de la famille d'équations.*

La démonstration de ce théorème est difficile; nous l'avons publiée dans un mémoire antérieur[1]. Le théorème est vrai pour un système (N quelconque; nous n'avons pas publié la démonstration); nous ignorons s'il subsiste pour une dimension n quelconque [2].

Solution élémentaire

On appelle solution élémentaire [voir § 6 du chapitre V, formule (V, 6; 24)] d'une équation de convolution, une distribution E telle que:

$$A * E = \delta. \quad \text{(VI, 10; 7)}$$

(1) Schwartz, [4]

(2) Le théorème subsiste pour les solutions d'*une seule* équation de convolution Voir Malgrange [1], (théorème III, p. 310)

Pour un système ($N > 1$), ce serait une matrice - distribution à N lignes et N colonnes telle que

(VI, 10 ; 8)

$$\begin{cases} A * E = E * A = \delta I, \quad I = \text{matrice identique. Ou} \\ \sum_{k=1,2,\ldots N} A_{jk} * E_{kl} = \sum_{k=1,2,\ldots N} E_{jk} * A_{kl} = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq l \\ \delta & \text{si } j = l. \end{cases} \end{cases}$$

Il est bien évident qu'ici toute tentative de définir la solution élémentaire comme solution usuelle, sauf en certains points où elle aurait des singularités d'un certain type, est vouée à l'échec. Ce que nous venons de définir est la solution élémentaire relative à l'origine. Elle suffit pour les applications puisque la translation τ_a donnerait une solution élémentaire relative au point a.

Bornons-nous au cas $N = 1$.

On peut appeler $A^{*(-1)}$ la solution élémentaire, elle est une inverse de A pour le produit de convolution. Mais il faut noter qu'il existe une infinité de solutions élémentaires s'il en existe une, la différence entre 2 d'entre elles est une solution arbitraire de l'équation homogène. On dira que A est inversible s'il existe une solution élémentaire. On sait aujourd'hui [1] que tout polynôme de dérivation $A = D$ est inversible. Il existe évidemment des distributions A non inversibles : si $A \in (\mathcal{D})$, $A * E$ est dans $(\mathcal{E})$ quelle que soit $E \in (\mathcal{D}')$, donc $A * E$ n'est jamais égale à δ. On peut montrer que la solution élémentaire n'est jamais à support compact pour $N = 1$, sauf si A est une masse ponctuelle. La solution élémentaire pourra être obtenue par diverses méthodes [2] [méthodes de la théorie des équations aux dérivées partielles ou des équations intégrales ; transformation de Fourier ou Laplace (chapitre VII, § 10)]. Ce que nous voulons signaler d'important, c'est que, grâce à sa définition précise, elle relève des méthodes du calcul algébrique (pour le produit de composition) ou calcul symbolique. C'est ce que nous avons vu au § 5, formules (VI, 5 : 27 à 32).

Utilisation de la solution élémentaire

1°) La solution élémentaire sert à résoudre les équations avec 2°

[1] Malgrange [1], théorème 1, page 288 ; Ehrenpreis [1] ; Hörmander [1]

[2] Utilisant cette définition de la solution élémentaire, M. Garnir a calculé de nombreuses solutions élémentaires, correspondant à des types variés d'équations aux dérivées partielles à coefficients constants. Voir Garnir [4]

membre, *lorsque celui-ci est à support compact*; dans ce cas, en effet. $E * B$ est solution de (VI, 10 ; 1), car

(VI, 10 ; 9) $\quad A*(E*B) = (A*E)*B = \delta * B = B.$

Si cette solution est à support compact (ce qui ne sera pas le cas en général), elle est la seule à posséder cette propriété; car si T est à support compact, et vérifie (VI, 10 ; 1), alors

(VI, 10 ; 10) $\quad T = \delta * T = (E*A)*T = E*(A*T) = E*B.$

Mais il existera d'autres solutions, à supports non compacts, obtenues en ajoutant à T une solution arbitraire de l'équation homogène.

2°) Par contre, si B n'est pas à support compact, cette méthode n'est plus valable, car le produit de convolution du 1er membre de (VI, 10 ; 9) n'a pas de sens, E et B ayant des supports non compacts. Dans certains cas, la formule (VI, 10 ; 9) aura quand même un sens. Exemples: *a*) si $E \in (\mathcal{D}'_{L^1})$ (§ 8), elle sera valable pour $B \in (\mathcal{B}')$ [par exemple, $A = \left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k \delta$, $E = L_{2k}$, formule (II, 3 ; 22)] ; *b*) si A, E, B, ont leurs supports limités à gauche par rapport à un cône Γ (§ 5), E est la seule distribution de l'algèbre $(\mathcal{D}'_{+\Gamma})$ à être l'inverse $A^{*(-1)}$ de A, et les 2 formules

(VI, 10 ; 11) $\qquad A * T = B, \qquad T = A^{*(-1)} * B,$

sont équivalentes : voir formules (VI, 5 ; 24).

3° Est-on sûr que si A est inversible, cela entraîne la possibilité de résoudre l'équation avec un 2e membre quelconque? Si cette possibilité existe, nous dirons que A est complètement inversible (¹). On peut toujours écrire B comme une somme $B = \sum_\nu B_\nu$ de distributions dont les supports sont compacts et s'éloignent indéfiniment. Si on pose $T_\nu = E * B_\nu$, la série $\sum_\nu T_\nu$ est en général divergente. Mais les T_ν deviennent, *dans des ouverts de* R^n *de plus en plus grands*, des solutions de l'équation homogène. *Supposons alors* qu'il soit possible d'approcher les T_ν par des S_ν dans des ouverts de plus en plus grands, de sorte que la série $\sum_\nu (T_\nu - S_\nu)$ soit convergente dans $(\mathcal{D}')$, les S_ν étant, *dans tout l'espace*, des solutions de l'équation homogène.

(¹) Ehrenpreis a indiqué, dans [3], que toute distribution inversible était complètement inversible. La démonstration n'est pas publiée

On aura

$$(\text{VI, } 10\,;\ 12) \qquad A * \sum_\nu (T_\nu - S_\nu) = \sum_\nu (A * T_\nu - A * S_\nu) = \sum_\nu B_\nu = B,$$

ce qui résoudra l'équation avec 2e membre.

Ce procédé réussit si A est le laplacien $\Delta\delta$ (car toute fonction harmonique dans une boule est limite, uniformément sur tout compact de cette boule, de polynomes harmoniques, fonctions harmoniques dans tout l'espace) ou le laplacien itéré $\Delta^k\delta$. De même, si $A = \frac{1}{\pi}\frac{\partial\delta}{\partial\bar{z}}$ [formule (II, 3 ; 23)] dans R^2, et si B est une somme de masses ponctuelles s'éloignant indéfiniment,

$$(\text{VI, } 10\,;\ 13) \qquad B = \sum_\nu a_\nu \delta_{(h_\nu)}, \qquad B_\nu = a_\nu \delta_{(h_\nu)},$$

alors, d'après la formule (II, 3 ; 28), $E * B_\nu = a_\nu/(z - h_\nu)$; le procédé ci-dessus est le procédé classique de Mittag-Leffler qui, par soustraction de polynomes en z, rend convergente la série

$$(\text{VI, } 10\,;\ 14) \qquad \sum_\nu \left(\frac{a_\nu}{z - h_\nu} - P_\nu(z)\right),$$

et permet de former une fonction méromorphe de pôles donnés.

M. Ehrenpreis a montré (¹) que toute distribution dont le support ne contient qu'un nombre fini de points (en particulier toute distribution $D\delta$, D opérateur différentiel à coefficients constants) était complètement inversible.

4° Le produit de convolution de plusieurs distributions complètement inversibles est complètement inversible.

Car pour résoudre $A_1 * A_2 * T = B$, on résout $A_1 * C = B$, puis $A_2 * T = C$.

De même, le produit de convolution d'une distribution A_1 inversible et d'une distribution A_2 complètement inversible est inversible. Car pour résoudre $A_1 * A_2 * E = \delta$, on résoudra $A_1 * E_1 = \delta$, puis $A_2 * E = E_1$. Par contre, on ne peut pas montrer élémentairement que le produit de convolution de 2 distributions inversibles soit inversible. On peut le voir à l'aide du résultat d'Ehrenpreis signalé à la page précédente, car alors ces 2 distributions sont complètement inversibles.

(¹) Ehrenpreis [1] et [2]

Potentiels newtoniens. Formule de Poisson

Considérons une distribution de masses ayant une densité continue α, à support compact. Son potentiel newtonien est défini par la formule

(VI, 10; 15)

$$U^{(\alpha)} = \begin{cases} \displaystyle\iint\cdots\int \frac{\alpha(t)dt}{N|x-t|^{n-2}} & \text{pour} \quad n \neq 2, \quad N = \dfrac{(n-2)2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)}; \\ \displaystyle\iint \frac{1}{2\pi}\log\frac{1}{|x-t|}\alpha(t)dt & \text{pour} \quad n = 2. \end{cases}$$

On a alors

(VI, 10; 16) $$U^{(\alpha)} = E * \alpha,$$

E étant la solution élémentaire correspondant à $A = -\Delta\delta$ [formule (II, 3; 10)]. Nous pouvons donc, par extension, appeler potentiel newtonien d'une distribution T la distribution

(VI, 10; 17) $$U^{(T)} = E * T.$$

Ce potentiel est défini si T est à support compact. On peut le définir dans des cas bien plus généraux, par exemple si

$$\left[T/(1+r^2)^{\frac{n-2}{2}}\right] \in (\mathcal{D}'_{L^1}) (n \neq 2),$$

ou $$[T \log(1+r^2)] \in (\mathcal{D}'_{L^1}) (n = 2).$$

Les 2 formules (VI, 10; 9 et 10) constituent alors la formule classique de Poisson pour les potentiels : si T vérifie la condition précédente,

(VI, 10; 18) $$\begin{cases} \Delta U^{(T)} = \Delta * (E * T) = (\Delta * E) * T = -\delta * T = -T \\ U^{(\Delta T)} = E * (\Delta * T) = (E * \Delta) * T = -\delta * T = -T. \end{cases}$$

Nous voyons que cette formule, qu'on ne démontre habituellement que pour le potentiel d'une fonction assez régulière, est vraie dans le cas le plus général.

Tout ce que nous venons de dire avec le laplacien Δ peut s'écrire avec la dérivation $\partial/\partial\bar{z}$ (chapitre II, § 3, exemple 3). La formule de Poisson s'écrit alors, si $[T/\sqrt{1+r^2}] \in (\mathcal{D}'_{L^1})$ [voir (II, 3; 28)] :

(VI, 10; 19) $$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\frac{1}{\pi z} * T\right) = \frac{1}{\pi z} * \frac{\partial T}{\partial\bar{z}} = T.$$

Remarquons que si T est une mesure μ, le « potentiel » $\frac{1}{\pi z} * T$ n'est autre qu'une intégrale de Cauchy :

(VI, 10; 20) $$\frac{1}{\pi z} * \mu = \iint \frac{d\mu(\zeta)}{\pi(z-\zeta)}; \quad \text{alors} \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \iint \frac{d\mu(\zeta)}{\pi(z-\zeta)} = \mu.$$

Analycité des solutions des systèmes elliptiques homogènes

Théorème XXIX. — *Si une famille d'équations de convolution homogènes* ($B = 0$) *est telle que toute solution soit, dans un ouvert ω relativement compact, une fonction indéfiniment dérivable (resp. une fonction analytique), dès qu'elle est, dans un ouvert assez grand relativement compact $\Omega \supset \omega$, une fonction l fois différentiable (resp. une fonction indéfiniment dérivable), alors toute distribution solution de la famille d'équations est dans ω une fonction indéfiniment dérivable (resp. analytique).*

Soit en effet T une solution du système. Dans un voisinage de $\bar{\Omega}$, T est d'ordre $\leqslant m$ fini. Alors, si $\alpha \in (\mathcal{D}^{m+l})$ a un support assez petit, $T * \alpha$ est, dans Ω, une fonction l fois différentiable (théorème XI) ; c'est une solution du système (théorème XXVII) ; donc, dans le cas de la 1re catégorie d'hypothèses, elle est, dans ω, une fonction indéfiniment dérivable. Alors, d'après le théorème XXI, T est elle-même dans ω une fonction indéfiniment dérivable, c. q. f. d.

Dans le cas de la 2e catégorie d'hypothèses, on prendra $l = m = \infty$; on trouvera, en utilisant le théorème XXIV, que T est dans ω une fonction analytique. On peut, dans ce cas, prendre $\omega = \Omega = R^n$.

Ce théorème n'a pas le même champ d'application que le théorème XII du chapitre v.

D'abord on peut voir qu'il s'applique a des équations autres que des équations aux dérivées partielles, des équations intégrales par exemple. Parmi les équations aux dérivées partielles il ne s'applique qu'à celles qui ont des coefficients constants. Mais, dans ce cadre, il n'utilise pas l'existence d'une solution élémentaire, et contient peut-être des cas plus généraux.

En particulier, tout système homogène elliptique [dans le sens général du mot elliptique tel qu'il est défini par Petrowsky [1]] aux dérivées partielles, à coefficients constants, n'a que des solutions qui sont des fonctions analytiques. La démonstration, donnée par

[1] Petrowsky [1]. Les travaux plus récents de Malgrange [1], Nirenberg [10], ôtent beaucoup d'intérêt à cette remarque

Petrowsky, de l'analyticité des solutions qui sont des fonctions indéfiniment dérivables, ne s'appuie pas sur l'existence d'une solution élémentaire.

Le théorème s'étend aux cas où les 2^es membres sont des fonctions indéfiniment dérivables ou analytiques.

Si, maintenant, une équation homogène (VI, 10; 1) a au moins une solution T qui ne soit pas une fonction indéfiniment dérivable, alors toutes les dérivées de T sont aussi des solutions (théorème XXVII); parmi celles-ci, il en existe qui sont des distributions d'ordre arbitrairement élevé (théorème XIX). Par exemple, toute équation aux dérivées partielles hyperbolique homogène a des solutions qui sont des distributions d'ordre arbitrairement élevé.

Cas particuliers : fonctions harmoniques et holomorphes

1° Les solutions de l'équation de Laplace $\Delta T = 0$ sont les fonctions harmoniques usuelles; les solutions de l'équation de Cauchy $\frac{\partial T}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial T}{\partial x} + i\frac{\partial T}{\partial y}\right) = 0$ (dans R^2) sont les fonctions holomorphes usuelles (théorème XXIX et théorème XII du chapitre v).

On peut donner une nouvelle démonstration particulièrement simple pour ces équations. Soit en effet α une fonction de $(\mathcal{D})$, invariante par rotation autour de l'origine, et telle que

$$\iint\cdots\int \alpha(x)dx = +1.$$

On sait que, d'après la propriété bien connue des moyennes sphériques de fonctions harmoniques ou holomorphes, on a, si T est une fonction solution *usuelle* d'une de ces 2 équations :

$$\text{(VI, 10; 21)} \qquad T * \alpha = T.$$

On a évidemment la même relation, si T est une distribution-solution; car, quelle que soit $\varphi \in (\mathcal{D})$, $T * \check{\varphi}$ est une solution usuelle (théorème XXVII), donc

$$\text{(VI, 10; 22)} \qquad T * (\check{\varphi}) * \alpha = T * \check{\varphi},$$

ou, en égalant les traces de ces 2 fonctions :

$$\text{(VI, 10; 23)} \qquad (T * \alpha) \cdot \varphi = T \cdot \varphi,$$

ce qui prouve (VI, 10; 21). Mais alors le 1^er membre de (VI, 10; 21) étant une fonction indéfiniment dérivable (théorème XI), il en est de même de T.

2° Le propriété des moyennes sphériques que nous avons utilisée est la suivante : si $\mu_{(R)}$ est la mesure homogène portée par la sphère de rayon R et de masse totale $+1$, la moyenne $\mu_{(R)} * f$ est égale à f ou $\delta * f$ si f est une fonction harmonique. Quelles sont les distributions H, à support compact, qui ont la même propriété que $\delta - \mu_{(R)}$, c'est-à-dire, qui sont telles que

$$\text{(VI, 10; 24)} \qquad H * f = 0$$

si f est une fonction harmonique ?

En remplaçant f par $\check{f}$ qui est aussi harmonique et faisant $x = 0$, on déduit de (VI, 10 ; 24)

$$\text{(VI, 10; 25)} \qquad H . f = 0$$

si f est harmonique.

Réciproquement, toute translatée d'une fonction harmonique étant harmonique, (VI, 10 ; 25) entraîne (VI, 10 ; 24).

Pour que H *ait cette propriété, il faut et il suffit que* H *soit le laplacien d'une distribution à support compact* (¹).

a) C'est suffisant, car alors, si f est une fonction harmonique, et si nous posons $H = -\Delta L$,

$$\text{(VI, 10; 26)} \quad H * f = (-\Delta * L) * f = -L * (\Delta * f) = 0.$$

b) C'est nécessaire. Posons en effet

$$\text{(VI, 10; 27)} \qquad L = E * H,$$

E étant la solution élémentaire correspondant à $A = -\Delta\delta$ [formules (VI, 10 ; 15 et 16)]. Soit B_0 une boule fermée contenant le support de H. Si x n'est pas dans B_0, L est une fonction $L(x)$ définie par (théorème XI)

$$\text{(VI, 10; 28)} \qquad L(x) = H_t . E(x - t).$$

Mais, considérée comme fonction de t pour x fixé, $E(x - t)$ est harmonique au voisinage de B_0 ; et toute fonction harmonique au voisinage de B_0 est limite dans $(\mathcal{E})_t$, sur un voisinage de B_0, de polynomes harmoniques f_j (fonctions harmoniques dans tout l'espace) ; comme les $H . f_j$ sont nuls d'après l'hypothèse, le 2° membre de (VI, 10 ; 28) est nul aussi. Donc L, nulle en dehors de B_0, est à support compact, et, d'après la formule de Poisson (VI, 10 ; 18), $H = -\Delta * L$, c. q. f. d.

(¹) Voir Choquet-Deny [1], p. 10

Par exemple, on peut prendre $H = \Delta\delta$ (alors $L = -\delta$) ; ou $H = \delta - \mu_{(R)}$, alors

$$\text{(VI, 10; 29)}\quad \begin{cases} L(x) = (\delta - \mu_{(R)}) * E(x) ; \\ L(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{N}\left(\dfrac{1}{r^{n-2}} - \dfrac{1}{R^{n-2}}\right) & \text{pour} \quad r \leqslant R \\ 0 & \text{pour} \quad r \geqslant R \end{cases} \qquad n \neq 2 \\ L(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi} \log \dfrac{R}{r} & \text{pour} \quad r \leqslant R \\ 0 & \text{pour} \quad r \geqslant R \end{cases} \qquad n = 2. \end{cases}$$

On peut généraliser ce problème et chercher les distributions $H \in (\mathcal{E}')$ telles que $H * T = 0$, pour toute distribution T solution de l'équation de composition homogène $A * T = 0$, $A \in (\mathcal{E}')$.

La condition $H = A * L$, $L \in (\mathcal{E}')$, est suffisante, mais ne semble nécessaire que si A possède des propriétés spéciales, entraînant, comme nous l'avons vu page 213 son inversibilité complète $\left(A = \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}},\ A = \Delta^k, \text{ etc.}\right)$. (¹)

3° Si α est une fonction ayant les propriétés indiquées au (1°), $\delta - \alpha$ est le laplacien $\Delta\varpi$ de $\varpi = E * (\alpha - \delta)$, qui est une fonction à support compact, indéfiniment dérivable sur le complémentaire de l'origine dans R^n. Alors $\varpi(x - \xi)$ est une « paramétrix » de l'équation de Laplace, au sens indiqué dans le chapitre v, § 6, formule (V, 6 ; 35). La démonstration donnée à (1°) est donc exactement la démonstration indiquée au chapitre v avec la paramétrix.

Inéquations de convolution. Formule de décomposition de F. Riesz

Une inéquation de convolution homogène est une inéquation de la forme

$$\text{(VI, 10; 30)} \qquad A * T \geqslant 0,$$

où $A \in (\mathcal{E}')$ est une distribution donnée, $T \in (\mathcal{D}')$ une distribution inconnue.

D'après le théorème V du chapitre I, cette inéquation est équivalante à

$$\text{(VI, 10; 31)} \qquad A * T = \mu,$$

équation de composition où le 2ᵉ membre est une mesure $\mu \geqslant 0$ arbitraire. Si alors A est complètement inversible (voir page 69), on saura résoudre complètement l'inéquation. Supposons seulement

(¹) Malgrange a montré dans [1] qu'on peut prendre pour A n'importe quel opérateur différentiel à coefficients constants ; c'est une conséquence de son corollaire de la proposition 2, page 92

A inversible, et soit E une solution élémentaire. On a dans ce cas le théorème suivant :

THÉORÈME XXX *Pour qu'une distribution* T *soit solution de l'inéquation* (VI, 10 ; 30), *il faut et il suffit que, quel que soit l'ouvert* Ω *relativement compact de* R^n, *on ait la formule de décomposition de Riesz* (¹) :

$$\text{(VI, 10 : 32)} \qquad \begin{cases} T = E * \nu + S \\ \nu = \text{mesure} \geqslant 0 \text{ sur } R^n, \text{ portée par l'ouvert } \Omega \\ A * S = 0 \text{ dans } \Omega. \end{cases}$$

Alors, pour Ω *donné,* ν *et* S *sont déterminées d'une manière unique.*

1° Si la décomposition de Riesz existe, l'unicité de ν et S pour Ω donné, est évidente. Car si nous composons avec A les 2 membres de la 1ʳᵉ formule (VI, 10 : 32) (ν étant à support compact), on a, compte tenu de la 3ᵉ formule :

$$\text{(VI, 10 ; 33)} \qquad A * T = A * E * \nu + A * S = \begin{cases} \nu + (A * S) & \text{dans } R^n \\ \nu & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

ce qui détermine ν dans Ω, donc dans R^n puisqu'elle est portée par Ω, puis S par différence $T - (E * \nu)$.

2° Si l'on suppose que T vérifie (VI, 10 ; 30), elle vérifie (VI, 10 ; 31) ; soit ν la portion de la mesure μ portée par Ω (ν est la mesure définie dans R^n comme produit de μ par la fonction caractéristique de l'ensemble ouvert Ω). Alors ν est bien une mesure $\geqslant 0$ portée par Ω. Si on appelle S la différence $T - (E*\nu)$, on a bien

$$\text{(VI, 10 ; 34)} \qquad A * S = (A * T) - (A * E * \nu) = \begin{cases} \mu - \nu & \text{dans } R^n \\ 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases}$$

ce qui montre que ν et S satisfont bien à (VI, 10 ; 32) ; T admet une décomposition de Riesz.

3° Si la distribution T admet pour tout ouvert Ω relativement compact une décomposition de Riesz, alors $A * T$ est $\geqslant 0$ dans Ω d'après (VI, 10 ; 33), donc $A * T$ est $\geqslant 0$ dans R^n, et T vérifie (VI, 10 ; 30).

(¹) F. RIESZ n'a démontré cette formule que pour les fonctions surharmoniques, $A = -\Delta\delta$. Sa démonstration et les démonstrations ultérieures sont d'un caractère beaucoup moins intuitif que celle-ci, qui est en outre tout à fait générale. F. RIESZ, [2]

Applications aux fonctions surharmoniques

Nous appellerons distribution surharmonique toute solution de l'inéquation

$$(\text{VI}, 10; 35) \qquad -\Delta * T \geqslant 0.$$

Il s'agit là d'une inéquation de convolution du type (VI, 10; 30) avec $A = -\Delta\delta$. La décomposition de Riesz exprime T comme somme du potentiel newtonien [formule (VI, 10; 17)] $U^{(\nu)}$ d'une mesure $\nu \geqslant 0$ portée par Ω et d'une distribution S qui, dans Ω, est une fonction harmonique usuelle (théorème XXIX).

D'autre part, on sait qu'on appelle habituellement *fonction presque surharmonique* une fonction $f(x)$ localement sommable (définie à un ensemble de mesure nulle près), telle qu'on ait presque partout, quel que soit $R > 0$,

$$(\text{VI}, 10; 36) \qquad f \geqslant \mu_{(R)} * f \qquad \text{ou} \qquad (\delta - \mu_{(R)}) * f \geqslant 0\,;$$

(comme plus haut, $\mu_{(R)}$ est la masse $+1$, répartie de façon homogène sur la sphère $|x| = R$). $\mu_{(R)} * f$ est la fonction qui, en chaque point x, est la moyenne de f sur la sphère de centre x, de rayon R.

Nous allons montrer l'identité des distributions surharmoniques et des fonctions presque surharmoniques usuelles.

1° Soit f une fonction presque surharmonique usuelle. Elle vérifie, en tant que distribution,

$$(\text{VI}, 10; 37) \qquad \frac{\delta - \mu_{(R)}}{R^2} * f \geqslant 0 \quad \text{quel que soit} \quad R > 0.$$

Faisons tendre R vers 0. La mesure $\dfrac{\delta - \mu_{(R)}}{R^2}$ converge dans $(\mathcal{E}')$ vers $-\dfrac{1}{2n}\Delta\delta$.

En effet, si $\varphi \in (\mathcal{E})$, on a ($dS$ étant l'élément d'aire, $S_n(R)$ l'aire de la sphère de rayon R)

$$(\text{VI}, 10; 38) \quad \begin{cases} \displaystyle\lim_{R \to 0} \frac{\delta - \mu_{(R)}}{R^2} \cdot \varphi = \lim_{R \to 0} \frac{\varphi(0) - \dfrac{1}{S_n(R)} \displaystyle\int \cdots \int_{|x| = R} \varphi\, dS}{R^2} \\ \displaystyle\qquad = -\frac{1}{2n}\Delta\varphi(0), \end{cases}$$

comme le montre un développement de Taylor de φ jusqu'au 2^e ordre inclus.

On déduit alors de (VI, 10 ; 37). et de la continuité du produit de composition (théorème V), que f vérifie l'inégalité (VI, 10 ; 35), le Δ étant pris au sens de la théorie des distributions. Ainsi toute fonction presque surharmonique usuelle est bien une distribution surharmonique.

On voit que le procédé artificiel (VI, 10 ; 37) par lequel on définit les fonctions presque surharmoniques usuelles tient à l'impossibilité d'utiliser le laplacien usuel $[\Delta f]$, qui ici n'existe pas[1].

2°) Toute distribution surharmonique T admet des décompositions de Riesz ; mais $E(x) * \nu$ est ici une fonction dans R^n, puisque $E(x)$ est une fonction dans R^n. S est une fonction dans Ω ; donc T est une fonction dans Ω. Comme Ω est quelconque, T est une fonction f dans R^n (et par suite aussi S).

Si $L(x)$ est la fonction de la formule (VI, 10 ; 29), alors $\delta - \mu_{(R)} = -(\Delta * L)$; on a donc bien

(VI, 10 ; 39) $\quad [\delta - \mu_{(R)}] * T = -\Delta * L * T = L * (-\Delta * T) \geqslant 0$

en vertu de (VI, 10 ; 35), puisque $L \geqslant 0$.

Remarques et généralisations

1°) Une *fonction surharmonique* usuelle est une fonction, définie partout, vérifiant (VI, 10 ; 36) partout, et en outre semi-continue inférieurement ; nous n'avons pas considéré ce point de vue, puisque, pour nous, une fonction n'est définie que presque partout. Il existe une fonction surharmonique et une seule presque partout égale à une fonction presque surharmonique donnée.

On vérifie immédiatement que le 2° membre de (VI, 10 ; 32) est une fonction semi-continue inférieurement, si on considère le potentiel comme défini partout : si f est une fonction surharmonique usuelle, elle est bien alors égale partout au 2° membre de (VI, 10 ; 32).

b) Quelles sont les distributions H à support compact, qui, comme $-\Delta\delta$ ou $\delta - \mu_{(R)}$, sont telles que, pour toute fonction presque surharmonique f, on ait

(VI, 10 ; 40) $\qquad\qquad H * f \geqslant 0$?

[1] On peut donner une définition directe avec le laplacien généralisé de Zaremba ou Brelot (Brelot [1], chapitre 1, § 1). Mais cette définition directe est plus compliquée et plus fine que celle qui utilise les distributions. D'une façon générale, on pourra consulter cet ouvrage et d'autres du même auteur pour tout ce qui concerne les fonctions surharmoniques et presque surharmoniques usuelles : Brelot [2], [3]. Voir aussi Rado [1].

On doit avoir $H * f = 0$, si f est harmonique (car alors f et $-f$ sont surharmoniques), donc, d'après ce qui a été vu page 73, $H = -\Delta * L$, L étant une distribution à support compact. Alors, comme dans (VI, 10; 26), on doit avoir

$$\text{(VI, 10; 41)} \quad H * f = L * (-\Delta * f) \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad -(\Delta * f) \geqslant 0.$$

Cela sera toujours réalisé si $L \geqslant 0$; réciproquement, cela ne peut être réalisé pour $f = E$ (ou $-\Delta * f = \delta$) que si $L \geqslant 0$. Ainsi, *il faut et il suffit que* $H = -\Delta L$, $L =$ *mesure* $\geqslant 0$ *à support compact.*

c) En utilisant le produit de convolution de Volterra généralisé, on peut aussi obtenir des décompositions de Riesz pour les solutions d'inéquations aux dérivées partielles $DT \geqslant 0$, où D est un opérateur différentiel à coefficients variables ayant des solutions élémentaires; par exemple, pour des fonctions surharmoniques sur un espace de Riemann indéfiniment différentiable.

CHAPITRE VII

Transformation de Fourier

SOMMAIRE. C'est dans le domaine de la série et surtout de l'intégrale de Fourier que la nécessité de sortir du cadre des fonctions est la plus impérieuse.

Le § 1 traite des séries de Fourier. Toute distribution périodique a une série de Fourier, qui converge vers cette distribution; toute série trigonométrique dont les cœfficients sont à croissance lente converge vers une distribution périodique dont elle est la série de Fourier (théorème I, page 225). Ce théorème est suffisant pour la plupart des applications techniques. Le § 2 rappelle les propriétés classiques de l'intégrale de Fourier usuelle. La formule de réciprocité (VII, 2; 3) et la formule de Perseval (VII, 2; 4) sont les seules nécessaires à la compréhension de la suite.

Il ne sera pas possible de définir la transformation de Fourier pour toutes les distributions, mais seulement pour celles d'un sous-espace $(\mathcal{S}')$ de $(\mathcal{D}')$, les distributions tempérées. $(\mathcal{S}')$ est le dual d'un espace $(\mathcal{S})$ de fonctions indéfiniment dérivables, plus large que l'espace $(\mathcal{D})$ du chapitre 1.

Le § 3 définit cet espace $(\mathcal{S})$, espace des fonctions indéfiniment dérivables à décroissance rapide, et en donne les propriétés essentielles.

Le § 4 définit l'espace $(\mathcal{S}')$ des distributions tempérées. Les théorèmes VI, page 239 et VII, page 242, permettent de caractériser les distributions tempérées comme distributions à croissance lente à l'infini. Cette caractérisation sera très utile en pratique, mais on pourra passer sur sa démonstration un peu délicate.

Le § 5 étudie la multiplication et la convolution dans $(\mathcal{S}')$. On peut multiplier toutes les distributions tempérées par des fonctions indéfiniment dérivables à croissance lente (espace $(\mathcal{O}_M)$ des multiplicateurs), et les composer avec toutes les distributions à décroissance rapide (espace $(\mathcal{O}'_C)$ des opérateurs de composition). Ces opérations sont continues, associatives et commutatives (théorème X, page 246, et XI, page 247). Pour entrer plus rapidement dans l'étude de la transformation de Fourier, on pourra lire les § 6 et 7 avant celui-ci, dont l'intérêt est surtout théorique.

Le § 6 définit la transformation de Fourier des distributions tempérées par la formule $\mathcal{F}U \,.\, v = U \,.\, \mathcal{F}v$ (VIII, 6; 7). Cette transformation de $(\mathcal{S}')$ sur $(\mathcal{S}')$ est biunivoque et bicontinue (théorème XIII, page 251).

Le § 7 est consacré à des exemples. Il est recommandé d'en traiter plusieurs comme exercices, mais on pourra se borner à consulter ce para-

graphe au moment de l'usage. Nous ne pouvons avoir la prétention de donner dans un seul paragraphe tous les exemples qui seraient utiles dans la pratique.

Le § 8 donne les propriétés théoriques de la transformation de Fourier. Les principales sont l'échange entre multiplication et composition, bien connu pour les fonctions (théorème XV, page 268), et le théorème de Paley-Wiener généralisé (théorème XVI, page 272), qui exprime que l'image de Fourier d'une distribution à support compact est une fonction analytique entière de type exponentiel et réciproquement.

Le § 9 étudie les distributions de type positif, généralisant les fonctions usuelles de type positif. Une telle distribution est caractérisée par le fait que, quelle que soit $\varphi \in (\mathcal{D})$, $T(\varphi * \tilde{\varphi}) \geqslant 0$ (VII, 9 ; 7). La propriété essentielle est le théorème de Bochner généralisé (théorème XVIII, page 276) : toute distribution de type positif est transformée de Fourier d'une mesure tempérée $\geqslant 0$ et réciproquement.

Le § 10 contient des applications pratiques de la transformation de Fourier aux équations de composition (§ 10 du chapitre VI) : équations homogènes, solutions élémentaires, équations à second membre quelconque. Nous n'avons pas cherché à multiplier les exemples, mais à montrer la diversité des cas qui se présentent.

Des tables de transformées de Fourier de distributions, ont été adressées par Lavoine [1]. D'autre part, des applications à la physique ont été systématiquement développées dans Arsac [1], Wightman [1], Schwartz [18].

La transformation de Fourier des distributions peut s'étudier sur un groupe abélien localement compact quelconque (¹). Nous nous bornerons au cas du tore T^n (il s'agit alors de série de Fourier), et de l'espace numérique R^n (il s'agit alors d'intégrale de Fourier).

§ 1 Séries de Fourier

Distributions sur le tore Nous représenterons le tore T^n comme le groupe quotient de R^n par le sous-groupe Z^n, puissance $n^{\text{ième}}$ du groupe Z des entiers. Un point $\dot{x}$ de T^n est représenté par ses n coordonnées $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots \dot{x}_n$, qui sont des nombres réels modulo 1. T^n est une variété compacte indéfiniment différentiable, sur laquelle existent une mesure de Haar privilégiée $d\dot{x} = d\dot{x}_1\, d\dot{x}_2 \dots d\dot{x}_n$ et des dérivations partielles $\frac{\partial}{\partial \dot{x}_1}, \frac{\partial}{\partial \dot{x}_2}, \dots \frac{\partial}{\partial \dot{x}_n}$ [voir chapitre 1, § 5, (3°)]. Les propriétés démontrées pour R^n dans les chapitres précédents sont valables sur T^n tant qu'elles n'ont qu'un caractère local. Les

(¹) Riss [1]. Bruhat [1]. D'autre part, on peut étudier la transformation de Fourier des courants tempérés sur un espace vectoriel de dimension finie : Voir Scarfiello [1] et § 6 du chapitre IX

considérations globales introduisent par contre, pour toutes les questions d'intégration (chapitre II), des problèmes de topologie algébrique (par exemple, pour $n = 1$, une distribution T ne possède de primitive que si son intégrale est nulle). Les théorèmes XXI, XXII, XXIII, du chapitre III, sont vrais sur des ouverts assez petits, et restent vrais sur T^n si on remplace une dérivée unique par une somme finie de dérivées (théorèmes XXII et XXIII du chapitre VI). Le produit de convolution a les mêmes propriétés que sur R^n, simplifiées par la compacité de T^n.

Pour distinguer nettement le tore T^n de l'espace R^n, nous appellerons $\dot{f}(\dot{x})$, $\dot{T}$, une fonction ou une distribution sur le tore, $\dot{T} \odot \dot{\varphi}$ le produit scalaire, $\dot{S} \circledast \dot{T}$ le produit de convolution

Série de Fourier THÉORÈME I 1° *A toute distribution* $\dot{T}$ *sur le tore on peut attribuer des coefficients de Fourier, définis par*

(VII, 1 ; 1)

$$\begin{cases} a_l(\dot{T}) = \dot{T} \odot \exp(-2i\pi l.\dot{x}) \\ l = \{l_1, l_2, \ldots l_n\}, \qquad l_\nu \text{ entiers}; \qquad l.\dot{x} = l_1\dot{x}_1 + l_2\dot{x}_2 + \cdots l_n\dot{x}_n. \end{cases}$$

Ces coefficients a_l *sont à croissance lente pour* $|l| \to \infty$:

$$\text{(VII, 1 ; 2)} \quad \begin{cases} \lim\limits_{|l| \to \infty} |a_l|/(1 + |l|^2)^k = 0 \qquad \text{pour } k \text{ assez grand,} \\ |l| = \sqrt{l_1^2 + l_2^2 + \cdots + l_n^2}. \end{cases}$$

La série de Fourier formée avec ces coefficients converge dans $(\mathcal{D}')_{T^n}$ *vers* $\dot{T}$:

$$\text{(VII, 1 ; 3)} \qquad \sum a_l(\dot{T}) \exp(2i\pi l.\dot{x}) = \dot{T}.$$

2° *Réciproquement, si les* b_l *sont une suite quelconque de nombres complexes, à croissance lente pour* $|l| \to \infty$, *la série trigonométrique* $\sum\limits_l b_l \exp(2i\pi l.\dot{x})$ *converge dans* $(\mathcal{D}')_{T^n}$ *vers une distribution* $\dot{T}$, *qui admet les* b_l *comme coefficients de Fourier.*

Une série trigonométrique ne peut converger que si ses coefficients sont à croissance lente.

Ce théorème supprime la pénible distinction habituelle entre séries de Fourier et séries trigonométriques qui ne sont pas des séries de Fourier. De plus, il rend inutiles les « procédés de sommation » pour rendre convergente la série de Fourier.

1° Remarquons d'abord que la formule (VII, 1 ; 1) donne immédiatement

$$(\text{VII, 1 ; 4})\quad \begin{cases} a_l(\dot{\mathrm{S}} \circledast \dot{\mathrm{T}}) = (\dot{\mathrm{S}}_\xi \otimes \dot{\mathrm{T}}_\eta) \cdot \dot{\exp}\,[-2i\pi l \cdot (\dot{\xi} + \dot{\eta})] \\ \qquad\qquad\quad = a_l(\dot{\mathrm{S}})a_l(\dot{\mathrm{T}}). \end{cases}$$

Par ailleurs

$$(\text{VII, 1 ; 5})\qquad a_l(\dot{\delta}) = 1\,; \qquad a_l\left(\frac{\partial \dot{\delta}}{\partial \dot{x}_k}\right) = 2i\pi l_k,$$

d'où

$$(\text{VII, 1 ; 6})\qquad a_l\left(\frac{\partial \dot{\mathrm{T}}}{\partial \dot{x}_k}\right) = a_l\left(\frac{\partial \dot{\delta}}{\partial \dot{x}_k}\right)a_l(\dot{\mathrm{T}}) = 2i\pi l_k a_l(\dot{\mathrm{T}}).$$

Comme la distribution $\dot{\mathrm{T}}$ est somme finie de dérivées de fonctions continues, et que les coefficients de Fourier d'une fonction continue sont bornés, les coefficients $a_l(\dot{\mathrm{T}})$ sont à croissance lente pour $|l| \to \infty$, quelle que soit $\dot{\mathrm{T}}$.

La série de Fourier de la mesure de Dirac $\dot{\delta}$ converge bien vers $\dot{\delta}$ dans $(\mathcal{D}')_{\mathrm{T}^n}$; en effet

$$(\text{VII, 1 ; 7})\quad \sum_l \dot{\exp}\,(2i\pi l \cdot \dot{x}) \odot \dot{\varphi} = \sum_l a_{-l}(\dot{\varphi}) = \dot{\varphi}(\dot{0}) = \dot{\delta} \odot \dot{\varphi}$$

(car $\dot{\varphi}$ est indéfiniment dérivable, donc sa série de Fourier est convergente, en particulier pour $\dot{x} = \dot{0}$). La continuité du produit de convolution montre alors que la série de Fourier de $\dot{\mathrm{T}}$ converge vers $\dot{\mathrm{T}}$, quelle que soit $\dot{\mathrm{T}}$, car

$$(\text{VII, 1 ; 8})\quad \sum_l a_l(\dot{\mathrm{T}})\,\dot{\exp}\,(2i\pi l \cdot \dot{x}) = \sum_l \dot{\mathrm{T}}_\xi \odot \dot{\exp}\,[2i\pi l \cdot (\dot{x} - \dot{\xi})]$$
$$= \sum_l \dot{\mathrm{T}} \circledast \dot{\exp}\,(2i\pi l \cdot \dot{x}) = \dot{\mathrm{T}} \circledast \dot{\delta} = \dot{\mathrm{T}}.$$

2° Si maintenant b_l est une suite de nombres complexes à croissance lente, la série numérique $\sum_l |b_l|/(1 + |l|^2)^k$ est convergente pour k assez grand, donc la série $\sum_l \frac{b_l}{(1 + |l|^2)^k} \dot{\exp}\,(2i\pi l \cdot \dot{x})$ converge uniformément vers uue fonction continue $\dot{f}(\dot{x})$; la série dérivée

$$\sum_l b_l \dot{\exp}\,(2i\pi l \cdot \dot{x})$$

converge donc elle aussi vers une distribution $\dot{\mathrm{T}} = \left(1 - \frac{\dot{\Delta}}{4\pi^2}\right)^k \dot{f}$.

Cette dernière distribution $\dot{T}$ admet bien les b_l comme coefficients de Fourier ; plus généralement si une série $\Sigma b_l \exp(2i\pi l.\dot{x})$ converge vers une distribution $\dot{T}$, celle-ci admet les b_l comme coefficients de Fourier (ce qui obligera les b_l à être à croissance lente pour $|l| \to \infty$), car le calcul de $a_l(\dot{T})$ se fait, suivant la méthode classique, terme à terme, de sorte que, par suite de l'orthogonalité des exponentielles, $a_l(\dot{T})$ se réduit à b_l.

Remarques 1° Cette démonstration nous a montré en même temps que toute distribution $\dot{T}$ sur le tore est le $\left(1 - \frac{\dot{\Delta}}{4\pi^2}\right)^k$ d'une fonction continue pour k assez grand.

2° Si une série $\sum_l b_l \exp(2i\pi l.\dot{x})$ converge sur un ouvert Ω de T^n, le théorème XXIII du chapitre VI et la formule (VI, 6 ; 22), appliqués dans Ω aux fonctions $b_l \exp(2i\pi l.\dot{x})$ qui convergent vers 0 dans $(\mathcal{D}')_\Omega$, montrent que les b_l sont à croissance lente pour $|l| \to \infty$; la série converge alors non seulement sur Ω mais sur T^n, et c'est une série de Fourier.

3° Nous voyons que si $c(l)$ est une suite à croissance lente (un polynome en l par exemple), les fonctions $c(l) \exp(2i\pi l.\dot{x})$ convergent vers 0, dans $(\mathcal{D}')_{T^n}$, pour $|l| \to \infty$. On peut encore dire que « les fonctions $\exp(2i\pi l.\dot{x})$ convergent vers 0 dans $(\mathcal{D}')_{T^n}$, pour $|l| \to \infty$, plus vite que toute puissance de $1/|l|$ ». Mais ce langage risque de conduire à des erreurs. En effet, quelle que soit la suite $c(l)$, croissant plus vite, pour $|l| \to \infty$, que toute puissance de $|l|$, les fonctions $c(l) \exp(2i\pi l.\dot{x})$ ne sont pas bornées dans $(\mathcal{D}')_{T^n}$. Mêmes propriétés pour les fonctions $c(h) \exp(2i\pi h.x)$ dans $(\mathcal{D}')_{R^n}$ ou même $(\mathcal{B}')_{R^n}$, $h \in R^n$.

4° Si $\dot{\varphi} \in (\mathcal{D})_{T^n}$, les $a_l(\dot{\varphi})$ forment une suite à décroissance rapide pour $|l| \to \infty$ ($\lim_{|l| \to \infty} |l|^k |a_l| = 0$, quel que soit k).

Ainsi, par la série de Fourier, $(\mathcal{D})_{T^n}$ et $(\mathcal{D}')_{T^n}$ sont mis en correspondance (isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques) respectivement avec l'espace des suites numériques à décroissance rapide et l'espace des suites numériques à croissance lente. La dualité entre $(\mathcal{D})_{T^n}$ et $(\mathcal{D}')_{T^n}$ correspond à la dualité de ces deux espaces de suites par la formule de Parseval

(VII, 1 ; 9) $$\dot{T} \odot \dot{\varphi} = \sum_l a_l(\dot{T}) a_{-l}(\dot{\varphi}).$$

Exemples et applications

1° *Séries de Fourier des fonctions elliptiques* Soit $\mathfrak{p}(z)$ la fonction elliptique habituelle, correspondant aux périodes 1 et i. On peut la considérer comme une fonction méromorphe sur le tore à 2 dimensions. Elle ne définit pas une distribution, puisque non sommable au voisinage de l'origine, mais d'après ce qui a été vu au chapitre II, § 3, exemple 3, v. p. $\dot{\mathfrak{p}}(\dot{z})$ est une distribution, dont nous allons chercher le développement de Fourier. On a, d'après la formule (II, 3; 27):

$$\text{(VII, 1; 10)} \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}}[\text{v. p. } \dot{\mathfrak{p}}(\dot{z})] = -\pi \frac{\partial \dot{\delta}}{\partial \dot{z}}.$$

Le développement de Fourier suivant les $\exp[2i\pi(p\dot{x} + q\dot{y})]$ (p, q = entiers) montre que cette équation aux dérivées partielles, à une constante additive près, n'a qu'une solution, car on a

$$\frac{1}{2} 2i\pi(p + iq)a_{p,q}[\text{v.p. } \dot{\mathfrak{p}}(\dot{z})] = -\pi \frac{1}{2} 2i\pi(p - iq);$$

d'où

$$\text{(VI, 1; 11)} \quad \text{v. p. } \dot{\mathfrak{p}}(\dot{z}) = a_{0,0} - \pi \sum_{(p,q) \neq (0,0)} \frac{p - iq}{p + iq} \exp[2i\pi(p\dot{x} + q\dot{y})].$$

Les coefficients, tous de module 1, sont bornés, donc à croissance lente, la série est bien convergente. Le même procédé montre qu'il existe, à une constante additive près, une fonction elliptique et une seule de périodes (1, i), ayant des pôles donnés avec un développement polaire donné au voisinage de chacun d'eux, pourvu que la division par $p + iq$ soit possible; cela exige seulement que le coefficient $a_{0,0}$ du 2ᵉ membre de l'équation analogue à (VII, 1; 10) soit nul, c'est-à-dire que la somme des résidus soit nulle. Cette fonction elliptique est déterminée par la série de Fourier de la pseudo-fonction v. p. associée.

2° *Équations aux différences finies* Soit à déterminer une suite à 2 indices entiers $a_{p,q}$, à croissance lente pour $p^2 + q^2 \to \infty$, vérifiant l'équation aux différences finies :

$$\text{(VII, 1; 12)} \quad a_{p+1,q} + a_{p-1,q} + a_{p,q+1} + a_{p,q-1} - 4\lambda a_{p,q} = b_{p,q},$$

où les $b_{p,q}$ sont donnés et supposés à croissance lente, pour $p^2 + q^2 \to \infty$. Si l'on considère les $a_{p,q}$ et les $b_{p,q}$ comme des coeffi-

cients de Fourier de distributions $\dot{A}$ et $\dot{B}$ sur le tore, on devra avoir

$$(\text{VII}, 1;13)\qquad 2(\cos 2\pi\dot{x} + 2\pi\dot{y} - 2\lambda)\dot{A} = \dot{B}.$$

a) Si λ n'est pas réel, ou s'il est réel, mais $|\lambda| > 1$, la division est immédiate et *les seuls $a_{p,q}$ possibles, qui soient à croissance lente pour $p^2+q^2 \to \infty$, sont les coefficients de Fourier de*

$$\dot{A} = \frac{\dot{B}}{2(\cos 2\pi\dot{x} + \cos 2\pi\dot{y} - 2\lambda)}.$$

b) Si λ est réel, $|\lambda| < 1$, $\lambda \neq 0$, la variété V définie par

$$\cos 2\pi\dot{x} + \cos 2\pi\dot{y} - 2\lambda = 0$$

n'a pas de points multiples, la division est possible d'après le théorème VIII du chapitre V; mais il existe une infinité de solutions pour $\dot{A}$; la différence entre 2 d'entre elles est une couche simple arbitraire portée par la variété V.

c) Si $\lambda = 0$, la variété V a des points doubles à tangentes distinctes, nous savons encore résoudre le problème de la division. Si $\lambda = \pm 1$, V est réduite à l'un des points $(\dot{0}, \dot{0})$, $\left(\dot{\frac{1}{2}}, \dot{\frac{1}{2}}\right)$, point double isolé, la division ne rentre pas dans les cas traités au chapitre V, mais se fait aisément.

Distributions sur le tore et distributions périodiques sur R^n

On voit immédiatement, en définissant les distributions *au voisinage de chaque point* et en « recollant les morceaux » (théorème IV du chapitre I), qu'on peut établir une correspondance biunivoque entre les distributions $\dot{T}$ sur le tore et les distributions T périodiques sur R^n, de période 1 pour toutes les coordonées, c'est-à-dire vérifiant, quel que soit $l = \{l_1, l_2, \ldots l_n\}$, l_i entiers,

$$(\text{VII}, 1;14)\qquad \tau_l T = T.$$

Pour abréger, nous appellerons simplement « périodique » une telle distribution T; nous noterons par $\dot{T}$ la distribution associée à T sur le tore.

Ces deux distributions sont localement identiques, donc possèdent les mêmes caractères de régularité locale (différentiabilité, ordre,

etc...). Toute distribution périodique est ainsi le $\left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k$ d'une fonction continue périodique, pour k assez grand.

Une distribution périodique est presque-périodique (chap. VI, § 9).

On voit immédiatement que, dans ces conditions, les produits $\dot{S} \circledast \dot{T}$, $\dot{T} \odot \dot{\varphi}$, sont les produits $S \circledast T$, $T \odot \varphi$, définis sur R^n pour des distributions p p. [formules (VI, 9; 3 et 4)]. De même les coefficients de Fourier $a_l(\dot{T})$ sont ceux de la distribution p p. T [formule (VI, 9; 7)], les coefficients a_λ correspondant à des $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n\}$ à coordonnées non entières étant nuls.

Soit maintenant T une distribution sommable sur R^n $[T \in (\mathcal{D}'_{L^1})]$. On peut définir son image directe sur le tore, par l'application canonique $x \rightarrow \dot{x}$ de R^n sur T^n (cette application canonique n'est pas régulière à l'infini, d'où la restriction relative à la sommabilité de T). Cette image est identifiée à une distribution périodique sur R^n, que nous appellerons ϖT, transformée périodique de T.

Soient $\varphi \in (\mathcal{D}_{L^1})_{R^n}$; $\dot{\psi} \in (\mathcal{D})_{T^n}$; S, S_1, $S_2 \in (\mathcal{D}'_{L^1})_{R^n}$; $\dot{T} \in (\mathcal{D}')_{T^n}$; on a :

$$(\text{VII}, 1; 15)\quad \begin{cases} \varpi\varphi = \sum_l \varphi(x-l)\ ;\ \varpi S = \sum_l \tau_l S \\ (\varpi S)^\bullet \odot \dot{\psi} = S \cdot \psi;\ \dot{T} \odot (\varpi\varphi)^\bullet = T \cdot \varphi \\ (\varpi S)^\bullet \odot (\varpi\varphi)^\bullet = S \cdot \varpi\varphi = \varpi S \cdot \varphi \end{cases}$$

$$(\text{VII}, 1; 16)\quad \begin{cases} (\varpi S_1)^\bullet \circledast (\varpi S_2)^\bullet = (S_1 * \varpi S_2)^\bullet = (\varpi S_1 * S_2)^\bullet = [\varpi(S_1 * S_2)]^\bullet \\ (\varpi S)^\bullet \circledast \dot{T} = (S * T)^\bullet \end{cases}$$

Ces formules permettent de calculer les coefficients de Fourier d'une distribution T périodique sur R^n, sans passer par les produits scalaires sur le tore :

$$(\text{VII}, 1; 17)\qquad a_l(T) = T \cdot e_l,$$

e_l étant n'importe quelle fonction $\in (\mathcal{D})$ [ou $(\mathcal{D}_{L^1})$], dont la transformée périodique ϖe_l soit $\exp(-2i\pi l.x)$. On prend habituellement, si T est une fonction f, e_l égale à exp. $(-2i\pi l.x)$ sur un cube des périodes et à 0 ailleurs, ce qui exprime $a_l(f)$ par une intégrale portant sur un cube des périodes ; cette méthode est inutilisable si T est une distribution, car la fonction e_l choisie est discontinue.

Mais on a aussi

$$(\text{VII}, 1; 18)\quad a_l(T)\exp(2i\pi l.x) = T \circledast \exp(2i\pi l.x) = T * E_l,$$

E_l étant n'importe quelle distribution $\in(\mathcal{D}'_{L^1})$, dont la transformée périodique ϖE_l soit $\exp.(2i\pi l.x)$. On peut alors prendre pour E_l la fonction discontinue habituelle, ayant pour support dans R^n un cube des périodes.

§ 2 LA TRANSFORMATION DE FOURIER USUELLE DANS L'ESPACE A n DIMENSIONS [1]

Transformation de Fourier usuelle Soient X^n et Y^n deux espaces vectoriels isomorphes à l'espace R^n; un point x de X^n aura pour coordonnées $x_1, x_2, \ldots x_n$, un point y de Y^n aura pour coordonnées $y_1, y_2, \ldots y_n$. Nous continuerons à adopter les notations à une dimension des chapitres précédents; nous supposerons de plus que X^n et Y^n sont mis en dualité par le produit scalaire

$$x.y = x_1y_1 + x_2y_2 \ldots + x_ny_n. \tag{VII, 2, 1}$$

La transformée de Fourier usuelle de la fonction $f(x)$ sur X^n est une fonction $g(y)$ sur Y^n définie par la formule

$$\begin{cases} g = \mathcal{F}f \\ g(y) = \iint\cdots\int f(x)\exp(-2i\pi x.y)\,dx, \end{cases} \tag{VII, 2 ; 2}$$

et l'on a la formule de réciprocité de Fourier

$$\begin{cases} f = \overline{\mathcal{F}}g \\ f(x) = \iint\cdots\int g(y)\exp(+2i\pi x.y)\,dy. \end{cases} \tag{VII, 2 ; 3}$$

D'autre part on a la formule de Parseval qui jouera un rôle essentiel dans la suite : si $g_1 = \mathcal{F}f_1$, $g_2 = \mathcal{F}f_2$, cette formule s'écrit

$$\begin{cases} \iint\cdots\int f_1(x)\bar{f}_2(x)\,dx = \iint\cdots\int g_1(y)\bar{g}_2(y)\,dy, \quad \text{ou} \\ \iint\cdots\int f_1(x)f_2(x)\,dx = \iint\cdots\int g_1(y)g_2(-y)\,dy. \end{cases} \tag{VII, 2, 4}$$

Les formules précédentes n'ont de sens que moyennant des conditions très restrictives. Ainsi (VII, 2 ; 2), qui définit la transformation de Fourier, suppose que $f(x)$ soit sommable sur X^n. Dans ce cas $g(y)$ est continue, et un théorème classique de Lebesgue exprime

(1) Pour les propriétés classiques de l'intégrale de Fourier usuelle, on pourra consulter : BOCHNER [1], TITCHMARSH [1], CARLEMAN [1], A. WEIL [1], WIENER [1]

qu'elle tend vers o pour $|y| \to \infty$. On peut cependant lui donner un sens dans des cas plus généraux, à l'aide de procédés divers :

a) Lorsque $f(x)$ croît lentement pour $|x| \to \infty$, on peut définir g par la méthode de M. Bochner, systématisée dans le cas d'une dimension ($n = 1$), ou par la méthode de M. Carleman [1] ; cela rentrera dans nos formules ultérieures.

b) Par ailleurs, si $f(x) \in L^p$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, on peut, par un procédé fonctionnel classique (théorie de MM. Plancherel-Riesz), définir globalement $g(y)$, bien que l'intégrale qui définit g ne converge plus pour les valeurs individuelles de y pour $p \neq 1$. Alors $g(y) \in L^{p'}$, $p' = p/(p-1)$, avec la majoration

$$\text{(VII, 2; 5)} \qquad \|\mathcal{F}f\|_{p'} \leqslant \|f\|_p,$$

l'inégalité devenant égalité (Parseval) pour $p = 2$.

Par contre ce n'est que dans des cas restreints que la formule de réciprocité (VII, 2; 3) a un sens; par exemple si $f(x)$ est sommable, $g(y)$, qui est continue, n'est nullement sommable en général; si la fonction $g(y)$ se trouve vérifier les conditions *a*) ou *b*) permettant de lui appliquer la transformation $\overline{\mathcal{F}}$, alors on sait que $\overline{\mathcal{F}}g$ est égale à f.

De même la formule de Parseval nécessite des conditions particulières; il n'est pas suffisant que les deux membres aient un sens pour qu'ils soient égaux. On peut dire en tout cas que, si $f(x) \in L^2$, du fait que $g(y) \in L^2$, la formule de réciprocité (VII, 2; 3) est valable, et que f et g jouent des rôles symétriques, $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ étant deux isomorphismes réciproques entre $(L^2)_x$ et $(L^2)_y$; si f_1, f_2, g_1, g_2, sont dans L^2, la formule de Parseval est valable, les deux membres étant des intégrales de fonctions sommables. Si X^n et Y^n sont confondus avec le même espace R^n, $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ sont des opérateurs unitaires dans L^2.

On définit aussi la transformée de Fourier (ou *Fourier-Stieltjes*) d'une mesure sommable μ $\left(\iint \cdots \int |d\mu| < +\infty\right)$, en remplaçant, dans (VII, 2; 2), $f(x)\,dx$ par $d\mu$; c'est une fonction continue bornée $g(y)$.

Cas des distributions Nous allons définir la transformation de Fourier pour des distributions, et donner la même valeur aux deux formules réciproques. Cependant il n'est pas possible de définir la

(1) Bochner [1] p. 110-144 ; Carleman [1] p. 6-52

transformée de Fourier d'une distribution quelconque $T \in (\mathcal{D}')_x$ comme une nouvelle distribution. On peut voir en effet que toute définition acceptable de $\mathcal{F}T$ donne à cet élément des propriétés incompatibles avec celles d'une distribution. Précisons. Une définition acceptable de la transformation de Fourier doit être d'une part telle que $\mathcal{F}$ soit une transformation linéaire continue, d'autre part telle que, pour généraliser une propriété classique de la transformation de Fourier usuelle,

$$\text{(VII, 2; 6)} \quad \mathcal{F}(xT) = \frac{-1}{2i\pi}\frac{d}{dy}(\mathcal{F}T) \quad \text{(cas d'une variable, } n=1\text{)};$$

en particulier, comme $\mathcal{F}(1) = \delta$, mesure de Dirac :

$$\mathcal{F}x = \left(-\frac{1}{2i\pi}\right)\delta'; \qquad \mathcal{F}(x^m) = \left(-\frac{1}{2i\pi}\right)^m \delta^{(m)}.$$

Comme la série $\sum x^m/m!$ converge vers e^x uniformément sur tout compact, donc dans $(\mathcal{D}')$, la série $\sum\left(\frac{-1}{2i\pi}\right)^m \frac{\delta^{(m)}}{m!}$ devrait converger dans $(\mathcal{D}')_y$ vers $\mathcal{F}(e^x)$. Mais cette série n'est pas convergente dans $(\mathcal{D}')_y$, car ses termes ne sont pas des dérivées d'*ordre fixe* de fonctions continues (théorème XXII du chapitre III). Nous sommes donc amenés à dire que :

1° La transformation de Fourier ne pourra être définie que pour les distributions appartenant à un sous-espace $(\mathcal{S}')_x$ de $(\mathcal{D}')_x$; la fonction e^x n'aura pas de transformée de Fourier.

2° Il faudra munir $(\mathcal{S}')_x$ d'une topologie plus fine que celle de $(\mathcal{D}')_x$, pour que $\mathcal{F}$ puisse être une transformation linéaire continue. Dans cette nouvelle topologie, une série telle que $\sum x^m/m!$ ne devra pas converger.

Des transformations de Fourier pour des distributions non tempérées ont été étudiées dans le cadre des fonctions généralisées par Gelfand-Shilov [1].

§ 3 L'ESPACE $(\mathcal{S})$ DES FONCTIONS INDÉFINIMENT DÉRIVABLES A DÉCROISSANCE RAPIDE SUR R^n

L'espace $(\mathcal{S})$ Soit $(\mathcal{S})$ l'espace vectoriel des fonctions numériques $\varphi(x)$ sur R^n, indéfiniment dérivables au sens usuel, et décroissant,

pour $|x|\to\infty$, plus rapidement que toute puissance de $1/|x|$, ainsi que chacune de leurs dérivées.

$$\text{(VII, 3; 1)} \qquad \lim_{|x|\to\infty} |x^k D^p \varphi(x)| = 0.$$

pour tout $p = \{p_1, p_2, \ldots p_n\}$, et tout entier $k \geqslant 0$.

On peut encore dire : si $\varphi \in (\mathcal{S})$, tout produit d'un polynôme $P(x)$ par $Q * \varphi$, où Q est un « polynome de dérivation » [voir formule (VI, 3; 33)], est une fonction continue bornée sur R^n, et réciproquement ; ou aussi, si $\varphi \in (\mathcal{S})$, toute dérivée $Q * (P\varphi)$ du produit de φ par tout polynôme P est une fonction continue bornée, et réciproquement. La fonction sera dite, pour abréger, « indéfiniment dérivable à décroissance rapide ». $(\mathcal{D})$ est évidemment un sous-espace de $(\mathcal{S})$.

Nous introduirons dans $(\mathcal{S})$ une topologie : des $\varphi_j \in (\mathcal{S})$ convergeront vers 0 dans $(\mathcal{S})$, si, quels que soient le polynome $P(x)$ et le polynome de dérivation Q, les $P(Q * \varphi_j)$ convergent vers 0 uniformément dans R^n ; ou encore si, quels que soient P et Q, les $Q * P\varphi_j$ convergent vers 0 uniformément dans R^n (Comme toujours, aucune uniformité n'est requise relativement à tous les polynomes P et Q). Un système fondamental de voisinages de 0 dans $(\mathcal{S})$ est défini par les $V(m; k; \varepsilon)$, m, k, entiers $\geqslant 0$, ε nombre > 0 ; $\varphi \in V(m; k; \varepsilon)$, si $\varphi \in (\mathcal{S})$ et si

$$\text{(VII, 3; 2)} \qquad |(1+r^2)^k D^p \varphi(x)| \leqslant \varepsilon,$$

pour toute dérivée d'ordre $|p| \leqslant m$.

Mais on voit même aisément qu'une seule inégalité, vérifiée sur R^n, telle que

$$\text{(VII, 3; 3)} \quad \left|\frac{\partial^{mn}\varphi}{\partial x_1^m \partial x_2^m \ldots \partial x_n^m}\right| \leqslant \frac{\eta}{(1+x_1^2)^N(1+x_2^2)^N \ldots (1+x_n^2)^N} \quad \text{ou} \quad \leqslant \frac{\eta}{(1+r^2)^N},$$

entraîne, si m et N sont assez grands et η assez petit, le système des inégalités (VII, 3; 2).

En effet, pour toute fonction $\psi \in (\mathcal{S})$, une majoration d'une dérivée donne une majoration de la fonction, du fait que ψ peut s'écrire

$$\text{(VII, 3; 4)} \quad \begin{cases} \psi = \displaystyle\int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial\psi}{\partial t_1}(t_1, x_2, \ldots, x_n)\,dt_1 & \text{pour} \quad x_1 \leqslant 0, \quad \text{et} \\ \psi = -\displaystyle\int_{x_1}^{+\infty} \frac{\partial\psi}{\partial t_1}(t_1, x_2, \ldots, x_n)\,dt_1 & \text{pour} \quad x_1 \geqslant 0. \end{cases}$$

Un ensemble $B \subset (\mathcal{S})$ est borné si, quels que soient le polynome $P(x)$ et le polynome de dérivation Q, les $P(Q * \varphi)$ (ou les $Q * P\varphi$), $\varphi \in B$, sont des fonctions continues bornées sur R^n dans leur ensemble; et réciproquement.

L'espace $(\mathcal{S})$ est localement convexe, complet, et à base dénombrable de voisinages. Tous les théorèmes démontrés au § 2 du chapitre III relativement à l'espace $(\mathcal{D})$ sont vrais aussi pour l'espace $(\mathcal{S})$; en particulier $(\mathcal{S})$ est un espace de Montel, où il y a identité entre ensembles bornés et ensembles relativement compacts. En effet, si B est un ensemble borné dans $(\mathcal{S})$, alors, quels que soient P et Q, les $P(Q * \varphi)$, $\varphi \in B$, sont bornées par une même fonction tendant vers 0 à l'infini, donc on est ramené, pour démontrer la convergence uniforme sur R^n, à démontrer la convergence uniforme sur tout compact; on emploie alors le théorème d'Ascoli, comme au théorème VII du chapitre III.

Nous admettrons sans démonstration la propriété suivante :

Pour qu'un ensemble B *de* $(\mathcal{S})$ *soit borné, il faut et il suffit qu'il existe une fonction continue* $\geqslant 0$, $k(x)$, *décroissant plus vite, pour* $|x| \to \infty$, *que toute puissance de* $1/|x|$, *et une suite de constantes* $\geqslant 0$, k_p, *telles que l'on ait, pour toute* $\varphi \in B$:

$$\text{(VII, 3; 5)} \qquad |D^p \varphi(x)| \leqslant k_p k(x).$$

Interprétation géométrique Il est intéressant de donner une autre interprétation de l'espace $(\mathcal{S})$. Considérons la sphère S^n à n dimensions, avec la structure différentiable qu'elle possède comme sphère de l'espace euclidien R^{n+1}, à $n+1$ dimensions. On sait qu'on peut représenter S^n par l'espace R^n augmenté d'un point à l'infini, ω, la structure différentiable étant, à distance finie, celle de R^n, et au voinage du point ω, celle que l'on obtient sur R^n au voisinage de l'origine par une inversion de centre origine. Comme S^n est compacte, $(\mathcal{D})_{S^n}$ est simplement l'espace de toutes les fonctions indéfiniment différentiables sur S^n, il a une base dénombrable de voisinages (chap. I; § 5, 3°).

Comme R^n est un ouvert de S^n, toute fonction $\bar{\varphi}$ sur S^n a pour restriction une fonction φ sur R^n.

Théorème II *L'espace topologique* $(\mathcal{S})$ *sur* R^n *est isormorphe, par la correspondance entre* φ *et* $\bar{\varphi}$, *au sous-espace vectoriel fermé* $(\dot{\mathcal{D}})_{S^n}$ *de l'espace* $(\mathcal{D})_{S^n}$, *constitué par les fonctions* $\bar{\varphi}$ *qui sont nulles ainsi que toutes leurs dérivées successives au point* ω.

Naturellement sur S^n on ne peut pas parler de la dérivée d'une fonction en un point, sans fixer pour quel système de coordonnées locales ; mais on peut parler d'une fonction ayant toutes ses dérivées successives nulles en un point, parce que c'est une propriété indépendante du système de coordonnées locales choisi.

Pour une fonction $\varphi \in (\mathcal{S})$, nous définirons son prolongement $\bar{\varphi}$ sur S^n, par $\bar{\varphi}(\omega) = 0$. Cette fonction $\bar{\varphi}$ est évidemment indéfiniment dérivable sur S^n sauf peut être en ω ; montrons que toutes ses dérivées convergent vers o quand x tend vers ω. Une inversion de centre O transforme le point x en x', la fonction φ en φ' ; on a

$$\text{(VII, 3 ; 6)} \quad x_i = x'_i/r'^2 ; \qquad x'_i = x_i/r^2 ; \qquad \varphi'(x') = \varphi(x).$$

Les dérivations successives donnent la majoration

(VII, 3 ; 7)
$$|D^p_{x'}\varphi'(x')| \leqslant K_m \sup_{|q| \leqslant m} |D^q_x\varphi(x)|(1 + r^2)^m, \qquad \text{pour} \qquad |p| \leqslant m.$$

Mais puisque, pour $|x| \to \infty$, toutes les dérivées successives de φ convergent vers o plus vite que toute puissance de $1/r$, toutes les dérivée successives de $\varphi'(x')$ convergent bien vers o à l'origine. Alors $\bar{\varphi}'(x')$ est encore indéfiniment dérivable et a toutes ses dérivées nulles à l'origine, de sorte que $\bar{\varphi}$ appartient à $(\mathcal{D})_{S^n}$, et a toutes ses dérivées nulles en ω ; $\bar{\varphi} \in (\dot{\mathcal{D}})_{S^n}$.

b) Réciproquement, si $\bar{\varphi}$ appartient à $(\dot{\mathcal{D}})_{S^n}$, sa restriction φ à R^n est indéfiniment dérivable sur R^n. Comme $\bar{\varphi}$ a toutes ses dérivées nulles en ω, c'est-à-dire que $D^p\varphi'(x')$, pour tout p, converge vers o plus vite que toute puissance de r' quand x' tend vers o, la même majoration (VII, 3 ; 7), où l'on intervertit x et x', r et r', φ et φ', montre que $D^p\varphi(x)$ tend vers o, pour $|x| \to \infty$, plus vite que toute puissance de $1/r$, donc $\varphi \in (\mathcal{S})$ sur R^n.

Enfin l'isomorphisme entre $(\mathcal{S})$ et $(\dot{\mathcal{D}})_{S^n}$ est topologique. La convergence de φ dans $(\mathcal{S})$ et celle de $\bar{\varphi}$ dans $(\dot{\mathcal{D}})_{S^n}$ sont équivalentes d'après (VII, 3 ; 7).

Ce théorème permet de réobtenir toutes les propriétés de $(\mathcal{S})$ a partir de celles de $(\mathcal{D})_{S^n}$. La sphère S^n ne joue pas là un rôle particulier, n'importe quelle « compactification » assez régulière de R^n jouerait le même rôle. Un cas important sera celui de l'espace projectif réel P^n, réunion de R^n et d'un « hyperplan à l'infini » ω.

Si des $\varphi_j \in (\mathcal{D})$ convergent vers 0 dans l'espace topologique $(\mathcal{D})$, elles convergent *a fortiori* vers 0 dans $(\mathcal{S})$. La réciproque est fausse ;

la topologie de $(\mathcal{D})$ est strictement plus fine que la topologie induite par $(\mathcal{S})$.

THÉORÈME III *L'espace* $(\mathcal{D})$ *est dense dans l'espace* $(\mathcal{S})$.

Considérons en effet une suite de fonctions α_j, $j = 1, 2, \ldots$ à supports compacts, telles que les fonctions $\alpha_j - 1$ convergent uniformément vers o sur tout compact pour $j \to \infty$ ainsi que chacune de leurs dérivées, et que ces fonctions restent uniformément bornées sur R^n, ainsi que chacune de leurs dérivées. Alors, pour toute $\varphi \in (\mathcal{S})$, les $\alpha_j \varphi \in (\mathcal{D})$ convergent pour $j \to \infty$ vers φ dans la topologie de $(\mathcal{S})$, c. q. f. d.

Ce théorème est aussi évident sur la sphère S^n : il revient à dire que le sous-espace de $(\mathcal{D})_{S^n}$ formé des fonctions nulles au voisinage de ω est dense dans $(\mathcal{D})_{S^n}$.

§ 4 L'espace $(\mathcal{S}')$ des DISTRIBUTIONS à croissance lente ou tempérées.

$(\mathcal{S}')$, *dual de* $(\mathcal{S})$.

Nous appellerons $(\mathcal{S}')$ le dual de l'espace topologique $(\mathcal{S})$, c'est-à-dire l'espace des formes linéaires $T(\varphi)$ définies pour $\varphi \in (\mathcal{S})$ et continues : si des φ_j convergent vers o dans $(\mathcal{S})$, et si $T \in (\mathcal{S}')$, les nombres complexes $T(\varphi_j)$ doivent tendre vers o.

Si $T \in (\mathcal{S}')$, $T(\varphi)$ est à fortiori définie pour $\varphi \in (\mathcal{D})$; d'autre part, si des $\varphi_j \in (\mathcal{D})$ convergent vers o dans $(\mathcal{D})$, elles convergent aussi vers o dans $(\mathcal{S})$; donc les $T(\varphi_j)$ doivent converger vers o. Cela prouve que T définit une distribution ordinaire T_1, appartenant à $(\mathcal{D}')$. Cette distribution T_1 détermine entièrement T, car $T(\varphi)$ est connue pour toute $\varphi \in (\mathcal{D})$, donc pour toute $\varphi \in (\mathcal{S})$, puisque $(\mathcal{D})$ est dense dans $(\mathcal{S})$ (théorème III). Nous pourrons donc dans ce cas identifier complètement T et T_1, considérer tout élément de $(\mathcal{S}')$ comme une distribution, et l'espace $(\mathcal{S}')$ comme un sous espace vectoriel de $(\mathcal{D}')$.

Une distribution quelconque $T \in (\mathcal{D}')$ n'appartient pas à $(\mathcal{S}')$; par exemple la fonction e^x n'appartient pas à $(\mathcal{S}')$, comme nous le verrons plus loin. Bien évidemment $(\mathcal{E}') \subset (\mathcal{S}')$.

Une distribution $\in (\mathcal{S}')$ sera appelée à croissance lente ou tempérée. Nous verrons plus loin pourquoi (Théorèmes VI et VII).

THÉORÈME IV. — *Pour qu'une distribution* $T \in (\mathcal{D}')$ *appartienne à* $(\mathcal{S}')$, *il faut et il suffit qu'elle soit une forme linéaire sur* $(\mathcal{D})$, *continue relativement à la topologie induite par celle de* $(\mathcal{S})$ *sur* $(\mathcal{D})$.

La condition est évidemment nécessaire. Elle est aussi suffisante, car alors $T(\varphi)$ est une forme linéaire continue sur $(\mathcal{D})$, sous-espace dense de $(\mathcal{S})$, donc prolongeable d'une manière unique en une forme linéaire continue sur $(\mathcal{S})$.

Nous introduirons dans $(\mathcal{S}')$ une topologie, celle de dual de $(\mathcal{S})$, (chapitre III, § 3). $(\mathcal{S}')$ est complet, localement convexe, à base non dénombrable de voisinages. Il possède toutes les propriétés démontrées pour $(\mathcal{D}')$ au § 3 du chapitre III (à l'exception évidemment du critère de convergence, théorème XVI). En particulier $(\mathcal{S}')$ est un espace de Montel où les ensembles bornés sont relativement compacts ; $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}')$ sont réflexifs, chacun est le dual de l'autre.

On peut donner une autre interprétation de $(\mathcal{S}')$.

Interprétation géométrique de $(\mathcal{S}')$.

Le théorème III permet de montrer ce qui suit :

THÉORÈME V. — *Pour qu'une distribution* $T \in (\mathcal{D}')$ *appartienne à* $(\mathcal{S}')$, *il faut et suffit qu'elle soit la restriction à* R^n, *considéré comme ouvert de la sphère* S^n, *d'une distribution* $\overline{T}$ *sur la sphère* S^n.

1° La condition est suffisante. Si $\overline{T}$ est une distribution sur S^n, $\overline{T}(\overline{\varphi})$ est une forme linéaire continue sur $(\mathcal{D})_{S^n}$; donc a fortiori sur le sous-espace $(\dot{\mathcal{D}})_{S^n}$ des fonctions nulles en ω ainsi que toutes leurs dérivées ; alors la restriction T de $\overline{T}$ à R^n, définie, pour $\varphi \in (\mathcal{D})_{R^n}$, par $T(\varphi) = \overline{T}(\overline{\varphi})$, est définie et continue, non seulement sur $(\mathcal{D})$ mais encore sur $(\mathcal{S})$, donc T appartient à $(\mathcal{S}')$.

2° La condition est nécessaire. Si T est une distribution $\in (\mathcal{S}')$ sur R^n, elle est une forme linéaire continue sur $(\mathcal{S})$, donc sur le sous-espace vectoriel $(\dot{\mathcal{D}})_{S^n}$. Alors, d'après le théorème de Hahn-Banach, elle peut se prolonger en une forme linéaire continue sur $(\mathcal{D})_{S^n}$, c'est-à-dire une distribution $\overline{T}$ sur la sphère S^n. Cette distribution $\overline{T}$ n'est évidemment pas unique ; on peut lui ajouter n'importe quelle distribution nulle sur $(\dot{\mathcal{D}})_{S^n}$, c'est-à-dire de support ponctuel ω. D'ailleurs le théorème VII exprime simplement que, $(\mathcal{S})$ étant isomorphe à un sous-espace fermé $(\dot{\mathcal{D}})_{S^n}$ de $(\mathcal{D})_{S^n}$, son dual $(\mathcal{S}')$ est isomorphe au quo-

tient de $(\mathcal{D}')_{S^n}$ par le sous-espace orthogonal à $(\dot{\mathcal{D}})_{S^n}$. On peut voir qu'il s'agit là d'un isomorphisme d'espaces vectoriels topologiques.

Comme nous l'avons fait remarquer page 236 la sphère S^n ne joue pas là un rôle particulier. On peut, par exemple, la remplacer par l'espace projectif P^n.

Caractérisation des distributions tempérées par leur croissance

Nous allons maintenant étudier la structure concrète des distributions $\in(\mathcal{S}')$. Le théorème qui suit s'étend à un ensemble borné ou à une suite (ou un filtre à base bornée ou dénombrable) convergeant vers o dans $(\mathcal{S}')$.

THÉORÈME VI *Pour qu'une distribution* $T\in(\mathcal{D}')$ *soit tempérée, il faut et il suffit qu'elle soit une dérivée d'une fonction continue à croissance lente au sens usuel, c'est-à-dire d'une fonction qui est le produit de* $P(x)=(1+r^2)^{k/2}$ *par une fonction continue bornée sur* R^n :

$$(\text{VII}, 4; 1) \qquad T = D^p[P(x)f(x)] = D^p\left((1+r^2)^{\frac{k}{2}}f(x)\right).$$

2° *Pour qu'une distribution* T *appartienne à* $(\mathcal{S}')$, *il faut et il suffit que toutes ses régularisées* $T*\alpha$, $\alpha\in(\mathcal{D})$, *soient des fonctions continues à croissance lente; il existe alors un nombre réel k tel que les* $(T*\alpha)/(1+r^2)^{k/2}$ *soient toutes des fonctions continues bornées sur* R^n.

3° *Pour qu'une distribution* T *appartienne à* $(\mathcal{S}')$, *il est nécessaire qu'il existe un nombre réel k tel que la distribution* $T/(1+r^2)^{k/2}$ *soit bornée sur* $R^n(\in(\mathcal{B}')$, *voir chapitre* VI, § 8), *et suffisant que pour toute fonction* $\varphi\in(\mathcal{S})$, φT *soit bornée sur* R^n.

4° *Pour qa'une distribution* T *appartienne à* $(\mathcal{S}')$, *il est nécessaire qu'il existe un nombre réel k tel que les distributions* $\tau_h T/(1+|h|^2)^{k/2}$ *soient bornées dans* $(\mathcal{D}')$, *et suffisant que, pour toute fonction numérique* $c(h)$ *à décroissance rapide pour* $|h|\to\infty$, *les* $c(h)\tau_h T$ *soient bornées dans* $(\mathcal{D}')$.

C'est ce théorème qui justifie le nom de distributions à croissance lente. Il montre en particulier, comme nous l'avions dit au § 2 :

a) que e^x (cas d'une variable, $n=1$) $\notin(\mathcal{S}')$, car aucune de ses primitives n'est à croissante lente;

b) que la série $\sum_0^\infty x^m/m!$ (même cas, $n=1$) n'est pas convergente dans $(\mathcal{S}')$, car les sommes partielles $\sum_0^m$ ne sont pas, même après un nombre quelconque d'intégrations, bornées par un polynôme.

D'autre part, toute distribution tempérée est d'ordre borné sur R^n.

Rappelons qu'on peut remplacer 2° par un théorème plus fin (voir théorème XXII du chapitre VI).

Nous démontrerons le théorème dans l'ordre suivant :

a) Si $T \in (\mathcal{S}')$, il existe k tel que $T/(1+r^2)^{k/2}$ soit une distribution bornée sur R^n. En effet $T(\varphi)$ est borné lorsque φ parcourt un voisinage de o dans $(\mathcal{S})$; donc il existe un entier m et un nombre k réel tel que, si les $(1+r^2)^{\frac{k}{2}}\varphi_j$ convergent vers o dans $(\mathcal{D}_{L^1})$ (chapitre VI, § 8), les $T(\varphi_j)$ convergent vers o. Mais

$$(\text{VII}, 4; 2) \qquad T(\varphi) = [T/(1+r^2)^{k/2}] \cdot (1+r^2)^{k/2}\varphi;$$

cela prouve que $T/(1+r^2)^{k/2}$ est une forme linéaire continue sur $(\mathcal{D}_{L^1})$, donc $\in (\mathcal{B}')$. La structure des distributions bornées sur R^n (chapitre VI, théorème XXV, $p=\infty$) montre alors que T est somme de dérivées de fonctions continues à croissance lente; par intégration on pourra ramener cette somme à une dérivée unique (mais avec une valeur plus grande de k). La réciproque étant évidente, cela prouve (1°).

Remarque Si, au lieu d'une distribution, on avait une suite T_j convergeant vers o dans $(\mathcal{S}')$, on prouverait seulement (voir page 202, remarque 2°) que les $T_j/(1+r^2)^{k/2}$ convergent faiblement vers o dans $(\mathcal{B}')$; on en déduirait que les $T_j/(1+r^2)^{\frac{k+1}{2}}$ convergent fortement vers o dans $(\mathcal{B}')$.

b) Si, pour toute $\varphi \in (\mathcal{S})$, φT est dans $(\mathcal{B}')$, on a aussi

$$(\text{VII}, 4; 3) \qquad \varphi T = \left(\frac{1}{1+r^2}\right)^{\frac{n+1}{2}} \left[\left((1+r^2)^{\frac{n+1}{2}}\varphi\right)T\right] \in (\mathcal{D}'_{L^1})$$

(théorème XXVI (1°) du chapitre VI). On peut alors poser, pour $\varphi \in (\mathcal{S})$,

$$(\text{VII}, 4; 4) \qquad T \cdot \varphi = \varphi T\,(1) = \iint \cdots \int \varphi T.$$

$T \cdot \varphi$ est une forme linéaire sur $(\mathcal{S})$, continue parce que limite de formes linéaires continues $\alpha_\nu T \cdot \varphi$, $\alpha_\nu \in (\mathcal{D})$ (théorème de Banach-Steinhaus; voir théorème XX du chapitre VI). Donc $T \in (\mathcal{S}')$. *a*) et *b*) prouvent (3°).

c) Si $T \in (\mathcal{S}')$, son expression suivant (VII, 4; 1) montre que les $\tau_h T/(1+|h|^2)^{k/2}$ sont bornées dans $(\mathcal{D}')$. Réciproquement, s'il en est ainsi, alors (chapitre VI, théorème XXII) il existe un entier $m \geqslant 0$, tel que, pour toute $\alpha \in (\mathcal{D}^m_K)$, les $\tau_h(T * \alpha)/(1+|h|^2)^{k/2}$ soient, sur un

ouvert Ω relativement compact, des fonctions continues bornées ; cela revient à dire que $(T * \alpha)/(1 + r^2)^{k/2}$ est une fonction continue bornée sur R^n, ou que $T * \alpha$ est à croissance lente ; la formule (VI, 6 ; 22) montre alors que l'on a (VII, 4 : 1), donc que $T \in (\mathcal{S}')$.

d) Si, quelle que soit la fonction $c(h)$ à décroissance rapide pour $|h| \to \infty$, les distributions $c(h)\tau_h T$ forment un ensemble borné dans $(\mathcal{D}')$, alors les nombres $c(h)\tau_h T \cdot \varphi$ sont, pour $h \in R^n$, bornés pour toute $\varphi \in (\mathcal{D}_K)$ fixée ; autrement dit la quantité $\tau_h T \cdot \varphi$ est, pour toute $\varphi \in (\mathcal{D}_K)$, une fonction de h à croissance lente. Montrons que cette croissance est uniformément lente lorsque φ parcourt $(\mathcal{D}_K)$. Pour h fixé, la quantité

$$\text{(VII, 4 ; 5)} \qquad \log|\tau_h T \cdot \varphi| / \log\sqrt{1 + |h|^2}$$

est une fonction continue de $\varphi \in (\mathcal{D}_K)$. En vertu de l'hypothèse, ces fonctions continues de φ sont, lorsque h varie dans R^n, bornées dans leur ensemble pour toute φ fixée. Donc, d'après un théorème classique de Baire[1], ces fonctions de φ sont bien bornées dans leur ensemble sur un ouvert convenable de $(\mathcal{D}_K)$. Soit k la borne supérieure. Alors les $\tau_h T/(1 + |h|^2)^{k/2}$ sont bornées pour toute $\varphi \in (\mathcal{D}_K)$, donc aussi pour toute $\varphi \in (\mathcal{D})$, et par suite forment un ensemble borné dans $(\mathcal{D}')$, et d'après *c*), $T \in (\mathcal{S}')$.

Alors *c*) et *d*) démontrent 4°.

e) Supposons que, pour toute $\alpha \in (\mathcal{D})$, $(T * \alpha)$ soit à croissance lente (cette croissance pouvant a priori dépendre de α). Alors, pour toute fonction $c(h)$ à décroissance rapide, les fonctions $c(h)\tau_h(T * \alpha)$ sont bornées sur tout compact de R^n pour α fixe. Cela prouve (théorème XXII du chapitre VI) que les distributions $c(h)\tau_h T$ sont bornées dans $(\mathcal{D}')$; (*d*) prouve alors que $T \in (\mathcal{S}')$. Alors (1°) et (*e*) prouvent (2°).

Remarque La borne inférieure des valeurs de k possibles dans ce théorème peut être appelée l'ordre de croissance de T à l'infini. Toutes les définitions donnent la même valeur de k, si pour (1°) on prend *une somme finie* de dérivées.

Mesures positives tempérées Nous dirons qu'une mesure μ sur R^n est à croissance lente dans l'espace $(\mathcal{C}')$ des mesures, s'il existe un entier l tel que l'intégrale

$$\text{(VII, 4. 6)} \qquad \iint \cdots \int \frac{|d\mu|}{(1 + r^2)^l}$$

[1] Voir Bourbaki [2], § 5, n° 4, théorème 2, page 111

soit convergente. Cela revient à dire qu'il existe un entier l tel que l'intégrale

$$\text{(VII, 4 ; 7)} \qquad \iint\cdots\int_{r\leqslant A}|d\mu|$$

soit $O(A^l)$ pour $A\to\infty$; ou encore que μ est le produit d'un polynome par une mesure sommable sur R^n.

THÉORÈME VII *Si μ est une mesure sur R^n, pour qu'elle soit dans $(\mathcal{S}')$ il est suffisant, et nécessaire si elle est $\geqslant 0$, qu'elle soit à croissance lente dans $(\mathcal{C}')$.*

La condition est évidemment suffisante, démontrons qu'elle est nécessaire. En utilisant la même méthode que pour le théorème précédent, on voit d'abord qu'il doit exister un voisinage de 0 dans $(\mathcal{S})$, défini par l'inégalité

$$\text{(VII, 4 ; 8)} \quad |D^p\varphi(x)|(1+r^2)^l\leqslant\eta \text{ pour tout } p \text{ tel que } |p|\leqslant m,$$

sur lequel μ est bornée par 1. Or si nous considérons les fonctions $\alpha_j\geqslant 0$ utilisées au théorème III, les fonctions $\varepsilon\alpha_j/(1+r^2)^l\in(\mathcal{D})$ vérifient (VII, 4 ; 8) pour ε assez petit. Donc on a, pour tout j,

$$\text{(VII, 4, 9)} \quad \mu\cdot[\varepsilon\alpha_j/(1+r^2)^l]=\varepsilon\iint\cdots\int\frac{\alpha_j d\mu}{(1+r^2)^l}\leqslant 1.$$

En passant à la limite pour $j\to\infty$, puisque $\mu\geqslant 0$, on en déduit,

$$\text{(VII, 4, 10)} \qquad \iint\cdots\int d\mu/(1+r^2)^l\leqslant 1/\varepsilon.$$

Pour un ensemble borné de mesures $\geqslant 0$ dans $(\mathcal{S}')$, l et ε seraient fixes. Rien d'analogue pour une suite convergente. D'autre part aucune condition nécessaire du type ci-dessus n'existe pour des mesures non $\geqslant 0$. Ainsi, sur la droite ($n=1$), la mesure μ définie comme suit

$$\text{(VII, 4, 11)} \qquad \mu=\sum_l a_l(\delta_{(l+\varepsilon_l)}-\delta_{(l)})$$

est à croissance lente dans $(\mathcal{D}')$ c'est-à-dire $\in(\mathcal{S}')$, si la série $\sum_l|a_l|\varepsilon_l$ est convergente (car, toute $\varphi\in(\mathcal{S})$ ayant une dérivée bornée sur R^1, on peut majorer $|\mu(\varphi)|$ par $\sum_l|a_l|\varepsilon_l$ Max. $|\varphi'|$) ; or cela permet de prendre la suite des a_l aussi rapidement croissante qu'on veut, pourvu que la suite ε_l tende assez rapidement vers 0. D'ailleurs une somme de doublets telle que $\sum_l b_l\delta'_{(l)}$ est un cas limite du précédent, si la série $\sum_l|b_l|$ est convergente.

Un théorème de prolongement

Le théorème VII est un cas particulier d'un autre beaucoup plus général sur le prolongement des distributions, que nous nous contenterons d'énoncer ici :

THÉORÈME VIII *Si V^n est une variété indéfiniment différentiable, munie d'une métrique riemannienne, Ω un ouvert de V^n, μ une mesure définie sur Ω, pour que μ soit prolongeable en une distribution T sur V^n, il est suffisant, et nécessaire si $\mu \geqslant 0$, que, quel que soit le compact K de V^n, l'intégrale*

$$\text{(VII, 4; 12)} \qquad \iint \cdots \int_{K \cap \Omega} [d(x)]^l |d\mu|$$

soit convergente pour l assez grand, $d(x)$ étant la distance de x à la frontière $\dot{\Omega}$ de Ω.

Évidemment μ n'est prolongeable par une mesure que si on peut prendre $l = 0$.

Dans le cas de la sphère S^n, on pourra prendre une métrique riemanienne où la distance d'un point $x \in R^n$ à ω soit $1/\sqrt{1+r^2}$; avec $V^n = S^n$, $\Omega = R^n$, on retrouve le théorème VII.

§ 5 OPÉRATIONS ALGÉBRIQUES DANS L'ESPACE $(\mathcal{S}')$ DES DISTRIBUTIONS TEMPÉRÉES

On définit sans difficulté le produit tensoriel de 2 distributions tempérées ; c'est une nouvelle distribution tempérée et les théorèmes démontrés au chapitre IV sont encore valables. Pour définir la multiplication et le produit de composition dans $(\mathcal{S}')$, nous sommes amenés à introduire de nouveaux espaces vectoriels, $(\mathcal{O}_M)$ et $(\mathcal{O}'_C)$.

Les fonctions indéfiniment dérivables à croissance lente, l'espace $(\mathcal{O}_M)$

$(\mathcal{O}_M)$ sera l'espace des fonctions « indéfiniment dérivables à croissance lente ». Pour que $\alpha \in (\mathcal{O}_M)$, il faut et il suffit que $\alpha \in (\mathcal{E})$ et que toute dérivée $D^p\alpha$ soit majorée par un polynôme (dont le degré peut dépendre de p) ; ce qui revient à dire que le produit $fD^p\alpha$ de toute dérivée $D^p\alpha$ par toute fonction $f \in (\mathcal{S})$ est borné sur R^n. On définira une topologie sur $(\mathcal{O}_M)$ de la façon suivante : des $\alpha_j \in (\mathcal{O}_M)$ convergeront vers 0 si, quel que soit p et quelle que soit la fonction $f \in (\mathcal{S})$, le produit $f(x)D^p\alpha_j(x)$ converge vers 0, uniformément sur R^n.

[Cette convergence est naturellement uniforme par rapport à j si f reste bornée dans $(\mathcal{S})$]. $(\mathcal{O}_M)$ est un espace vectoriel complet localement convexe, à base non dénombrable de voisinages. Pour qu'un ensemble $B \subset (\mathcal{O}_M)$ soit borné, il faut et il suffit que, pour tout p, les $D^p\alpha$, $\alpha \in B$, soient majorées par un même polynôme pouvant dépendre de p. Pour qu'une suite (ou un filtre à base bornée ou dénombrable) α_j converge vers o dans $(\mathcal{O}_M)$, il faut et il suffit que, pour tout p, les $D^p\alpha_j$ soient produits d'un polynôme P_p (dépendant de p, non de j) par des fonctions convergeant uniformément vers o sur R^n.

Les distributions à décroissance rapide, l'espace $(\mathcal{O}'_C)$

L'espace $(\mathcal{O}'_C)$ est l'espace des « distributions à décroissance rapide ». Une distribution T appartient à $(\mathcal{O}'_C)$ si, quel que soit k, $(1+r^2)^{k/2}T$ est bornée sur R^n [c'est-à-dire $\in(\mathcal{B}')$; voir § 8 du chapitre VI]. Nous munirons $(\mathcal{O}'_C)$ de la topologie suivante : des $T_j \in (\mathcal{O}'_C)$ convergeront vers o dans $(\mathcal{O}'_C)$, si, quel que soit k, les $(1+r^2)^{k/2}T_j$ convergent vers o dans $(\mathcal{B}')$.

Théorème IX *Pour qu'une distribution* T *appartienne à* $(\mathcal{O}'_C)$:

1° *Il faut et il suffit que, quel que soit* $k \geqslant 0$, T *soit somme finie de dérivées de fonctions continues dont le produit par* $(1+r^2)^{k/2}$ *soit borné sur* R^n, *au sens usuel ;*

2° *Il faut et il suffit que, quel que soit* $k \geqslant 0$, *l'ensemble de distributions* $(1+|h|^2)^{k/2}\tau_h T$ *soit borné dans* $(\mathcal{D}')$;

3° *Il faut et il suffit que, pour toute* $\alpha \in (\mathcal{D})$, $T * \alpha$ *soit une fonction continue, à décroissance rapide à l'infini.*

La démonstration de ce théorème est immédiate, avec les méthodes des § 7 et 8 du chapitre VI ou celles du théorème VI du chapitre VII. Il se généralise de la manière habituelle à un ensemble de distributions borné dans $(\mathcal{O}'_C)$ et à une suite (ou un filtre à base bornée ou dénombrable) convergeant vers o dans $(\mathcal{O}'_C)$.

Remarque importante Soit $T \in (\mathcal{O}'_C)$. Quel que soit k, il existe un entier m tel que, pour $\alpha \in (\mathcal{D}^m)$, $T * \alpha$ soit une fonction continue dont le produit par $(1+r^2)^{k/2}$ soit borné sur R^n ; mais m augmente avec k et, pour m *fini*, $T * \alpha$ peut ne pas être une fonction continue à décroissance rapide, tandis qu'elle l'est toujours pour $m = \infty$, $\alpha \in (\mathcal{D})$. Notons aussi que $(\mathcal{O}'_C)$ n'est pas le dual de $(\mathcal{O}_M)$ (Voir exemple).

Ajoutons enfin la relation suivante entre les espaces $(\mathcal{S})$, $(\mathcal{S}')$, $(\mathcal{O}_M)$, $(\mathcal{O}'_C)$:

Pour qu'une distribution soit dans $(\mathcal{S}')$, *il faut et il suffit que toutes*

ses régularisées $T * \alpha$, $\alpha \in (\mathcal{D})$, *soient dans* $(\mathcal{O}_M)$; *pour qu'une distribution soit dans* $(\mathcal{O}'_C)$, *il faut et il suffit que toutes ses régularisées soient dans* $(\mathcal{S})$.

On pourrait considérer le dual $(\mathcal{O}'_M)$ de $(\mathcal{O}_M)$, et un espace de fonctions indéfiniment dérivables $(\mathcal{O}_C)$ dont $(\mathcal{O}'_C)$ est le dual. Ces espaces ne semblent pas jouer de rôle important. Par ailleurs il n'est pas certain que $(\mathcal{O}_M)$ et $(\mathcal{O}'_C)$ possèdent les propriétés générales des espaces vectoriels, vues au chapitre III pour $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$.

Exemple Considérons (pour $n = 1$) la fonction

(VII, 5 ; 1) $$f(x) = \exp(i\pi x^2).$$

$f \in (\mathcal{E})$; elle est bornée sur R^n, mais ses dérivées ne le sont pas, de sorte que $f \notin (\mathcal{B})$. On voit immédiatement que $f \in (\mathcal{O}_M)$, sa dérivée d'ordre m étant le produit de $\exp(i\pi x^2)$ par un polynôme de degré m, $H_m(x)$.

Par ailleurs $f \in (\mathcal{O}'_C)$, car, quel que soit $m \geqslant 0$, son produit par $(1 + x^2)^m$ est une distribution bornée. Soit en effet $\sum_{\nu \leqslant 2m} \lambda_\nu H_\nu(x)$ le développement de $(1 + x^2)^m$ suivant les polynômes $H_\nu(x)$. On aura :

(VII, 5 ; 2) $$(1 + x^2)^m \exp(i\pi x^2) = \sum_{\nu \leqslant 2m} \lambda_\nu \frac{d^\nu}{dx^\nu}[\exp(i\pi x^2)] \in (\mathcal{B}').$$

En divisant par $(1 + x^2)^m$, on en déduirait, par des intégrations par parties, que $\exp(i\pi x^2)$ est somme finie de dérivées d'ordre $\leqslant 2m$ de fonctions majorées par $C/(1 + x^2)^m$; mais elle n'est pas somme finie de dérivées de fonctions continues à décroissance rapide. Ses régularisées $T * \alpha$, pour $\alpha \in (\mathcal{D})$, sont à décroissance rapide, mais non ses régularisées par $\alpha \in (\mathcal{D}^m)$, qui ont seulement la propriété de décroître, pour $|x| \to \infty$, comme des puissances de $1/|x|$ d'autant plus grandes que m est plus grand (au moins comme $1/|x|^m$).

Cet exemple montre clairement pourquoi $(\mathcal{O}_M)$ et $(\mathcal{O}'_C)$ ne sont pas en dualité. Car f et $\bar{f}(x) = \exp(-i\pi x^2)$ appartiennent toutes deux à $(\mathcal{O}_M)$ et $(\mathcal{O}'_C)$, et $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\bar{f}(x)dx = +\infty$.

La multiplication dans $(\mathcal{S}')$

Les espaces $(\mathcal{O}_M)$ et $(\mathcal{O}'_C)$ seront des espaces d'opérateurs sur $(\mathcal{S}')$; $(\mathcal{O}_M)$ l'espace des opérateurs de multiplication, $(\mathcal{O}'_C)$ l'espace des opérateurs de composition.

La multiplication αT se définit comme au chapitre V. Mais on ne peut plus prendre $\alpha \in (\mathcal{E})$ quelconque, sans quoi αT ne sera plus

dans $(\mathcal{S}')$. On voit immédiatement que si $T \in (\mathcal{S}')$, $\alpha \in (\mathcal{O}_M)$, αT appartient à $(\mathcal{S}')$, car la formule

$$\text{(VII, 5 ; 3)} \qquad \alpha T \cdot \varphi = T \cdot \alpha\varphi, \qquad \varphi \in (\mathcal{S}),$$

a toujours un sens, $\alpha\varphi$ appartenant aussi à $(\mathcal{S})$.

Ce produit de multiplication possède les propriétés énoncées au chapitre v ; en particulier on a évidemment :

Théorème X *L'application bilinéaire* $(\alpha, T) \to \alpha T$ *de* $(\mathcal{O}_M) \times (\mathcal{S}')$ *dans* $(\mathcal{S}')$ *est hypocontinue. Le produit d'un nombre fini quelconque de distributions* $\in (\mathcal{S}')$, *qui toutes, sauf une au plus, sont dans* $(\mathcal{O}_M)$, *est associatif et commutatif.*

Soit $\alpha \in (\mathcal{E})$. On peut montrer que si, quelle que soit $T \in (\mathcal{S}')$, αT est aussi dans $(\mathcal{S}')$, alors $\alpha \in (\mathcal{O}_M)$. Autrement dit, l'espace $(\mathcal{O}_M)$ est l'espace de tous les multiplicateurs sur $(\mathcal{S}')$. De plus, si des $\alpha_j \in (\mathcal{O}_M)$ sont tels que les $\alpha_j T$ convergent vers o dans $(\mathcal{S}')$, uniformément lorsque T reste bornée dans $(\mathcal{S}')$, alors les α_j convergent vers o dans $(\mathcal{O}_M)$.

$(\mathcal{O}_M)$ a donc la topologie induite par l'espace $\mathcal{L}(\mathcal{S}', \mathcal{S}')$ de tous les opérateurs continus de $(\mathcal{S}')$ dans $(\mathcal{S}')$, muni de la topologie canonique de la convergence uniforme sur les parties bornées.

La convolution dans $(\mathcal{S}')$.

Le produit de convolution est un plus délicat à définir. On peut toujours considérer $S * T$, $S \in (\mathcal{E}')$, $T \in (\mathcal{S}')$, et il n'y a aucune difficulté à voir que $S * T \in (\mathcal{S}')$. Mais, du fait que la croisaance à l'infini de T est limitée, S n'a plus besoin d'être à support compact ; nous allons voir qu'on peut prendre $S \in (\mathcal{O}'_C)$. Considérons, en effet, le produit scalaire

$$\text{(VII, 5 ; 4)} \qquad (S_\xi \times T_\eta) \cdot \varphi(\xi + \eta),$$

certainement défini pour $S \in (\mathcal{E}')$, $T \in (\mathcal{S}')$, $\varphi \in (\mathcal{D})$.

Nous allons montrer que si on place sur $(\mathcal{E}')$ la topologie induite par $(\mathcal{O}'_C)$, sur $(\mathcal{S}')$ sa propre topologie, sur $(\mathcal{D})$ la topologie induite par $(\mathcal{S})$, ce produit scalaire est hypocontinu : autrement dit si deux des quantités S, T, φ, restent bornées, la 3[e] convergeant vers 0, le produit trilinéaire converge vers 0.

Démontrons, par exemple, qu'il converge vers o si φ reste bornée dans $(\mathcal{S})$, T dans $(\mathcal{S}')$, et que S converge vers o dans $(\mathcal{O}'_C)$. Comme T reste bornée dans $(\mathcal{S}')$, elle s'écrit

$$\text{(VII, 5 ; 5)} \qquad T_\eta = D^p[(1 + |\eta|^2)^{k/2} f(\eta)],$$

où p et k sont fixes, $f(\eta)$ est une fonction qui reste continue et bornée par un nombre fixe sur R^n (formule VII, 4 ; 1). Alors

(VII, 5 ; 6)

$$D_\xi^q[T_\eta \cdot \varphi(\xi+\eta)] = (-1)^{|p|}\iint\cdots\int (1+|\eta|^2)^{k/2} f(\eta) D^{p+q}\varphi(\xi+\eta)\,d\eta.$$

Mais on a, quels que soient ξ et η, la majoration

(VII, 5 ; 7) $\qquad 1+|\eta|^2 \leqslant C(1+|\xi|^2)(1+|\xi+\eta|^2)$

d'où

(VII, 5 ; 8)

$$|D_\xi^q[T_\eta \cdot \varphi(\xi+\eta)]| \leqslant C_1(1+|\xi|^2)^{k/2} \times \iint\cdots\int |D^{p+q}\varphi(\xi+\eta)|(1+|\xi+\eta|^2)^{k/2}\,d\eta.$$

L'intégrale qui figure au 2^e membre est indépendante de ξ et vaut $\iint\cdots\int |D^{p+q}\varphi(t)|(1+|t|^2)^{k/2}\,dt$, et elle est bornée, pour p, q, k donnés, quand φ varie dans $(\mathcal{S})$ en restant bornée (§ 3).

Alors la fonction indéfiniment dérivable $I(\xi) = T_\eta \cdot \varphi(\xi+\eta)$ vérifie une suite d'inégalités

(VII, 5 ; 9) $\qquad |D^q I(\xi)| \leqslant A_q(1+|\xi|^2)^{k/2}.$

Pour l quelconque, on peut écrire

(VII, 5 ; 10) $\qquad S_\xi \cdot I(\xi) = (1+|\xi|^2)^{\frac{l}{2}} S_\xi \cdot \dfrac{I(\xi)}{(1+|\xi|^2)^{l/2}}.$

Mais, en vertu de (VII, 5 ; 7), la fonction $I(\xi)/(1+|\xi|^2)^{l/2}$ reste bornée dans $L^1(R^n)$, ainsi que chacune de ses dérivées, si $l > k+n$; elle reste donc bornée dans l'espace $(\mathcal{D}_{L^1})$. D'autre part, S convergeant vers 0 dans $(\mathcal{O}'_C)$, $(1+|\xi|^2)^{l/2}S_\xi$ converge vers 0 dans $(\mathcal{B}')$, quel que soit l ; le produit scalaire du 2^e membre, d'après la dualité entre $(\mathcal{D}_{L^1})$ et $(\mathcal{B}')$, converge donc bien uniformément vers 0, c. q. f. d.

Les deux autres cas se démontrent de façon analogue.

Alors on voit que, par prolongement, on peut définir, d'une manière unique, $(S_\xi \otimes T_\eta) \cdot \varphi(\xi+\eta) = (S * T) \cdot \varphi$, pour $S(\mathcal{O}'_C)$, $T \in (\mathcal{S}')$, $\varphi \in (\mathcal{S})$; alors $S * T$ est dans $(\mathcal{S}')$ puisque forme linéaire continue sur $(\mathcal{S})$. On peut finalement énoncer :

Théorème XI *On peut définir, d'une manière unique, le produit de convolution* $S * T$, $S \in (\mathcal{O}'_C)$, $T \in (\mathcal{S}')$, *c'est une distribution de* $(\mathcal{S}')$. *L'application bilinéaire* $(S, T) \to S * T$ *de* $(\mathcal{O}'_C) \times (\mathcal{S}')$ *dans* $(\mathcal{S}')$ *est hypocontinue. Le produit de convolution d'un nombre fini quel-*

conque de distributions de $(\mathcal{S}')$, *qui toutes, sauf une au plus, sont dans* $(\mathcal{O}'_C)$, *est associatif et commutatif.*

Dans l'énoncé de ce théorème, on peut remplacer, comme on le verrait aisément, $(\mathcal{S}')$ par l'un quelconque des espaces $(\mathcal{S})$, $(\mathcal{D}_{L^p})$, $(\mathcal{D}'_{L^p})$, en particulier $(\mathcal{B}')$. On verrait de même que la régularisation $(T, \alpha) \to T * \alpha$ est une application bilinéaire hypocontinue de $(\mathcal{S}') \times (\mathcal{S})$ dans $(\mathcal{O}_M)$, et de $(\mathcal{O}'_C) \times (\mathcal{S})$ dans $(\mathcal{S})$.

Remarquons enfin que la multiplication, considérée comme application bilinéaire de $(\mathcal{O}_M) \times (\mathcal{O}_M)$ dans $(\mathcal{O}_M)$, et la convolution, considérée comme application bilinéaire de $(\mathcal{O}'_C) \times (\mathcal{O}'_C)$ dans $(\mathcal{O}'_C)$, sont non seulement hypocontinues, mais même continues. (C'est évident pour la multiplication; pour la convolution, c'est moins simple, mais le théorème XV ramènera l'une des propriétés à l'autre.)

Exemple **La distribution L_l de la formule (II, 3 ; 20) est dans $(\mathcal{O}'_C)$, puisqu'elle décroît exponentiellement à l'infini. Elle peut donc être convoluée avec toute distribution de $(\mathcal{S}')$. En prenant $l = 2k$, on en déduit** ***que, quelle que soit*** **$T \in (\mathcal{S}')$,** ***il existe une distribution et une seule*** **S,** ***qui soit dans*** **$(\mathcal{S}')$** ***et vérifie*** $\left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k S = T$.

Pour k assez grand, L_{2k} est m fois différentiable, et ses dérivées d'ordre $\leqslant m$ décroissent exponentiellement à l'infini, de sorte que S devient une fonction continue à croissance lente, ce qui donne la décomposition de T suivant le théorème VI (1°), d'une façon particulièrement simple :

$$\text{(VII, 5 ; 11)} \qquad \begin{cases} L_{2k} * T = S \\ T = \left(1 - \dfrac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k S. \end{cases}$$

Si maintenant $T \in (\mathcal{O}'_C)$, S est une fonction pour k assez grand, d'autant plus rapidement décroissante à l'infini que k est plus grand (mais sans être en général à décroissance rapide, quelle que soit la valeur de k).

§ 6 Transformation de Fourier des distributions tempérées

Nous nous appuierons sur les résultats connus de la transformation de Fourier dans les cas élémentaires (§ 2).

L'espace $(\mathcal{S}')$ des distributions tempérées sera le domaine par

excellence de l'analyse harmonique. Nous distinguerons nettement les rôles des 2 variables x et y, mais rien n'empêchera, quand on le voudra, de les identifier : nous désignerons par $(\mathcal{S})_x$, $(\mathcal{S})_y$, $(\mathcal{S}')_x$, $(\mathcal{S}')_y$, les espaces $(\mathcal{S})$, $(\mathcal{S}')$, construits respectivement sur les espaces à n dimensions X^n et Y^n.

Soit $u(x)$ une fonction $\in(\mathcal{S})_x$: elle est sommable, donc elle a une transformée de Fourier usuelle, définie par

$$\text{(VII, 6; 1)} \quad v(y) = \iint\cdots\int u(x)\exp(-2i\pi x.y)dx.$$

Il est facile de voir que $v(y)\in(\mathcal{S})_y$. En effet :

a) La formule (VII, 6; 1) peut être indéfiniment dérivée. Par exemple ·

$$\text{(VII, 6; 2)} \quad \frac{\partial}{\partial y_1}v(y) = \iint\cdots\int u(x)(-2i\pi x_1)\exp(-2i\pi x.y)\,dx,$$

l'intégrale du 2ᵉ membre ayant un sens puisque $x_1u(x)$ est sommable. C'est le fait que u soit à « décroissance rapide » à l'∞, qui entraîne le fait que v soit indéfiniment dérivable.

b) En sens inverse, une intégration par parties montre que

$$\text{(VII, 6; 3)} \quad 2i\pi y_1 v(y) = \iint\cdots\int \frac{\partial u(x)}{\partial x_1}\exp(-2i\pi x.y)\,dx.$$

Le deuxième membre étant sommable, $y_1v(y)$ est bornée ; en continuant, on voit que le fait que u ait toutes ses dérivées successives sommables entraîne le fait que v soit « à décroissance rapide à l'infini ». Il y a donc échange des deux propriétés. Si $u\in(\mathcal{S})_x$, elle est à décroissance rapide ainsi que toutes ses dérivées, donc v a toutes ses dérivées à décroissance rapide : $v\in(\mathcal{S})_y$.

Naturellement ici la formule de réciprocité joue

$$\text{(VII, 6; 4)} \quad u(x) = \iint\cdots\int v(y)\exp(+2i\pi x.y)\,dy,$$

et, pour des fonctions appartenant à $(\mathcal{S})_x$ et $(\mathcal{S}_y)$, la formule de Parseval est valable. Ajoutons que le raisonnement même qui nous a permis de montrer que $u\in(\mathcal{S})_x$ entraîne $v\in(\mathcal{S})_y$ montre aussi qne, si des u_j convergent vers 0 dans $(\mathcal{S})_x$, leurs transformées de Fourier v_j convergent vers 0 dans $(\mathcal{S})_y$:

Théorème XII *La transformation de Fourier usuelle $\mathcal{F}$ et sa conjuguée $\overline{\mathcal{F}}$ établissent, entre les espaces topologiques $(\mathcal{S})_x$ et $(\mathcal{S})_y$, 2 isomorphismes réciproques (et, si l'on identifie les variables x et y, elles établissent sur $(\mathcal{S})$ 2 automorphismes réciproques).*

Il est maintenant très facile de définir la transformée de Fourier d'une distribution tempérée quelconque U. Si U est une fonction, ayant une transformée de Fourier usuelle V (par exemple si U est de carré sommable), on a, quelles que soient $v \in (\mathcal{S})_y$ et son image de Fourier $u \in (\mathcal{S})_x$, $u = \mathcal{F}v$, $u(x) = \int_{\mathrm{R}^n} v(y) \exp(-2i\pi x \cdot y)\, dy$ la formule :

$$\text{(VII 6; 5)} \quad \mathrm{V}_y \cdot v(y) = \int v(y)\, dy \int \mathrm{U}(x) \exp(-2i\pi x \cdot y)\, dx$$
$$= \int \mathrm{U}(x)\, dx \int v(y)\, dy \exp(-2i\pi x \cdot y)\, dy = \mathrm{U}_x \cdot u(x).$$

ou

$$\text{(VII 6; 6)} \qquad \mathcal{F}\mathrm{U} \cdot v = \mathrm{U} \cdot \mathcal{F}v.$$

Mais si U est une distribution tempérée quelconque $\in (\mathcal{S}')_x$, la formule ci-dessus définit, *d'une manière bien déterminée et unique*, une forme linéaire $\mathrm{V} = \mathcal{F}\,\mathrm{U}$ sur $(\mathcal{S})_y$.

Cette forme linéaire définit bien une distribution tempérée $\in (\mathcal{S}')_y$; car, si v tend vers o dans $(\mathcal{S})_y$, u tend vers o dans $(\mathcal{S})_x$, donc le 2e membre de (VII, 6; 6) tend vers o, U étant tempérée, et par suite aussi le premier : V est une forme linéaire continue sur $(\mathcal{S})_y$, c. q. f. d. Cette définition absolument générale de la transformée de Fourier redonne, dans les cas classiques, la transformée de Fourier classique, puisque celle-ci vérifie (VII, 6; 6) qui détermine V d'une manière unique. Naturellement V ne peut être nulle que si U est nulle; car si $\mathrm{V} = 0$ le 1er membre de (VII, 6; 6) est nul quel que soit $v \in (\mathcal{S})_y$, donc le 2e quel que soit $u \in (\mathcal{S})_x$, et U est nulle. D'ailleurs la formule (VII, 6; 6) est tout aussi valable si l'on remplace la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ par sa conjuguée $\overline{\mathcal{F}}$; on peut l'écrire, respectivement dans ces 2 cas,

$$\text{(VII, 6; 7)} \quad \begin{cases} \mathcal{F}\mathrm{U} \cdot v = \mathrm{U} \cdot \mathcal{F}v = \mathrm{U}_x \otimes v_y \cdot \exp(-2i\pi x \cdot y) \\ \overline{\mathcal{F}}\mathrm{U} \cdot v = \mathrm{U} \cdot \overline{\mathcal{F}}v = \mathrm{U}_x \otimes v_y \cdot \exp(+2i\pi x \cdot y) \text{ (1)}, \end{cases}$$

ce qui exprime que la transformation $\mathcal{F}$ de $(\mathcal{S}')_x$ dans $(\mathcal{S}')_y$ est la transposée de la transformation $\mathcal{F}$ de $(\mathcal{S})_y$ dans $(\mathcal{S})_x$. Alors

$$\text{(VII, 6; 8)} \quad \begin{cases} \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\mathrm{U} \cdot v = \mathcal{F}\mathrm{U} \cdot \overline{\mathcal{F}}v = \mathrm{U} \cdot \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}v = \mathrm{U} \cdot v \\ \text{ou} \quad \overline{\mathcal{F}}\mathcal{F}\mathrm{U} = \mathrm{U} \quad \text{et aussi} \quad \mathcal{F}\overline{\mathcal{F}}\mathrm{V} = \mathrm{V} : \end{cases}$$

(1) C'est la théorie précédente qui donne un sens à cette dernière expression, purement formelle

$\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ sont réciproques l'un de l'autre; si $V = \mathcal{F}U$, alors $U = \overline{\mathcal{F}}V$ et réciproquement. Bien plus, si des $U_j \in (\mathcal{S}')_x$ convergent vers 0 dans $(\mathcal{S}')_x$, leurs images de Fourier V_j convergent vers 0 dans $(\mathcal{S}')_y$. En effet si v parcourt un ensemble borné dans $(\mathcal{S})_y$, $u = \mathcal{F}v$ parcourt un ensemble borné dans $(\mathcal{S})_x$ d'après le théorème XII, alors les $U_j.u$ convergent uniformément vers 0, donc aussi les $V_j.v$. On peut donc énoncer :

Théorème XIII *La transformation de Fourier $\mathcal{F}$ et sa conjuguée $\overline{\mathcal{F}}$ établissent entre les 2 espaces topologiques $(\mathcal{S}')_x$ et $(\mathcal{S}')_y$ 2 isomorphismes réciproques ; si l'on identifie les variables x et y, $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ définissent dans l'espace topologique $(\mathcal{S}')$ 2 automorphismes réciproques.*

Il en résultera en particulier qu'on peut effectuer la transformation de Fourier, terme à terme, sur une série convergente, ce qui est impossible habituellement.

Notre définition de la transformation de Fourier dans $(\mathcal{S}')$ peut encore s'exprimer comme suit.

La transformation de Fourier est classique dans $(\mathcal{S})$; $\mathcal{F}$ est une application linéaire *continue* de $(\mathcal{S})_x$ dans $(\mathcal{S})_y$; mais elle est encore continue quand on munit $(\mathcal{S})_x$ et $(\mathcal{S})_y$ des topologies induites par $(\mathcal{S}')_x$ et $(\mathcal{S}')_y$; c'est la formule (VII, 6; 6) qui le montre (si l'on y suppose $u, v, U_j, V_j, \in (\mathcal{S})$, et les U_j convergeant vers o dans $(\mathcal{S}')_x$). Alors $\mathcal{F}$ est prolongeable d'une manière unique en une application linéaire continue de $(\mathcal{S}')_x$ dans $(\mathcal{S}')_y$; et c'est précisément la même formule qui donnera ce prolongement, cette fois pour u, v, dans $(\mathcal{S})$ et U, V, dans $(\mathcal{S}')$.

Il est souvent commode d'utiliser les transformations $\check{}$ (symétrie : voir chapitre VI, p. 23), $\bar{}$ (passage d'une quantité complexe à sa complexe conjuguée), et $\tilde{}$ (composée, dans un ordre quelconque, de $\check{}$ et $\bar{}$). On a alors les formules suivantes, classiques dans $(\mathcal{S})$ donc vraies dans $(\mathcal{S}')$:

$$\text{(VII, 6; 9)} \quad \begin{cases} (\mathcal{F}U)\check{} = \mathcal{F}\check{U} = \overline{\mathcal{F}}U \\ (\mathcal{F}U)^{-} = \mathcal{F}\tilde{U} = \overline{\mathcal{F}}\,\overline{U} \\ (\mathcal{F}U)\tilde{} = \mathcal{F}\overline{U} = \overline{\mathcal{F}}\tilde{U}. \end{cases}$$

On appelle spectre d'une distribution $\in (\mathcal{S}')_x$ le support de sa transformée de Fourier ; c'est donc un ensemble fermé d'ailleurs arbitraire de Y^n. Une distribution $\neq$ o a un spectre non vide.

Transformation de Fourier et automorphismes de X^n et Y^n

Terminons ce paragraphe par une formule, qui est susceptible d'une grande généralisation [1].

[1] Voir Scarfiello [1] et chapitre IX, § 6, formule (IX, 6; 12)

Soit $x \to H(x)$ un isomorphisme de X^n *sur* lui-même, $y \to {}^tH(y)$ son transposé, isomorphisme de Y^n sur lui-même. Soit $U \in (\mathcal{S}')_x$ une distribution *dont l'image de Fourier soit une fonction* $V(y) = \mathcal{F}U_x$. La distribution U possède par H une image directe HU, définie par $HU . u(x) = U . u(H(x))$ (ici $u(H(x)) \in (\mathcal{S})$, parce que H est un isomorphisme). Son image de Fourier est une fonction, qui vérifie la formule

$$\text{(VII, 6; 10)} \qquad \mathcal{F}(HU) = V({}^tH(y)).$$

En effet, d'après la définition,

(VII, 6; 11)

$$\left\{\begin{aligned} \mathcal{F}(HU) . v = HU . \mathcal{F}v &= HU_x . \iint \ldots \int \exp(-2i\pi x . y) v(y) dy \\ &= U_x . \iint \ldots \int \exp[-2i\pi H(x) . y] v(y) dy \\ &= U_x . \iint \ldots \int \exp[-2i\pi x . {}^tH(y)] v(y) dy \\ &= U_x . \iint \ldots \int \exp(-2i\pi x . z) v({}^tH^{-1}(z)) |\text{dét.}\, {}^tH^{-1}| dz. \end{aligned}\right.$$

L'intégrale multiple est une transformée de Fourier, donc, d'après l'égalité de Parseval, cette expression vaut, V_y étant une fonction $V(y)$

$$\text{(VII, 6; 12)} \qquad \left\{\begin{aligned} &\iint \ldots \int V(y) v({}^tH^{-1}(y)) |\text{dét.}\, {}^tH^{-1}| dy \\ &= \iint \ldots \int V({}^tH(t)) v(t) dt, \end{aligned}\right.$$

ce qui démontre bien (VII, 6; 10).

Remarque Si H était dégénérée, HU n'aurait pas de sens en général, H n'étant pas « régulière à l'infini ». Si V n'est pas une fonction, (VII, 6; 10) est dénuée de sens. Si U_x est une fonction $U(x)$, remarquons que l'on a immédiatement

$$\text{(VII, 6; 13)} \qquad HU(x) = U(H^{-1}(x)) |\text{dét.}\, H^{-1}|.$$

En particulier, si H est l'homothétie de rapport λ, on aura

$$\text{(VII, 6; 14)} \qquad \mathcal{F}(HU) = V(\lambda y),$$

et, si en outre U est une fonction $U(x)$:

$$\text{(VII, 6; 15)} \qquad \frac{1}{|\lambda|^n} \mathcal{F}\left[U\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right] = V(\lambda y),$$

formule bien connue.

§ 7 Exemples (¹)

Exemple 1 On a les formules suivantes :

$$(\text{VII}, 7; 1)\quad \begin{cases} \mathcal{F}\delta = 1; \qquad \mathcal{F}1 = \delta \\ \mathcal{F}\delta_{(h)} = \exp(-2i\pi h.y); \qquad \mathcal{F}[\exp(2i\pi h.x)] = \delta_{(h)} \\ \mathcal{F}\left(\dfrac{\partial\delta}{\partial x_k}\right) = 2i\pi y_k; \qquad \mathcal{F}(2i\pi x_k) = -\dfrac{\partial\delta}{\partial y_k}. \end{cases}$$

Ces formules sont immédiates. Vérifions par exemple la 3ᵉ.

(VII, 7; 2)

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial\delta}{\partial x_k}\right)\cdot v(y) = \frac{\partial\delta}{\partial x_k}\cdot\iint\cdots\int \exp(-2i\pi x.y)v(y)dy$$

$$= \iint\cdots\int(2i\pi y_k)v(y)dy = 2i\pi y_k\cdot v(y).$$

La propriété d'échange entre produit de multiplication et produit de convolution qui sera démontrée au paragraphe suivant (théorème XV) montre alors que l'on peut écrire, si $U\in(\mathcal{S}')_x$, $V=\mathcal{F}U$:

$$(\text{VII}, 7; 3)\quad \begin{cases} \mathcal{F}(\tau_k U) = \mathcal{F}(\delta_{(h)} * U) = \exp(-2i\pi h.y)V \\ \mathcal{F}\left(\dfrac{\partial U}{\partial x_k}\right) = \mathcal{F}\left(\dfrac{\partial\delta}{\partial x_k} * U\right) = 2i\pi y_k V. \end{cases}$$

Mais de toute façon ces formules se montrent directement. D'ailleurs, classiques si $U\in(\mathcal{S})_x$, elles sont vraies par passage à la limite pour $U\in(\mathcal{S}')_x$. Elles prouvent, comme nous l'avons déjà vu pour des fonctions de $(\mathcal{S})$, que la transformation de Fourier échange les propriétés locales de différentiabilité et les propriétés de décroissance à l'infini.

Exemple 2 *Série et intégrale de Fourier*

Soit $\dot{T}$ une distribution sur le tore T^n, associée à une distribution T périodique sur R^n (§ 1). Elle possède alors des coefficients de Fourier $a_l(\dot{T})$, donnés par la formule (VII, 1; 1). T est donc représentée par la série, convergente dans $(\mathcal{B}')_x$ donc dans $(\mathcal{S}')_x$, $\sum_l a_l \exp(2i\pi l.x)$; une transformation de Fourier terme à terme montre alors que, sur R^n, sa transformée de Fourier $\mathcal{F}T$, compte-tenu de la 2ᵉ formule (VII, 7; 1), est $\sum_l a_l\delta_{(l)}$; $\mathcal{F}T$ est formée

(¹) Lavoine [1] contient 73 pages d'exemples d'images de Fourier de distributions; c'est à dire l'utilité que ce livre peut avoir pour les mathématiciens appliqués et les ingénieurs

de masses discrètes, la masse a_l au point $l = \{l_1, l_2, \ldots, l_n\}$. La propriété s'étend aux distributions presque périodiques si leur série de Fourier converge dans $(\mathcal{S}')_x$. Réciproquement, une distribution T sur R^n, dont la transformée $\mathcal{F}T$ est formée des masses b_l aux points l de coordonnées entières, est périodique, car

$$\mathcal{F}(\tau_l T - T) = [\exp(-2i\pi l \cdot x) - 1]\mathcal{F}T = 0;$$

elle admet alors les b_l comme coefficients de Fourier.

Soit, en particulier, δ la mesure de Dirac sur le tore, identifiée à la distribution périodique $\sum_l \delta_{(l)}$ sur R^n; ses coefficients de Fourier, calculés sur le tore, sont tous égaux à 1 [formules (VII, 1 ; 5)], de sorte que

$$\text{(VII, 7 ; 4)} \qquad \mathcal{F}\Big(\sum_l \delta_{(l)}\Big) = \sum_l \delta_{(l)}.$$

La formule de Parseval, appliquée à (VII, 7 ; 4), est la formule sommatoire classique de Poisson : si $u(x)$ et $v(y)$ sont dans $(\mathcal{S})$, $v = \mathcal{F}u$,

$$\text{(VII, 7 ; 5)} \qquad \sum_l u(l) = \sum_l v(l).$$

On peut naturellement étendre cette formule à des cas plus généraux (1) ; il est intéressant de l'interpréter comme une formule de Parseval. On sait qu'appliquée, pour $n = 1$, à $u(x) = \exp(-\pi t x^2)$, $v(y) = \frac{1}{\sqrt{t}} \exp(-\pi y^2/t)$, elle donne la formule de transformation des fonctions θ :

$$\text{(VII, 7 ; 6)} \qquad \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} \exp(-\pi l^2 t) = \sum_{l=-\infty}^{l=+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} \exp\Big(-\frac{\pi l^2}{t}\Big).$$

Exemple 3 *Transformée de Fourier d'une mesure* (2)

Soit $U = \mu$ une mesure à croissance lente [formule (VII, 4 ; 7)]. Si A est un ensemble mesurable borné de R^n, la partie μ_A de la mesure μ portée par A est sommable, et sa transformée de Fourier $\mathcal{F}\mu_A$ est une fonction continue bornée $\mathcal{G}_A(y)$, qui s'exprime par une intégrale de Fourier usuelle. Mais, lorsque A s'étend à l'infini dans

(1) Voir par exemple Bochner [1] p. 33-38. On ne connaît pas de conditions nécessaires et suffisantes générales pour la validité de la formule de Poisson. Voir Boas [1], et Borgen [1]

(2) C'est dans ce cas que pour $n = 1$ s'appliquent les méthodes de Bochner et Carleman (note 1, page 232)

toutes les directions, de façon à finir par contenir tout ensemble borné, μ_A converge vers μ dans $(\mathcal{S}')_x$ (convergence « suivant l'ensemble ordonné filtrant des parties mesurables bornées de R^n »), à cause de l'hypothèse de la croissance lente.

Alors $\mathcal{F}\mu_A$ converge vers $\mathcal{F}\mu$ dans $(\mathcal{S}')_y$, de sorte qu'on peut écrire :

(VII, 7 ; 7)
$$\mathcal{F}(\mu_x) = \iint \cdots \int_{R^n} \exp(-2i\pi x \,.\, y) d\mu(x) = \lim_{A \to R^n} \iint \cdots \int_A .$$

Contrairement à la conception classique des intégrales multiples, qui ne peuvent converger indépendamment de la forme des volumes A s'accroissant indéfiniment, que si elles convergent absolument, l'intégrale ci-dessus converge alors que $\iint \cdots \int |d\mu(x)| = +\infty$; mais elle ne converge pas numériquement pour les diverses valeurs de y, elle converge, en tant que distribution tempérée en y, dans $(\mathcal{S}')_y$. Remarquons que μ est le produit $(1+r^2)^k\nu$ d'une puissance de $(1+r^2)$ par une mesure ν sommable, donc $\mathcal{F}\mu = \left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k \mathcal{F}\nu$, de sorte que l'intégrale qui figure dans (VII, 7 ; 7) apparaît comme la dérivée $\left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k$ d'une intégrale absolument convergente, donnant $\mathcal{F}\nu$; $\mathcal{F}\nu$ est une fonction bornée, *donc $\mathcal{F}\mu$ est une distribution bornée sur* R^n $[\mathcal{F}\mu \in (\mathcal{B}')_y]$, *et elle converge vers* 0 *à l'infini* $[\mathcal{F}\mu \in (\dot{\mathcal{B}}')$, voir chapitre VI, § 8] *si μ est une fonction f* (d'après le théorème de Lebesgue, rappelé au § 2). Si μ est le produit d'un polynôme par une fonction $\in L^p (1 \leqslant p \leqslant 2)$, $\mathcal{F}\mu$ est une somme de dérivées de fonctions $\in L^{p'} [p' = p/(p-1)]$, donc $\mathcal{F}\mu \in (\mathcal{D}'_{L^{p'}})$. Nous voyons bien que des propriétés de régularité locale de $U (U = \mu,\ U = f)$ entraînent des propriétés de décroissance à l'infini de $V [V \in (\mathcal{B}'),\ V \in (\dot{\mathcal{B}}')]$. La formule (VII, 7 ; 7) est utilisée classiquement en électricité, calcul symbolique, mécanique ondulatoire, etc... ; elle apparaît maintenant comme entièrement justifiée. Par exemple, si $n = 1$,

(VII, 7 ; 8)
$$\delta_y = \mathcal{F}[(1)_x] = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-2i\pi xy) dx = 2\int_0^{\infty} \cos 2\pi xy dx$$
$$\frac{\partial \delta}{\partial y} = \mathcal{F}(-2i\pi x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (-2i\pi x)[\exp(-2i\pi xy)] dx$$
$$= -2\int_0^{\infty} 2\pi x \sin 2\pi xy dx.$$

Les intégrales sont limites [dans $(\mathcal{S}')_y$] d'intégrales étendues à des intervalles finis, la 2ᵉ peut s'obtenir directement à partir de la 1ʳᵉ par dérivation en y sous le signe $\int$.

Exemple 4 *Transformation de Fourier sur les* $(\mathcal{D}'_{L^p})$, (*chapitre* VI, § 8)

Cette fois ce sont des propriétés de décroissance à l'infini de U, l'appartenance à $(\mathcal{D}'_{L^p})$, qui entraînent des propriétés de régularité locale de V.

Si $U \in (\mathcal{D}_{L^1})$, $\mathcal{F}U = V$ est continue et bornée ainsi que son produit par tout polynôme : c'est une fonction continue à décroissance rapide. Si $U \in (\mathcal{D}_{L^p})$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, V est dans $L^{p'}[p' = p/(p-1)]$, ainsi que son produit par tout polynôme.

Si $U \in (\mathcal{D}'_{L^1})$, elle est somme finie de dérivées de fonctions sommables (théorème XXV du chapitre VI), V est le produit d'un polynôme par une fonction continue bornée : *c'est une fonction continue à croissance lente. Extension immédiate à un ensemble borné ou une suite convergente dans* $(\mathcal{D}'_{L^1})$. Si $U \in (\mathcal{D}'_{L^p})$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, V est le produit d'un polynôme par une fonction $\in L^{p'}$. C'est seulement pour $p = 2$ que les propriétés précédentes aboutissent à des caractérisations : « $U \in (\mathcal{D}'_{L^2})$ » est équivalent à : « V est le produit d'un polynôme par une fonction $\in L^2$ ». Si $U \in (\mathcal{D}'_{L^1})$, on a la formule suivante (voir chapitre VI, § 8, dualité entre $(\mathcal{B})$ et $(\mathcal{D}'_{L^1})$) :

$$\text{(VII, 7 ; 9)} \qquad V(y) = U_x \, . \, \exp(-2i\pi x \, . \, y),$$

le second membre ayant un sens pour toute valeur individuelle de y.

La formule est en effet vraie, si $U \in (\mathcal{S})_x$; d'après ce qui a été dit ci-dessus pour les suites convergentes dans $(\mathcal{D}'_{L^1})$, elle est vraie par passage à la limite pour $U \in (\mathcal{D}'_{L^1})$.

En particulier, pour $y = 0$, elle donne

$$\text{(VII, 7 ; 10)} \qquad \text{Tr. } V = \iint \cdots \int U, \qquad U \in (\mathcal{D}'_{L^1}),$$

formule liant l'intégrale et la trace, classique dans le cas où U est une mesure sommable sur R^n. Remarquons alors que si $u \in (\mathcal{S})$, $U \in (\mathcal{S}')$, $v = \mathcal{F}u$, $V = \mathcal{F}U$, la formule de Parseval $U \, . \, \bar{u} = V \, . \, \bar{v}$ peut s'écrire $\iint \cdots \int U\bar{u} = \text{Tr. } (V * \tilde{v})$, et qu'elle est alors conséquence de (VII, 7 ; 10), (VII, 6 ; 10), et de (VII, 8 ; 4) qui sera démontrée plus loin.

On peut symboliquement généraliser les formules (VII, 7 ; 7) et (VII, 7 ; 9) en écrivant toujours, pour U et V$\in(\mathcal{S}')$, $V = \mathcal{F}U$,

$$\text{(VII, 7 ; 11)} \qquad V_y = U_x \cdot \exp(-2i\pi x \cdot y),$$

étant entendu que le produit scalaire du 2ᵉ membre n'a pas de sens comme valeur numérique pour les diverses valeurs de y, mais comme distribution en y. Si l'on approche U par des produits αU à supports compacts ou $\in(\mathcal{D}'_{L^1})$, on est ramené à (VII, 7 ; 9) ; si on l'approche par des régularisées $U * \beta \in (\mathcal{O}_M)$, on est ramené (VII, 7 ; 7). On obtient ainsi les divers « procédés de sommation » de l'intégrale de Fourier. Par exemple, on peut prendre

$$\alpha = \exp(-\varepsilon\pi r^2), \qquad \beta = \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^n \exp\left(-\frac{\pi r^2}{\varepsilon}\right)$$

Exemple 5 *Fonctions de la distance*

Soit $U = 1/r^k$, $0 < k < n$. Pour $k > n/2$, U appartient à $(\mathcal{D}'_{L^2})$, donc $\mathcal{F}U = V$ est une fonction. Cette fonction bien évidemment ne dépend que de la distance r. D'autre part, $1/r^k$ étant homogène et de degré $-k$, V est homogène de degré $k-n$ (d'après (VII, 6 ; 16)), c'est-à-dire de la forme C_{-k}/r^{n-k}. On calculera la constante C_{-k}[1] en appliquant la formule de Parseval avec $u = v = \exp(-\pi r^2)$:

(VII, 7 ; 12)

$$\iint \cdots \int \exp(-\pi r^2) r^{-k} dx = C_{-k} \iint \cdots \int \exp(-\pi r^2) r^{k-n} dy,$$

d'où, pour m réel, $-\dfrac{n}{2} > m > -n$,

$$\text{(VII, 7 ; 13)} \qquad \mathcal{F}r^m = \frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}+m}} \frac{\Gamma\left(\dfrac{m+n}{2}\right)}{\Gamma\left(-\dfrac{m}{2}\right)} r^{-(m+n)}$$

Cette formule reste évidemment vraie pour $m = -\dfrac{n}{2}$ par passage à la limite, et pour $0 > m > -\dfrac{n}{2}$ par échange entre m et $-(m+n)$. Mais les 2 membres sont des fonctions méromorphes de la variable complexe m, si, pour $\Re m > 0$ ou $< -n$, on met devant la puissance de r le symbole Pf (partie finie) ; la formule (VII, 7 ; 13)

(1) Cette méthode très simple de calcul de C_{-k} m'a été suggérée par M. Deny. Elle est utilisée dans sa thèse. Deny [1], p. 151

reste donc exacte pour toutes les valeurs complexes de m, qui ne sont pas des valeurs singulières pour les fonctions méromorphes précédentes ; pour ces valeurs exceptionnelles ($m = -n - 2h$, h entier $\geqslant 0$, pour le 1er membre ; $m = 2h$ pour le 2^e membre), la formule doit être modifiée comme suit (le calcul se fait par passage à la limite à partir de valeurs non singulières de m ; voir formules (II, 3 ; 5 et 9)) :

$$(\text{VII}, 7\,;\,14)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathcal{F}(r^{2h}) = \left(-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^h \delta \\ &\mathcal{F}\left(\mathrm{Pf}\frac{1}{r^{n+2h}}\right) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}+2h}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+h\right)}\, 2\, \frac{(-1)^h}{h\,!} r^{2h} \left[\log\frac{1}{\pi r}\right. \\ &\left. + \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{h} - \mathcal{C}\right) + \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma'\left(\frac{n}{2}+h\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+h\right)}\right] \end{aligned}\right.$$

où $\mathcal{C}$ est la constante d'Euler ; la somme $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{h}$ doit être remplacée par 0 pour $h = 0$.

En particulier, pour $m = -n$, on obtient :

$$(\text{VII}, 7\,;\,15)\quad \mathcal{F}\left(\mathrm{Pf}\,\frac{1}{r^n}\right) = \frac{2(\sqrt{\pi})^n}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left[\log\frac{1}{\pi r} - \frac{\mathcal{C}}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma'\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\right]$$

(VII, 7 ; 16)

$$\mathcal{F}\left(\log\frac{1}{r}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2(\sqrt{\pi})^n}\left(\mathrm{Pf}\,\frac{1}{r^n}\right) + \left(\frac{\mathcal{C}}{2} - \frac{1}{2}\,\frac{\Gamma'\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} + \log\pi\right)\delta.$$

Ces formules donnent immédiatement, pour $n \neq 2$,

$$(\text{VII}, 7\,;\,17)\quad \mathcal{F}\left[\Delta\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)\right] = -4\pi^2 r^2 \mathcal{F}\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right) = -(n-2)\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)},$$

ce qui redonne la formule (II, 3 ; 10). Pour $n = 2$, on aura

$$\mathcal{F}\{\Delta[\log(1/r)]\} = -4\pi^2 r^2 \mathcal{F}[\log(1/r)] = -2\pi.$$

Pour $n = 1$, (VII, 7 ; 16) devient

$$(\text{VII}, 7\,;\,18)\quad \mathcal{F}(\log|x|) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{|y|}\right) - (\mathcal{C} + \log 2\pi)\delta\,;$$

par dérivation en x, on obtient

$$(\text{VII}, 7\,;\,19) \qquad \mathcal{F}\left(\text{v. p.}\,\frac{1}{x}\right)=\begin{cases}+i\pi & \text{pour } y<0\\ -i\pi & \text{pour } y>0.\end{cases}$$

ce que l'on aurait pu obtenir directement, en remarquant que v. p. $1/x$ est la seule distribution impaire ($\check{U}=-U$) dont le produit par x soit la constante 1 (voir chapitre v, théorème VII), de sorte que son image de Fourier est la seule distribution impaire V telle que $-\frac{1}{2i\pi}\frac{dV}{dy}=\delta$. Les dérivations suivantes donneront (formules II, 2 ; 28)

$$(\text{VII}, 7\,;\,20) \qquad \mathcal{F}\left[(-1)^l\, l\,!\,\text{Pf}\,\frac{1}{x^{l+1}}\right]=\begin{cases}+i\pi(2i\pi y)^l & \text{pour } y<0\\ -i\pi(2i\pi y)^l & \text{pour } y>0.\end{cases}$$

La formule (VII, 7 ; 19) est bien connue sous une forme indirecte. Soit $V=\mathcal{F}U$, la propriété d'échange de la multiplication et de la convolution donnera

$$(\text{VII}, 7\,;\,21) \qquad \mathcal{F}\left[\text{v. p.}\,\frac{1}{x}*U\right]=\pm V$$

($+$ pour $y<0$, $-$ pour $y>0$). Cette formule a un sens pour $U\in(\mathcal{S})$, d'où, par passage à la limite, dans des cas plus généraux : par exemple pour $U\in(\mathcal{D}'_{L^2})$, cas où V est une fonction (qui appartient à L^2 sur tout compact). Pour $U\in L^p$ $(1<p<+\infty)$, on démontre (¹) que v. p. $\frac{1}{x}*U$ s'écrit v. p. $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{U(t)}{x-t}\,dt$, cette intégrale étant convergente pour presque toutes les valeurs de x. On peut généraliser immédiatement les propriétés classiques de cette intégrale, en montrant que la convolution avec v. p. $1/x$ est une opération linéaire continue de $(\mathcal{D}'_{L^p})$ dans $(\mathcal{D}'_{L^q})$ $(1<p<+\infty,\ p\leqslant q$, ou $1=p<q)$.

D'une façon générale, pour calculer la transformée de Fourier V d'une fonction $U(r)$, on utilisera la formule classique suivante, où J est une fonction de Bessel (²) :

$$(\text{VII}, 7\,;\,22) \qquad V(r)=\frac{2\pi}{r^{\frac{n-2}{2}}}\int_0^{+\infty}U(t)\,t^{\frac{n}{2}}\,J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi rt)\,dt.$$

(¹) Marcel Riesz [3]. C'est la transformation de Hilbert

(²) Bochner [1], p. 187, formule 15

Cette formule, applicable lorsque U et V sont des fonctions, admet une généralisation sur laquelle nous n'insisterons pas, et qui définirait la transformation de Hankel pour des distributions tempérées sur la demi-droite $(0, +\infty)$.

Pour $U(r) = 1/(1+r^2)^{\frac{m}{2}}$, $\mathcal{R}m > n/2$, on obtient ainsi

$$\text{(VII, 7; 23)} \quad \mathcal{F}\left[(1+r^2)^{-\frac{m}{2}}\right] = \frac{2\pi^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} r^{\frac{m-n}{2}} K_{\frac{n-m}{2}}(2\pi r) = L_m,$$

suivant la notation de la formule (II, 3; 20). Mais $1/(1+r^2)^{\frac{m}{2}}$ est dans $(\mathcal{S}')$ pour tout m ; et c'est une fonction holomorphe entière de la variable complexe m. Donc sa transformée de Fourier V est dans $(\mathcal{S}')_y$ [elle décroît même exponentiellement à l'infini, à cause de l'analyticité de $(1+r^2)^{-\frac{m}{2}}$] et s'obtient par prolongement analytique en m pour $\mathcal{R}m \leqslant n$. Ce prolongement coïncide donc toujours avec L_m, et s'écrit en ajoutant le symbole Pf (partie finie), sauf pour $m = 0, -2, -4 \ldots$; bien évidemment

$$L_{-2k} = \mathcal{F}(1+r^2)^k = \left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k \delta.$$

Dans beaucoup de questions, $1/(1+r^m)$ et $\left(1 + \left(-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^m\right)$ peuvent remplacer $1/(1+r^2)^m$ et $\left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^m$

Exemple 6 *Fonctions méromorphes*

Soit, dans le plan R^2, $f(z)$ une fonction méromorphe de la variable complexe z. Nous avons vu (chapitre II, § 3, exemple 3) qu'on peut définir une distribution v. p. $f(z)$.

On vérifiera les formules suivantes, où l'on identifie R^2 avec son dual :

$$\text{(VII, 7; 24)} \quad \begin{cases} \mathcal{F}(z) = -\dfrac{1}{i\pi}\dfrac{\partial\delta}{\partial\bar{z}}\,; & \mathcal{F}(z^m) = \left(-\dfrac{1}{i\pi}\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}}\right)^m \delta\,; \\ \mathcal{F}\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{-i}{z}\,; & \mathcal{F}\left(\text{v. p. } \dfrac{1}{z^m}\right) = -\dfrac{i}{z}\dfrac{(-i\pi\bar{z})^{m-1}}{(m-1)!}, \end{cases}$$

formules qui sont équivalentes à (II, 3; 27).

Exemple 7 *Transformation de Fourier et polynomes d'Hermite*

Considérons d'abord le cas d'une variable ($n=1$). Nous définirons les polynomes d'Hermite $H_m(x)$ (¹) par les formules :

(VII, 7 ; 25)
$$\frac{d^m}{dx^m}[\exp(-2\pi x^2)] = (-1)^m \sqrt{m!}\, 2^{m-\frac{1}{4}} \pi^{\frac{m}{2}} H_m(x) \exp(-2\pi x^2).$$

Ces polynomes définissent un système orthonormé dans L^2, celui des fonctions d'Hermite $\mathcal{H}_m(x) = H_m(x)\exp(-\pi x^2)$:

(VII, 7 ; 26) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_p(x)\mathcal{H}_q(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad p \neq q \\ 1 & \text{si} \quad p = q. \end{cases}$$

D'autre part, la transformation de Fourier donne

(VII, 7 ; 27) $$\mathcal{F}[\mathcal{H}_m(x)] = (-i)^m \mathcal{H}_m(y).$$

Soit alors $\varphi(x) \in L^2$. Cette fonction possède un développement suivant les fonctions d'Hermite, convergent dans L^2 :

(VII, 7 ; 28)
$$\begin{cases} \varphi(x) = \sum_0^\infty a_m(\varphi)\mathcal{H}_m(x) \,; \qquad a_m(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\mathcal{H}_m(x)dx \,; \\ \sum_0^\infty |a_m|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|^2 dx. \end{cases}$$

Considérons les transformations $\mathcal{T}_+$ et $\mathcal{T}_-$, transposées l'une de l'autre, définies par

(VII, 7 ; 29) $$\mathcal{T}_\pm \varphi = \pm \frac{d\varphi}{dx} + 2\pi x \varphi.$$

En vertu des relations de récurrence entre polynomes d'Hermite, on a

(VII, 7 ; 30) $$\begin{cases} \mathcal{T}_+ \mathcal{H}_m = 2\sqrt{\pi m}\, \mathcal{H}_{m-1} \\ \mathcal{T}_- \mathcal{H}_m = 2\sqrt{\pi(m+1)}\, \mathcal{H}_{m+1}. \end{cases}$$

Il en résulte que, si φ, φ', $x\varphi$ sont dans L^2 :

(VII, 7 ; 31) $$a_m(\mathcal{T}_+\varphi) = \mathcal{T}_+\varphi \,.\, \mathcal{H}_m = \varphi \,.\, \mathcal{T}_-\mathcal{H}_m$$

(VII, 7 ; 32) $$\begin{cases} a_m(\mathcal{T}_+\varphi) = 2\sqrt{\pi(m+1)}\, a_{m+1}(\varphi) \\ a_m(\mathcal{T}_-\varphi) = 2\sqrt{\pi m}\, a_{m-1}(\varphi) \; [m \geqslant 1 \,; \quad a_0(\mathcal{T}_-\varphi) = 0], \end{cases}$$

(¹) Les polynomes d'Hermite usuels $P_m(x)$ sont liés aux nôtres par les formules
$$\frac{d^m}{dx^m}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) = (-1)^m P_m(x)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right); \qquad H_m(x) = \frac{2^{1/4}}{\sqrt{m!}} P_m(2\sqrt{\pi}\, x).$$

d'où on déduit la convergence de la somme $\sum_0^\infty m|a_m|^2$. Réciproquement, si $\varphi \in L^2$, la série $\sum_0^\infty a_m(\varphi)\mathcal{H}_m(x)$ converge dsns L^2, donc dans $(\mathcal{D}')$; l'application des opérations $\mathcal{T}_+$ et $\mathcal{T}_-$ terme à terme montre que $\mathcal{T}_+\varphi$ et $\mathcal{T}_-\varphi$ sont, dans $(\mathcal{D}')$, sommes de séries de fonctions d'Hermite; si $\sum m|a_m|^2 < +\infty$, ces séries convergent dans L^2, alors φ' et $x\varphi$ sont dans L^2. Il y a ainsi équivalence entre les deux propriétés :

a) φ, φ', $x\varphi$ sont dans L^2;

b) $\sum_0^\infty m|a_m(\varphi)|^2 < +\infty$.

On en tire, par itération des opérations $\mathcal{T}_+$ et $\mathcal{T}_-$, les conséquences suivantes :

1° Pour que $\varphi \in (\mathcal{S})$, il faut et il suffit que la suite $a_m(\varphi)$ soit à décroissance rapide pour $m \to \infty$. L'application qui à $\varphi \in (\mathcal{S})$ fait correspondre la suite $\{a_m(\varphi)\}$ est un isomorphisme (d'espaces vectoriels topologiques) entre $(\mathcal{S})$ et l'espace des suites à décroissance rapide.

2° Si T est une distribution tempérée, on peut calculer les $a_m(T) = T \cdot \mathcal{H}_m$. Comme, d'après le théorème VI (1°), T est somme finie de distributions qui s'obtiennent chacune par application répétée des opérations $\mathcal{T}_+$ et $\mathcal{T}_-$ sur des fonctions de L^2, les $a_m(T)$ forment, d'après (VII, 7; 32), une suite à croissance lente pour $m \to \infty$. Réciproquement, si la suite b_m est à croissance lente pour $m \to \infty$, elle est le produit de $\sqrt{(m+1)(m+2)\ldots(m+k)}$ par une suite c_m telle que $\sum |c_m|^2 < +\infty$, ce qui prouve que la série $\sum_m b_m\mathcal{H}_m(x)$ converge dans $(\mathcal{S}')$ vers une limite T, qui admet alors les b_m comme coefficients d'Hermite (voir § 1, théorème 1). On voit en même temps que toute distribution $T \in (\mathcal{S}')$ est, pour k assez grand, le $\left(\frac{d}{dx} + 2\pi x\right)^k$ d'une fonction $f \in L^2$ (f n'est pas unique, on peut lui ajouter une combinsison $\sum_0^{k-1} a_m\mathcal{H}_m(x)$), ou encorc d'une fonction f continue bornée.

L'application, qui à $T \in (\mathcal{S}')$ fait correspondre la suite $\{a_m(T)\}$, est un isomorphisme (d'espaces vectoriels topologiques) entre $(\mathcal{S}')$ et l'espace des suites à croissance lente.

Ainsi $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}')$ sont, comme $(\mathcal{D})_{T^n}$ et $(\mathcal{D}')_{T^n}$ (§ 1), isomorphes à des espaces de suites (1); $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{D})_{T^n}$ sont isomorphes, ainsi que $(\mathcal{S}')$

(1) Ces espaces de suites ont été étudiés par M. KÖTHE [1]

et $(\mathcal{D}')_{\Gamma^n}$. A l'aide de la représentation de $\varphi\in(\mathcal{S})$ ou $T\in(\mathcal{S}')$ par leurs développements d'Hermite, le produit scalaire $T\cdot\varphi$ prend une expression très simple, ainsi que la transformation de Fourier, d'après (VII, 7; 27) :

$$\text{(VII, 7; 33)}\quad \begin{cases} T\cdot\varphi = \sum_0^\infty a_m(T)a_m(\varphi) \\ \mathcal{F}\left[\sum_0^\infty a_m\mathcal{H}_m(x)\right] = \sum_0^\infty (-i)^m a_m\mathcal{H}_m(y). \end{cases}$$

Ceci permet d'étendre à $(\mathcal{S})$ et $(\mathcal{S}')$ la transformation de Fourier-Mehler, définie par (¹)

$$\text{(VII, 7; 34)}\quad \mathcal{F}_\omega\left[\sum_0^\infty a_m\mathcal{H}_m(x)\right] = \sum_0^\infty \omega^m a_m\mathcal{H}_m(y),$$

où ω est un nombre complexe de module 1. $\mathcal{F}_\omega$ et $\overline{\mathcal{F}}_\omega = \mathcal{F}_{\overline{\omega}}$ sont 2 isomorphises réciproques entre $(\mathcal{S})_x$ et $(\mathcal{S})_y$, ou $(\mathcal{S}')_x$ et $(\mathcal{S}')_y$.

Pour plusieurs dimensions, on remplacera les $\mathcal{H}_m$ par les fonctions :

$$\text{(VII, 7; 35)}\quad \begin{cases} \mathcal{H}_l(x) = \mathcal{H}_{l_1}(x_1)\mathcal{H}_{l_2}(x_2)\ldots\mathcal{H}_{l_n}(x_n) \\ l = \{l_1, l_2, \ldots, l_n\}, \qquad l_\nu = \text{entiers} \geqslant 0. \end{cases}$$

Exemple 8 *Distances hyperboliques*

Reprenons les distributions de M. Riesz :

$$\text{(VII, 7; 36)}\quad Z_l = \frac{1}{\pi^{\frac{n-2}{2}}\, 2^{l-1}\Gamma\left(\frac{l}{2}\right)\Gamma\left(\frac{l+2-n}{2}\right)}\operatorname{Pf}(s^{l-n}).$$

Rappelons (chapitre II, § 3, exemple 4) que la définition ci-dessus n'est valable que pour les valeurs non singulières de $l-n$, pour lesquelles la partie finie est connue sans ambiguïté. Pour les valeurs singulières de $l-n$, Z_l est définie par un passage à la limite ; c'est une fonction holomorphe entière de la variable complexe l, à valeurs dans $(\mathcal{D}')$. Rappelons d'autre part que le support de Z_l est dans le volume du cône d'ondes $x_n \geqslant 0$, $x_n^2 - x_1^2 - x_2^2 \cdots - x_{n-1}^2 \geqslant 0$. Pour $\mathcal{R}(l) - n > 0$, Z_l est une fonction continue à croissance lente ; en vertu des formules de dérivation (II, 3; 33), $Z_l \in (\mathcal{S}')$ pour toutes les valeurs de l. On pourrait d'ailleurs montrer que Z_l est dans $(\mathcal{B}')$ pour $\mathcal{R}(l) - n \leqslant 0$, et qu'elle décroît d'autant plus vite à l'infini que $\mathcal{R}(l) < 0$ est plus grand en valeur absolue.

(¹) Cette extension m'a été signalée verbalement par M. Wiener

Nous allons obtenir $\mathcal{F}(Z_l)$ en passant par la transformation de Laplace. En effet, si $\varepsilon > 0$, $Z_l \exp(-2\pi\varepsilon x_n) \in (\mathcal{O}'_c)$, et on a la formule suivante pour $\mathcal{R}(l) \geqslant n$:

(VII, 7 ; 37)

$$\begin{cases} \mathcal{F}[Z_l \exp(-2\pi\varepsilon x_n)] = \iint \cdots \int Z_l(x) \exp(-2i\pi x.\, y - 2\pi\varepsilon x_n)\, dx \\ = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^l \left[(\varepsilon + iy_n)^2 + y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{n-1}^2\right]^{-l/2}. \end{cases}$$

Comme $Z_l \exp(-2\pi\varepsilon x_n)$ est une fonction holomorphe [à valeurs dans $(\mathcal{O}'_c)$] de la variable complexe l, il en est de même de son image de Fourier, de sorte que la formule ci-dessus est valable pour toute valeur de l, le 2ᵉ membre étant une fonction $\in (\mathcal{O}_M)$ (car le crochet ne s'annule jamais).

Si maintenant $\varepsilon \to 0$, $Z_l \exp(-2\pi\varepsilon x_n)$ converge vers Z_l dans $(\mathcal{S}')$, de sorte que $\mathcal{F}Z_l$ est définie par limite [dans $(\mathcal{S}')$] du dernier membre de (VII, 7 ; 37). Appelons σ^2 la fonction $y_n^2 - y_1^2 - y_2^2 \ldots - y_{n-1}^2$; $\sigma^2 > 0$ à l'intérieur du cône d'ondes (dans les 2 branches $y_n > 0$ et $y_n < 0$), $\sigma^2 < 0$ à l'extérieur. La fonction σ^2 coïncide avec s^2 dans l'intérieur du cône d'ondes pour $y_n \geqslant 0$, mais σ^2 a pour support tout l'espace tandis que s^2 est nulle en dehors de la branche directe du cône d'ondes.

Soit alors $\mathcal{R}(l) < 0$. On vérifie que le 2ᵉ membre de (VII, 7 ; 37) converge [uniformément sur tout compact et aussi dans $(\mathcal{S}')$] vers la fonction $g(y)$ égale à

(VII, 7 ; 38)

$$\begin{cases} g_1 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^l (-\sigma^2)^{-\frac{l}{2}} & \text{à l'extérieur du cône d'ondes} \quad (-\sigma^2 \geqslant 0) \\ g_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^l (\sigma^2)^{-\frac{l}{2}} \exp\left(-i\pi\frac{l}{2}\right) & \text{à l'intérieur du cône d'ondes} \\ & (\sigma^2 \geqslant 0) \quad \text{pour} \quad y_n \geqslant 0 \\ g_3 = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^l (\sigma^2)^{-\frac{l}{2}} \exp\left(+i\pi\frac{l}{2}\right) & \text{à l'intérieur du cônes d'ondes} \\ & (\sigma^2 \geqslant 0) \quad \text{pour} \quad y_n \leqslant 0. \end{cases}$$

Pour $\mathcal{R}(l) \geqslant 0$, $\mathcal{F}Z_l$ s'obtiendra par prolongement analytique par rapport à l de la fonction ainsi définie ; ce prolongement s'obtient pour les valeurs non exceptionnelles de l en mettant le symbole Pf devant la définition de la fonction g. Pour les valeurs exceptionnelles,

il y aurait lieu de préciser explicitement la signification attachée au symbole Pf g. La définition à prendre tiendra compte de ce que c'est une fonction holomorphe entière de la variable complexe l, ce qui détermine complètement la distribution cherchée. L'absence de singularités ne tient pas, comme pour le cas de Z_l, à la présence d'un coefficient devant Pf, mais au fait que la pseudo-fonction Pf g a des valeurs complexes d'arguments différents, de part et d'autre de la surface du cône d'ondes, ce qui provoque des compensations et la suppression des singularités en l que possèderait isolément chacune des 3 pseudo-fonctions Pf g_1, Pf g_2, Pf g_3.

Pour $l = 2k$ entier pair $\geqslant 0$, on obtient l'image de Fourier de la solution élémentaire de l'équation des ondes itérée

$$\text{(VII, 7 : 39)} \qquad \mathcal{F}(Z_{2k}) = \mathrm{Pf}\left(\frac{-1}{4\pi^2\sigma^2}\right)^k,$$

étant entendu (comme nous tombons justement sur une valeur singulière) que cette expression n'a de sens qu'après définition explicite de Pf. Nous ne donnerons pas ici cette définition explicite. Quoi qu'il en soit,

$$\text{(VII, 7 ; 40)} \qquad (-4\pi^2\sigma^2)^k\,\mathrm{Pf}\left(\frac{-1}{4\pi^2\sigma^2}\right)^k = 1,$$

ce qui correspond bien à la formule (II, 3 ; 34) : $\nabla^k Z_{2k} = \delta$.

Une remarque montrera bien l'imprécision qui s'attache au symbole Pf en l'absence de définition explicite. Pour l réel, $\check{\bar{Z}}_l = \check{Z}_l$ a pour image de Fourier $\mathrm{Pf}\,\bar{g} = \mathrm{Pf}\,\check{g}$, qui s'obtient soit en remplaçant g_2 et g_3 par $\bar{g}_2$ et $\bar{g}_3$, soit en échangeant g_2 et g_3 dans la formule (VII, 7 ; 38). Mais, pour $l = 2k$, on obtient la même expression $\mathrm{Pf}\left(-\frac{1}{4\pi^2\sigma^2}\right)^k$ pour $\mathcal{F}\check{Z}_{2k}$ et $\mathcal{F}Z_{2k}$, alors que $\check{Z}_{2k}$ et Z_{2k} sont différentes (leurs supports sont symétriques par rapport à l'origine). Cela tient à ce que le symbole Pf n'a pas la même définition dans les deux cas. Dans les deux cas, la partie infinie $I(\varepsilon)$ analogue à celle de la formule (II, 2 ; 13) est un polynôme en ε *ayant un terme constant*, qui est dissymétrique par rapport à l'origine et imaginaire ; il en résulte que $\mathrm{Pf}\left(-\frac{1}{4\pi^2\sigma^2}\right)^k$ ainsi définie est une distribution dissymétrique par rapport à l'origine et imaginaire (d'ailleurs Z_{2k} est dissymétrique par rapport à l'origine et n'a pas la symétrie

hermitienne, $\check{Z}_{2k} = \dot{Z}_{2k} \neq Z_{2k}$), alors que la fonction usuelle $\left(-\frac{1}{4\pi^2\sigma^2}\right)^k$ est symétrique par rapport à l'origine et réelle. La solution élémentaire symétrique et hermitienne $\frac{1}{2}\left(\dot{Z}_{2k} + Z_{2k}\right)$ a une image de Fourier qu'on peut encore appeler $\mathrm{Pf}\left(-\frac{1}{4\pi^2\sigma^2}\right)^k$, la définition de la partie finie étant cette fois symétrique et réelle [1].

Exemple 9 *Un calcul par intégrations successives.*

Il arrive fréquemment qu'on puisse calculer l'image de Fourier par des méthodes très classiques, en remplaçant une intégration multiple par des intégrations simples successives.

Par exemple, soit à calculer $\mathcal{F}U$, où U est la pseudo-fonction définie, pour $\mathcal{R}k > 0$, par

$$(\text{VII}, 7 ; 41) \quad U_x = \mathrm{Pf}\left(\frac{1}{2i\pi x_n + 4\pi^2(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2)}\right)^k.$$

Il sera commode de considérer l'espace X^n de la variable $x = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$ comme produit de l'espace à $n-1$ dimensions de la variable $\xi = \{x_1, x_2, \ldots x_{n-1}\}$ par l'espace à 1 dimension de la variable x_n.

La définition explicite du symbole Pf est ici la suivante. La seule singularité est $x = 0$; pour $\mathcal{R}k < (n+1)/2$, U est une fonction, car l'expression du 2e membre est sommable au voisinage de l'origine, et le symbole Pf est inutile. Mais pour $\mathcal{R}k \geqslant (n+1)/2$ c'est bien une pseudo-fonction. Si pour $\varphi(x) \in (\mathcal{S})_x$, nous considérons l'intégrale simple

$$(\text{VII}, 7 : 42) \quad I(\xi, \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)dx_n}{(2i\pi x_n + 4\pi^2|\xi|^2)^k},$$

elle est définie et continue pour $\xi \neq 0$; mais on peut montrer (en utilisant un développement de Taylor de φ au voisinage de 0) que, lorsque $\xi \to 0$, cette quantité tend vers une limite finie, et nous pouvons poser

$$(\text{VII}, 7 : 43) \quad \begin{cases} U_x \cdot \varphi(x) = \int \cdots \int I(\xi, \varphi) d\xi \\ = \int \cdots \int d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)dx_n}{(2i\pi x_n + 4\pi^2|\xi|^2)^k}. \end{cases}$$

La partie finie est ici une intégrale semi-convergente.

[1] Le symbole Pf, pour les distributions invariantes par le groupe de Lorentz, a été explicitement défini dans Methee [1]; avec cette définition, le symbole Pf que nous écrivons ici est incorrect. Le calcul de l'image de Fourier des Z_l a été fait par Methée dans [II], et par Carmen-Lys Braga [1]

Soit alors à calculer $V_y = \mathcal{F}U$. Nous sommes naturellement amenés à poser

(VII, 7 ; 44) $$\begin{cases} I[\xi, \exp(-2i\pi x . y)] \\ = \exp(-2i\pi\xi . \eta) \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-2i\pi x_n y_n)dx_n}{(2i\pi x_n + 4\pi^2|\xi|^2)^k}, \end{cases}$$

puis

(VII, 7 ; 45)
$$\begin{cases} W(y) = \displaystyle\int\cdots\int I[\xi, \exp(-2i\pi x . y)]d\xi \\ = \displaystyle\int\cdots\int \exp(-2i\pi\xi . \eta)\,d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-2i\pi x_n y_n)dx_n}{(2i\pi x_n + 4\pi^2|\xi|^2)^k}, \end{cases}$$

à condition naturellement de vérifier que ces formules ont un sens. L'intégrale simple est semi-convergente (absolument convergente pour $k \geq 2$) pour $y_n \neq 0$, $\xi \neq 0$, et vaut

(VII, 7 ; 46) $$\begin{cases} 0 \quad \text{pour} \quad y_n > 0 \\ \dfrac{|y_n|^{k-1}}{\Gamma(k)} \exp(-4\pi^2|y_n||\xi|^2) \quad \text{pour} \quad y_n < 0. \end{cases}$$

La fonction obtenue, pour $y_n \neq 0$, a une limite finie lorsque $\xi \to 0$, et l'intégrale multiple vaut alors

(VII, 7 ; 47)
$$\begin{cases} 0 \quad \text{pour} \quad y_n > 0 \\ \dfrac{|y_n|^{k-1}}{\Gamma(k)} \displaystyle\int\cdots\int \exp(-2i\pi\xi . \eta) \exp(-4\pi^2|y_n||\xi|^2)d\xi \\ = \dfrac{|y_n|^{k-1}}{\Gamma(k)} \left(\dfrac{1}{2\sqrt{\pi|y_n|}}\right)^{n-1} \exp\left(-\dfrac{|\eta^2|}{4|y_n|}\right) \quad \text{pour} \quad y_n < 0. \end{cases}$$

La quantité $W(y)$ ainsi calculée est alors définie pour $y_n \neq 0$ (donc presque partout) ; elle est localement sommable au voisinage de l'hyperplan $y_n = 0$, et représente ainsi une distribution qui est une fonction.

Il reste à montrer que cette fonction $W(y)$ est bien la transformée de Fourier V.

La démonstration est purement algébrique, nous laissons au lecteur le soin de la faire. On définira V par l'égalité de Parseval (VII, 6 ; 6), qu'on pourra se contenter d'appliquer lorsque u et v sont de la forme $u(x) = u_1(\xi)u_2(x_n)$, $v(y) = v_1(\eta)v_2(y_n)$ (théorème III du chapitre IV) :

(VII, 7 ; 48) $$V_y . \bar{v}_1(\eta)\bar{v}_2(y_n) = U_x . \bar{u}_1(\xi)\bar{u}_2(x_n).$$

Le second membre se calculera en utilisant (VII, 7 ; 43) qui donne la définition de U_x, et on appliquera successivement la formule de Parseval pour les variables x_n, y_n, puis pour les variables ξ, η, avec une interversion convenable de l'ordre des intégrations.

A l'aide de parties finies, on peut étendre au cas où $\mathcal{R}k \leqslant 0$.

§ 8 Propriétés de la transformation de Fourier

Produits tensoriels Théorème XIV *La transformée de Fourier d'un produit tensoriel est le produit tensoriel des transformées de Fourier : si* $V_y = \mathcal{F}U_x$, $V'_{y'} = \mathcal{F}U'_{x'}$,

(VII, 8 ; 1) $$\mathcal{F}(U_x \otimes U'_{x'}) = V_y \otimes V'_{y'}$$

(voir chapitre IV).

La formule est en effet évidente pour U, U', dans $(\mathcal{S})$, elle est donc vraie par prolongement de $(\mathcal{S})$ à $(\mathcal{S}')$ (voir § 6).

Exemple Dans la transformation de Fourier sur les 2 espaces à n dimensions X^n et Y^n, prenons

(VII, 8 ; 2) $$U_{x_1, x_2, \ldots x_n} = (1)_{x_1, x_2, \ldots x_k} \otimes S_{x_{k+1} \ldots x_n}.$$

On aura alors

(VII, 8 ; 3) $$V_{y_1, y_2, \ldots y_n} = \delta_{y_1, y_2, \ldots y_k} \otimes (\mathcal{F}S)_{y_{k+1} \ldots y_n}.$$

La transformée de Fourier d'une distribution indépendante de $x_1, x_2 \ldots x_k$ (chapitre IV, § 5, exemple 1) est l'extension à l'espace Y^n d'une distribution définie sur le sous-espace des $y_{k+1}, \ldots y_n$ (chapitre IV, § 5, exemple 2), et réciproquement.

Multiplication et convolution Théorème XV *Les transformations* $\mathcal{F}$ *et* $\overline{\mathcal{F}}$ *établissent 2 isomorphismes réciproques entre* $(\mathcal{O}_M)$ *et* $(\mathcal{O}'_C)$ *et échangent le produit de multiplication et le produit de convolution :*

(VII, 8 ; 4) $$\begin{cases} S \in (\mathcal{O}_M), \quad U \in (\mathcal{S}') \rightleftarrows \mathcal{F}S \in (\mathcal{O}'_C), \quad \mathcal{F}U \in (\mathcal{S}'). \\ \text{et} \quad \mathcal{F}(SU) = \mathcal{F}S * \mathcal{F}U. \end{cases}$$

(VII, 8 ; 5) $$\begin{cases} T \in (\mathcal{O}'_C), \quad U \in (\mathcal{S}') \rightleftarrows \mathcal{F}T \in (\mathcal{O}_M), \quad \mathcal{F}U \in (\mathcal{S}'). \\ \text{et} \quad \mathcal{F}(T * U) = (\mathcal{F}T)(\mathcal{F}U). \end{cases}$$

Nous voyons ainsi que $(\mathcal{O}_M)$ et $(\mathcal{O}'_C)$ sont isomorphes l'un à l'autre.

La propriété d'échange entre le produit de multiplication et le produit de convolution est classique dans le cas élémentaire où toutes les distributions qui interviennent sont des fonctions $\in(\mathcal{S})$. On a en effet, pour T et U$\in(\mathcal{S})$ ou même $\in(\mathcal{D}'_{L^1})$ [voir formules (VI, 8 ; 3) et (VII, 7 ; 9)] :

$$\text{(VII, 8 ; 6)} \quad \begin{aligned} [\mathcal{F}(\mathrm{T} * \mathrm{U})_x] &= (\mathrm{T} * \mathrm{U})_x \quad \exp(-2i\pi x \cdot y) \\ &= (\mathrm{T}_\xi \otimes \mathrm{U}_\eta).\exp[-2i\pi(\xi+\eta)\cdot y] \\ &= [\mathrm{T}_\xi . \exp(-2i\pi\xi . y)][\mathrm{U}_\eta . \exp(-2i\pi\eta . y)] \\ &= (\mathcal{F}\mathrm{T})_y(\mathcal{F}\mathrm{U})_y. \end{aligned}$$

Comme la même formule est vraie pour $\overline{\mathcal{F}}$ qui est réciproque de $\mathcal{F}$, il y a également transformation du produit de multiplication en produit de convolution dans $(\mathcal{S})$.

Il nous suffit alors de montrer que $\mathcal{F}$ échange $(\mathcal{O}_M)$ et $(\mathcal{O}'_C)$ et transforme une suite convergente dans $(\mathcal{O}_M)$ en une suite convergente dans $(\mathcal{O}'_C)$ et réciproquement, pour être sûrs que $\mathcal{F}$ échange la multiplication et la convolution dans les conditions prévues par l'énoncé, car $(\mathcal{S})$ est dense dans $(\mathcal{O}_M)$, $(\mathcal{O}'_C)$, $(\mathcal{S}')$ [tout élément de $(\mathcal{O}_M)$, de $(\mathcal{O}'_C)$, ou de $(\mathcal{S}')$ est limite d'une suite d'éléments de $(\mathcal{S})$], et les opérations considérées sont toutes continues.

Or cette propriété d'échange est évidente. *a*) Si S$\in(\mathcal{O}_M)$, S est le produit d'un polynôme par une fonction sommable, donc, d'après l'exemple 1 du § 7 (formule (VII, 7 ; 3)), $\mathcal{F}$S est une somme de dérivées d'une fonction bornée, c'est donc une distribution bornée sur R^n. Toute dérivée de S est de la même forme, donc tout produit de $\mathcal{F}$S par un polynôme est borné sur R^n, $\mathcal{F}$S est une distribution à décroissance rapide à l'infini, $\in(\mathcal{O}'_C)$. *b*) Si maintenant T$\in(\mathcal{O}'_C)$, elle est sommable $[\in(\mathcal{D}'_{L^1})]$, donc, d'après l'exemple 4 du § 7, $\mathcal{F}$T est une fonction continue à croissance lente ; le produit de T par un polynôme est aussi sommable, donc $\mathcal{F}$T a toutes ses dérivées continues à croissance lente, $\mathcal{F}$T$\in(\mathcal{O}_M)$. Comme les propriétés utilisées pour cette démonstration sont valables, non seulement pour une distribution, mais pour une suite convergente, $\mathcal{F}$ transforme bien une suite convergente de $(\mathcal{O}_M)$ en une suite convergente de $(\mathcal{O}'_C)$, et réciproquement, c. q. f. d.

Remarquons que la démonstration du théorème n'est pas achevée. Nous avons montré la continuité de l'isomorphisme $\mathcal{F}$ entre $(\mathcal{O}_M)$ et $(\mathcal{O}'_C)$ seulement pour les suites convergentes, ou des filtres à base bornée ou dénombrable, alors qu'en fait il y a continuité pour des

filtres convergents quelconques ; nous ne complèterons pas ici la démonstration, qui est un peu plus compliquée.

Remarque L'échange entre multiplication et convolution a aussi lieu dans d'autres conditions. Ainsi :

Si $S \in (\mathcal{D}'_{L^p})$, $T \in (\mathcal{D}'_{L^q})$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, $1 \leqslant q \leqslant 2$, *la transformée de Fourier de* $S * T$ *est une fonction, qui est le produit des fonctions* $\mathcal{F}S$ *et* $\mathcal{F}T$.

En effet, comme $(\mathcal{D}'_{L^p})$ et $(\mathcal{D}'_{L^q})$ sont dans $(\mathcal{D}'_{L^2})$, il suffit de le montrer pour $p = q = 2$. On peut approcher S et T par des *suites* S_j, T_j, dans $(\mathcal{D}'_{L^2})$, S_j et T_j étant à supports compacts. On a alors $\mathcal{F}(S_j * T_j) = (\mathcal{F}S_j)(\mathcal{F}T_j)$. Mais, d'une part, les $S_j * T_j$ convergent vers $S * T$ dans $(\mathcal{D}'_{L^\infty})$, donc dans $(\mathcal{S}')$, on peut donc affirmer que $\mathcal{F}(S * T)$ est limite dans $(\mathcal{S}')$, donc dans $(\mathcal{D}')$, des $\mathcal{F}(S_j * T_j)$. D'autre part, les $\mathcal{F}S_j$ et les $\mathcal{F}T_j$ sont *localement* dans L^2 (exemple 4 du § 7), et convergent respectivement vers $\mathcal{F}S$, $\mathcal{F}T$, localement dans L^2, de sorte que $(\mathcal{F}S_j)(\mathcal{F}T_j)$ converge vers $(\mathcal{F}S)(\mathcal{F}T)$ localement dans L^1, donc dans $(\mathcal{D}')$. Alors, on a nécessairement $\mathcal{F}(S * T) = (\mathcal{F}S)(\mathcal{F}T)$.

Remarquons que $S * T$ est dans $(\mathcal{B}')$, et sa transformée de Fourier $f(y)$ est une fonction, produit d'un polynôme par une fonction sommable. Réciproquement, si $f(y)$ est une telle fonction, on peut l'écrire $f = gh$, où g et h sont des produits de polynômes par des fonctions de L^2 ; alors $g = \mathcal{F}S$, $h = \mathcal{F}T$, où S et T sont dans $(\mathcal{D}'_{L^2})$, de sorte que, d'après ce qui est dit plus haut, $\mathcal{F}(S * T) = gh = f$. Ainsi :

Pour qu'une mesure à croissance lente (voir théorème VII) *soit une fonction, il faut et il suffit qu'elle soit transformée de Fourier du produit de convolution de 2 distributions* $\in (\mathcal{D}'_{L^2})$.

Exemples 1° Nous avons vu [formule (VII, 5 ; 1)] que la fonction $\exp(i\pi x^2)$ $(n = 1)$ appartient à la fois à $(\mathcal{O}_M)$ et $(\mathcal{O}'_C)$.

Le calcul de sa transformée de Fourier prouve bien qu'elle ne peut appartenir à l'un sans appartenir à l'autre :

$$\text{(VII, 8 ; 7)} \qquad \begin{cases} \mathcal{F}[\exp(i\pi x^2)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(i\pi x^2 - 2i\pi xy)\, dx \\ \qquad = \left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right) \exp(-i\pi y^2). \end{cases}$$

L'intégrale figurant dans cette formule est semi-convergente au sens usuel, pour toute valeur de y. Elle est aussi convergente dans $(\mathcal{S}')_y$ d'après l'exemple 3 du § 7 [$\exp(i\pi x^2)$ est une fontion bornée],

et convergente pour toute valeur de y suivant la formule (VII, 7 ; 9) [$\exp(i\pi x^2) \in (\mathcal{D}'_{L^1})$].

2° Nous avons vu que les fonctions $1/(1+r^2)^m$ ont pour images de Fourier les distributions L_m [formule (VII, 7 ; 23)]. Comme on a évidemment $(1+r^2)^{-m} \in (\mathcal{O}_M)$, $(1+r^2)^{-p}(1+r^2)^{-q} = (1+r^2)^{-(p+q)}$, on en déduit de nouveau $L_m \in (\mathcal{O}'_C)$, et $L_p * L_q = L_{p+q}$ [formule (VI, 8 : 5)].

3° Nous avons vu que $\mathcal{F}(\mathrm{Pf}\, r^m)$ est proportionnel (sauf pour les valeurs exceptionnelles de m) à $\mathrm{Pf}\, r^{-(m+n)}$ (formule (VII, 7 ; 13)). Si

$$\mathcal{R}p < -\frac{n}{2}, \qquad \mathcal{R}q < -\frac{n}{2},$$

$\mathrm{Pf}.\, r^p$ et $\mathrm{Pf}.\, r^q$ appartiennent à $(\mathcal{D}'_{L^2})$, donc on a la formule d'échange multiplication-convolution :

$$\text{(VII, 8 ; 8)} \qquad \mathcal{F}(\mathrm{Pf}.\, r^p * \mathrm{Pf}.\, r^q) = \mathcal{F}(\mathrm{Pf}.\, r^p)\mathcal{F}(\mathrm{Pf}.\, r^q),$$

ce qui redonnerait les formules de convolution classiques (et faciles à démontrer directement) utilisées par M. Frostman et M. Marcel Riesz [1] en théorie des potentiels. Cette formule d'échange reste vraie pour $0 > \mathcal{R}p > -\infty$, $0 > \mathcal{R}q > -\infty$, $\mathcal{R}(p+q) < -n$, bien qu'elle ne rentre pas dans les règles générales énoncées plus haut, et on peut même lui donner un sens dans des cas plus étendus.

4° Les distributions Z_l de M. Marcel Riesz (chapitre II, § 3, exemple 4) sont toutes composables les unes avec les autres $Z_p * Z_q = Z_{p+q}$ (formule VI, 5 ; 19), mais cela tient à l'orientation particulière des supports, et non à la décroissance à l'infini. Aussi les formules de convolution ne se transforment-elles par $\mathcal{F}$ en formules de multiplication que pour des valeurs convenables de p et q (par exemple $\mathcal{R}p < 0$, $\mathcal{R}q < 0$).

Distributions à spectre compact. Théorème de Paley-Wiener [2] *généralisé*

Soit $F(x)$ une fonction sur R^n, prolongeable pour les valeurs complexes des variables, $z = x + i\xi$, x et $\xi \in R^n$, en une fonction analytique entière $F(z)$. On dit que $F(z)$ est de type exponentiel $\leqslant 2\pi C$ si

$$\text{(VII, 8 ; 9)} \quad \limsup_{|z| \to \infty} \frac{\log |F(z)|}{|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|} \leqslant 2\pi C.$$

(1) FROSTMAN [1], p. 29, et M. RIESZ [4]

(2) PALEY-WIENER [1], p. 12. La démonstration n'était donnée que pour des fonctions appartenant à des L^p

On peut alors généraliser comme suit le théorème classique de MM. Paley-Wiener :

THÉORÈME XVI *Pour que la transformée de Fourier* $V_y = \mathcal{F}U_x$ *d'une distribution* $U_x \in (\mathcal{S}')_x$ *ait un support compact, contenu dans le cube* $Q_C : |y_1| \leqslant C ; |y_2| \leqslant C, \ldots |y_n| \leqslant C$, *il faut et il suffit que* U *soit une fonction* $F(x)$ *continue, prolongeable pour les valeurs complexes* $z = x + i\xi$ *en une fonction analytique entière de type exponentiel* $\leqslant 2\pi C$.

1° *Condition nécessaire* Si V_y a son support contenu dans le cube Q_C, elle est somme finie de dérivées de mesures portées par un voisinage arbitraire $Q_{C+\varepsilon}$ de Q_C (théorème XXVI du chapitre III ; on pourrait utiliser le théorème moins élémentaire XXXIV et supposer que les supports des mesures sont contenus dans Q_C lui-même ; ce sera inutile dans la suite).

$$\text{(VII, 8 ; 10)} \qquad V_y = \mathcal{F}U_x = \sum_{|p| \leqslant m} D_y^p(\mu_p)_y.$$

Mais $F_p = \overline{\mathcal{F}}\mu_p = \iint \cdots \int \exp(2i\pi x \cdot y) d\mu_p(y)$ est une fonction continue bornée sur R^n, qui de plus peut être prolongée en une fonction analytique entière de type exponentiel $\leqslant 2\pi(C + \varepsilon)$. Alors U_x est somme de produits de polynômes par les F_p ; donc elle est une fonction analytique entière de type exponentiel $\leqslant 2\pi(C + \varepsilon)$, quel que soit $\varepsilon > 0$, donc aussi de type $\leqslant 2\pi C$, et à croissance lente sur R^n. Son degré de croissance sur R^n est $\leqslant m$, ordre de V.

2° *Condition suffisante*

a) Si $U_x \in (\mathcal{S})_x$, le théorème est connu, nous considérerons sa démonstration comme acquise.

b) Soit $U_x \in (\mathcal{O}_M)_x$. Si $\psi(y) \in (\mathcal{D}_{Q_\varepsilon})_y$ a son support dans le cube Q_ε, $\overline{\mathcal{F}}\psi = \varphi(x)$ appartient à $(\mathcal{S})$ et est analytique entière de type exponentiel $\leqslant 2\pi\varepsilon$, à cause de la nécessité de la condition. Alors $\varphi U \in (\mathcal{S})$ est analytique entière de type exponentiel $\leqslant 2\pi(C + \varepsilon)$. D'après (*a*), sa transformée de Fourier $V_y * \psi$ a son support dans $Q_{C+\varepsilon}$. Ainsi toute régularisée de V par $\psi \in (D_{Q_\varepsilon})$ a son support dans $Q_{C+\varepsilon}$, donc V, limite de ses régularisées, a son support dans Q_C.

c) Supposons enfin $U_x \in (\mathcal{S}')$. Elle est supposée, en tant que distribution $\in (\mathcal{D}')$, égale à une fonction $F(x)$, analytiquement prolongeable en une fonction $F(z)$ entière de type exponentiel $\leqslant 2\pi C$; mais nous ignorons si $F(x)$, qui est tempérée, est une fonction continue à crois-

sance lente au sens usuel. Quelle que soit $\varphi(x) \in (\mathcal{D}_{Q_\eta})_x$, $\mathcal{F}\varphi = \psi(y)$, la régularisée $G = F * \varphi$ est dans $(\mathcal{O}_M)_x$ (théorème IX et suite) ; sa valeur pour z complexe,

(VII, 8 ; 11) $$G(z) = \iint \cdots \int_{Q_\eta} F(z-t)\varphi(t)dt,$$

vérifie, d'après (VII, 8 ; 9)

(VII, 8 ; 12)
$$|G(z)| \leqslant A(\varepsilon)\exp|2\pi(C+\varepsilon)(|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|+n\eta)| \iint \cdots \int |\varphi(t)|dt,$$

quel que soit $\varepsilon > 0$, ce qui montre qu'elle est entière de type exponentiel $\leqslant 2\pi C$.

Alors, d'après (b), G a une transformée de Fourier $V_y\psi(y)$ qui a son support dans le cube Q_C. Comme, d'après (a), ψ est n'importe quelle fonction $\in (\mathcal{S})$, entière de type exponentiel $\leqslant 2\pi\eta$, on peut choisir φ de façon que ψ soit $\neq 0$ en n'importe quel point donné, donc V_y a aussi son support dans Q_C [et $U_x \in (\mathcal{O}_M)_x$].

Remarques 1° Soit $\beta(x)$ une fonction fixe $\in (\mathcal{S})$ telle que $\gamma = \mathcal{F}\beta$ soit égale à 1 sur un voisinage de Q_C. Alors, pour toute fonction $F(x) \in (\mathcal{S}')$ et de type exponentiel $\leqslant 2\pi C$,

(VII, 8 ; 13) $$F * \beta = F,$$

car $$\mathcal{F}(F * \beta) = (\mathcal{F}F)\gamma = \mathcal{F}F.$$

2° Appelons (Exp. C) le sous-espace vectoriel de $(\mathcal{O}_M)$ formé des fonctions analytiques entières de type exponentiel $\leqslant 2\pi C$. Si des $F_j \in$ (Exp. C) convergent dans $(\mathcal{S}')$, elles convergent dans $(\mathcal{O}_M)$ [car les $\mathcal{F}F_j$ convergent dans $(\mathcal{E}')$ donc dans $(\mathcal{O}'_C)$], et il en est de même des translatées $\tau_k F_j$, uniformément lorsque $k = h + ih'$ parcourt un compact *complexe*. La limite F est encore dans (Exp. C), de sorte que (Exp. C) est fermé dans $(\mathcal{S}')$ et dans $(\mathcal{O}_M)$.

De même si des $F_j \in$ (Exp. C) convergent dans $(\mathcal{O}'_C)$, elles convergent dans $(\mathcal{S})$, ainsi que les $\tau_k F_j$, uniformément lorsque k parcourt un compact complexe ; la limite est dans (Exp. C), de sorte que l'intersection (Exp. C) $\cap$ $(\mathcal{S})$ est fermée dans $(\mathcal{O}'_C)$ et dans $(\mathcal{S})$.

3° On peut appeler (Exp. $\mathcal{S}$) et (Exp. $\mathcal{O}_M$) les sous-espaces de $(\mathcal{S})$ et de $(\mathcal{O}_M)$ constitués par les fonctions analytiques entières de type exponentiel (non précisé), et les munir des topologies localement convexes les plus fines, induisant sur les sous-espaces de fonctions de type exponentiel borné, les topologies de $(\mathcal{S})$ ou $(\mathcal{O}_M)$.

Alors $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ sont des isomorphismes réciproques d'espaces vectoriels topologiques entre (Exp. $\mathcal{S}$) et $(\mathcal{D})$, ainsi qu'entre (Exp. $\mathcal{O}_M$) et $(\mathcal{E}')$.

4° On peut faire une étude plus précise sur le rapport entre le spectre de $F \in$ (Exp. $\mathcal{O}_M$) et sa croissance dans les différentes directions. On généralise ainsi des résultats connus pour $F \in L^p$. (¹)

§ 9 Distributions de type positif

Fonctions $\gg 0$ **On dit qu'une fonction continue $f(x)$ sur R^n est de type positif et on écrit $f \gg 0$ (²), si, quels que soient les points $x_1, x_2, \ldots x_l$, de R^n, et les nombres complexes $z_1, z_2, \ldots z_l$, on a**

$$\text{(VII, 9; 1)} \qquad \sum_{j,k} f(x_j - x_k) z_j \bar{z}_k \geqslant 0.$$

En prenant successivement $l = 1$, puis $l = 2$, et en utilisant les propriétés des formes hermitiennes, on voit aussitôt, d'une part, que $\bar{f}(-x) = f(x)$, ce qu'on écrira

$$\text{(VII, 9; 2)} \qquad \bar{f} = \check{f} \quad \text{ou} \quad \tilde{f} = f$$

(f possède la symétrie hermitienne), d'autre part, que

$$\text{(VII, 9; 3)} \qquad f(0) \geqslant 0 \quad \text{et} \quad |f(x)| \leqslant f(0);$$

une fonction $\gg 0$ est bornée sur R^n.

Appelons μ la mesure discrète formée des masses z_j aux points x_j; la formule (VII, 9; 1) s'écrit

$$\text{(VII, 9; 4)} \qquad \iint \ldots \int \iint \ldots \int f(x-\xi)\, d\mu(x)\, d\bar{\mu}(\xi) \geqslant 0.$$

On sait que, dans l'espace des mesures à support compact (considéré comme dual de l'espace des fonctions continues muni de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact), le produit tensoriel $(\mu, \nu) \to \mu_x \otimes \nu_\xi$ est une opération faiblement continue lorsqu'on se borne à considérer des suites convergentes (voir théorème XI du chapitre III et théorème VI du chapitre IV). Comme toute mesure μ à support compact est limite faible d'une suite de mesures discrètes

(¹) Voir Polya-Plancherel [1], Martineau [1]
(²) Voir Bochner [1] p. 74-82, et A. Weil [1] p. 56-60

(expression de l'intégrale d'une fonction continue par des sommes de Riemann), aussi bien que d'une suite de fonctions $\in(\mathcal{D})$ (les régularisées de μ). (VII, 9 ; 4) sera vraie pour toute mesure à support compact, soit si (VII, 9 ; 1) est vraie, soit si on a

$$\text{(VII, 9 ; 5)} \qquad \int\cdots\iint\iint\cdots\int f(x-\xi)\,\varphi(x)\overline{\varphi}(\xi)\,dx\,d\xi \geqslant 0$$

pour toute $\varphi\in(\mathcal{D})$. Il en résulte, en particulier, que (VII, 9 ; 1) et (VII, 9 ; 5) sont équivalentes. En utilisant la notation de la formule (VII, 6 ; 10), on peut écrire la formule ci-dessus

$$\text{(VII, 9 ; 6)} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \iint\cdots\int\iint\cdots\int f(x+\xi)\varphi(x)\tilde{\varphi}(\xi)dx d\xi \geqslant 0 \\ \text{ou} \quad f.(\varphi * \tilde{\varphi}) \geqslant 0. \end{array} \right.$$

Distributions $\gg 0$ Mais alors nous pouvons dire qu'une distribution T est de type positif et écrire $T \gg 0$, si l'on a, quel que soit $\varphi\in(\mathcal{D})$,

$$\text{(VII, 9 ; 7)} \qquad T.(\varphi * \tilde{\varphi}) \geqslant 0.$$

On voit aussitôt que les distributions $\gg 0$ forment un ensemble *fermé* dans $(\mathcal{D}')$ et même faiblement fermé.

On voit que si $T \gg 0$, il en est de même de $\overline{T}$, $\check{T}$, $\tilde{T}$. Si alors dans (VII, 9 ; 7) on remplace T par $\check{T}$, on voit qu'on peut remplacer cette formule par la formule suivante

$$\text{(VII, 9 ; 8)} \qquad \mathrm{Tr}.(T * \varphi * \tilde{\varphi}) \geqslant 0.$$

THÉORÈME XVII *Toute distribution* $T \gg 0$ *possède la symétrie hermitienne*,

$$\text{(VII, 9 ; 9)} \qquad \overline{T} = \check{T} \qquad \textit{ou} \qquad \tilde{T} = T,$$

et c'est une distribution bornée sur R^n, $T\in(\mathcal{B}')$.

En effet, quelle que soit $\alpha\in(\mathcal{D})$, la fonction régularisée $T*\alpha*\tilde{\alpha}$ est une fonction continue $\gg 0$, car elle vérifie (VII, 9 ; 8). Elle est alors hermitienne. Si l'on fait converger α vers δ (mesure de Dirac) dans la topologie de $(\mathcal{E}')$, on en déduit, par passage à la limite, la formule (VII, 9 ; 9) (en appliquant les théorèmes de continuité du produit de convolution, théorème V du chapitre VI).

Remarquons en passant qu'on peut modifier la définition (VII, 9 ; 7) en disant : pour que T soit $\gg 0$, il faut et il suffit que toutes ses bi-régularisées $T*\varphi*\tilde{\varphi}$, $\varphi\in(\mathcal{D})$, soient des fonctions continues $\gg 0$.

D'autre part, d'après (VII, 9 ; 3), toute fonction $T * \alpha * \tilde{\alpha} \gg 0$ est bornée sur R^n. Mais, quelles que soient α et $\beta \in (\mathcal{D})$, on a

(VII, 9 ; 10)

$$4(\alpha * \beta) = (\alpha + \tilde{\beta}) * (\tilde{\alpha} + \beta) - (\alpha - \tilde{\beta}) * (\tilde{\alpha} - \beta) + i(\alpha + i\tilde{\beta}) * (\tilde{\alpha} - i\beta) - i(\alpha - i\tilde{\beta}) * (\tilde{\alpha} + i\beta),$$

de sorte que $T * \alpha * \beta$ est aussi une fonction bornée sur R^n. Alors, d'après le théorème XXV (2°) du chap. VIII (sous sa forme fine), $(T * \alpha) \in (\mathcal{B}')$, donc $T \in (\mathcal{B}')$, c. q. f. d.

Remarquons que si T est, au voisinage de l'origine, une fonction continue, la formule

(VII, 9 ; 11) $$|T * \alpha * \tilde{\alpha}| \leqslant \mathrm{Tr}.(T * \alpha * \tilde{\alpha}) = \dot{T}.(\alpha * \tilde{\alpha})$$

montre, si l'on fait tendre α et $\tilde{\alpha}$ vers δ dans $(\mathcal{E}')$, que T est, dans R^n, une fonction majorée par sa trace (Remarque 2°, page 77 du tome I, $p = \infty$). On peut donc énoncer :

Une distribution $\gg 0$ *qui, au voisinage de l'origine, est une fonction continue, est dans* R^n *une fonction continue* $\gg 0$.

On démontrera de même ceci :

Un ensemble de distributions $\gg 0$, *qui, sur un voisinage* Ω *de l'origine de* R^n, *est borné dans* $(\mathcal{D}'_\Omega)$, *est borné dans* $(\mathcal{B}')$.

Même propriété pour des $T_j \gg 0$ convergeant vers 0.

Distributions $\gg 0$ *et mesures* $\geqslant 0$

Théorème XVIII (Bochner) [1] *Pour qu'une distribution* T *soit* $\gg 0$, *il faut et il suffit qu'elle soit transformée de Fourier d'une mesure* $\mu \geqslant 0$ *à croissance lente.*

1° Soit $T = V_y$ une distribution $\gg 0$. Elle est bornée sur R^n, donc $\in (\mathcal{S}')_y$. Elle est alors l'image $V_y = \mathcal{F} U_x$ d'une distribution $U_x \in (\mathcal{S}')_x$. La formule (VII, 9 : 7), vraie pour $\varphi \in (\mathcal{D})_y$, est aussi vraie, par passage à la limite [$(\mathcal{D})$ étant dense dans $(\mathcal{S})$, d'après le théorème III], pour $\varphi = v(y) \in (\mathcal{S})_y$. Alors, si l'on utilise les formules (VII, 6 ; 10) et le théorème XV, on aura, pour toute $u \in (\mathcal{S})_x$:

(VII, 9 : 12) $$U.u\bar{u} \geqslant 0.$$

Nous allons en déduire que l'on a

(VII, 9 ; 13) $$U(\psi) \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad \psi \geqslant 0, \quad \psi \in (\mathcal{S})_x.$$

(1) Bochner [1] p. 76 (théorème XXIII), A. Weil [1] p. 122. Le théorème classique de Bochner est relatif aux *fonctions* $\gg 0$

$(\mathcal{D})$ étant dense dans $(\mathcal{S})$, il suffit de le montrer pour $\psi \in (\mathcal{D})_x$.

Toute fonction $\psi \geqslant 0$ de $(\mathcal{D})_x$ n'est pas de la forme $u\bar{u}$, car, au moins pour $n > 1$, $\sqrt{\psi}$ n'est pas différentiable au voisinage d'un point où ψ s'annule. Mais ψ est limite dans $(\mathcal{D})$ de fonctions de la forme $u\bar{u}$; si en effet $\alpha \geqslant 0 \in (\mathcal{D})$, et si α est égale à $+1$ au voisinage du support de ψ,

$$\text{(VII, 9 ; 14)} \qquad \psi = \lim_{\varepsilon > 0,\ \varepsilon \to 0} \alpha^2(\psi + \varepsilon),$$

la fonction du 2ᵉ membre étant bien de la forme $u\bar{u}$, avec

$$\text{(VII, 9 ; 15)} \qquad u = \alpha\sqrt{\psi + \varepsilon}, \quad u \in (\mathcal{D}).$$

Alors de (VII, 9 ; 12) on déduit bien (VII, 9 ; 13). Cela prouve que $U \geqslant 0$, donc, d'après le théorème V du chapitre I et le théorème VII du chapitre VII, U est une mesure $\mu \geqslant 0$ à croissance lente.

2° Réciproquement, si $V = \mathcal{F}\mu$, $\mu \geqslant 0$, alors $U = \mu$ vérifie (VII, 9 ; 13) donc à fortiori (VII, 9 ; 12), et par suite V vérifie (VII, 9 ; 7) et est $\gg 0$.

Nous avons montré en même temps que, pour la topologie de $(\mathcal{S})$, les $v * \tilde{v}$, $v \in (\mathcal{D})$, sont denses parmi les $\varphi \gg 0$ de $(\mathcal{S})$; et que, si $T \gg 0$, on a non seulement (VII, 9 ; 7) mais encore

$$\text{(VII, 9 ; 16)} \qquad T(\varphi) \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad \varphi \in (\mathcal{S}),\ \varphi \gg 0.$$

On a ainsi les 2 définitions analogues :

$$\text{(VII, 9 ; 17)} \qquad \begin{cases} T \geqslant 0 & \text{si} \quad T(\varphi) \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad \varphi \geqslant 0,\ \varphi \in (\mathcal{D}) \\ T \gg 0 & \text{si} \quad T(\varphi) \geqslant 0 \quad \text{pour} \quad \varphi \gg 0,\ \varphi \in (\mathcal{D}). \end{cases}$$

La démonstration ci-dessus ne suppose pas connue celle du théorème de Bochner dans le cas classique.

Dans ce cas, la mesure $\mu = \bar{\mathcal{F}}V$ est sommable sur R^n, et réciproquement ; on a

$$\text{(VII, 9 ; 18)} \qquad \mathrm{Tr}\,.(V) = \iint \cdots \int d\mu \geqslant 0.$$

Si μ n'est pas sommable, il y a lieu de considérer que le 2ᵉ membre vaut $+\infty$. Si donc T est une distribution $\gg 0$, qui n'est pas une fonction continue, nous poserons

$$\text{(VII, 9 ; 19)} \qquad \mathrm{Tr}\,.\,T = +\infty.$$

Opérations sur les distributions $\gg 0$

Théorème XIX *Si* $\alpha \in (\mathcal{E}^m)$ *et* $T \in (\mathcal{D}'^m)$ *sont* $\gg 0$, *leur produit* αT *est* $\gg 0$.

La propriété est classique si T est une fonction continue ; car alors α et T sont les images de Fourier de mesures $\geqslant$ sommables sur R^n et

$$\mathcal{F}(\alpha T) = \mathcal{F}\alpha * \mathcal{F}T \tag{VII, 9; 20}$$

est aussi une mesure $\geqslant 0$ sommable sur R^n.

Si $T \in (\mathcal{D}'^m)$, ses régularisées $T_j = T * \beta_j * \tilde{\beta}_j$, $\beta_j \in (\mathcal{D})$, sont continues $\gg 0$, donc aussi les αT_j. Si l'on fait converger les β_j vers δ de façon que les T_j convergent faiblement vers T dans $(\mathcal{D}'^m)$ (théorème XI du chap. VI), alors les αT_j convergent aussi vers αT faiblement dans $(\mathcal{D}'^m)$, et αT est bien $\gg 0$.

Conséquence : Toute distribution $T \gg 0$ *est limite dans* $(\mathcal{S}')$ *de fonctions* $\gg 0$ *appartenant à* $(\mathcal{D})$.

Si en effet, $\alpha \in (\mathcal{D})$ est $\gg 0$, prend la valeur 1 à l'origine, et si $j \to \infty$, les $\alpha_j(x) = \alpha(x/j)$ convergent vers 1 au sens suivant : les $\alpha_j - 1$ convergent uniformément vers 0 sur tout compact en restant bornées sur R^n, tandis que chacune de leurs dérivées converge uniformément vers 0 sur R^n [les α_j convergent vers 1 dans $(\mathcal{B}_c)$, voir page 202]. Alors, si $T \gg 0$, donc $\in (\mathcal{B}')$, les $\alpha_j T \gg 0$ convergent vers T sur tout ouvert d'adhérence compacte, en restant bornées sur R^n. Elles convergent vers T dans $(\mathcal{S}')$ [et dans $(\mathcal{B}'_c)$, voir page 203].

Comme ensuite $\alpha_j T$ est limite de bi-régularisées $\gg 0$ $\in (\mathcal{D})$, le théorème est démontré.

Théorème XX 1° *Si* $S \in (\mathcal{D}'_{L^p})$, $T \in (\mathcal{D}'_{L^q})$, $(1/p) + (1/q) - 1 \geqslant 0$, *et si* S *et* T *sont* $\gg 0$, *alors* $S * T \gg 0$.

2° *Quel que soit* $S \in (\mathcal{D}'_{L^2})$, $S * \tilde{S} \gg 0$ (1) ; *les distributions de cette forme constituent, dans la topologie de* $(\mathcal{S}')$, *un sous-ensemble dense de l'ensemble des distributions* $\gg 0$. *Pour qu'une distribution* $\gg 0$ *soit de la forme* $S * \tilde{S}$, $S \in (\mathcal{D}'_{L^2})$, *il faut et il suffit que sa transformée de Fourier soit une fonction.*

1° Si S et T sont $\gg 0$ à supports compacts, $S * T$ est évidemment $\gg 0$, car

$$\mathcal{F}(S * T) = (\mathcal{F}S)(\mathcal{F}T) \tag{VII, 9; 21}$$

est une fonction $\geqslant 0$.

(1) Si alors T est $\gg 0$ et dans $(\mathcal{D}'_{L^1})$, on a $\mathrm{Tr.}\,(T * S * \tilde{S}) \geqslant 0$. C'est la relation fondamentale utilisée par M. Deny pour généraliser les potentiels, et la notion d'énergie. Voir J. Deny [1]

Si $S \in (\mathcal{D}'_{L^p})$, $T \in (\mathcal{D}'_{L^q})$, $p < +\infty$, $q < +\infty$, on approchera S et T par des $S_j = \alpha_j S$ et $T_j = \alpha_j T \gg 0$ de $(\mathcal{E}')$ (voir conséquence du théorème XIX), qui convergeront vers S et T dans $(\mathcal{D}'_{L^p})$ et $(\mathcal{D}'_{L^q})$. Les $S_j * T_j$ seront $\gg 0$, et convergeront vers $S * T$ dans $(\mathcal{D}'_{L^r})$, $(1/r) = (1/p) + (1/q) - 1$ (théorème XXVI du chapitre VI), alors $S * T \gg 0$. La démonstration exige quelques modifications pour p ou $q = \infty$.

2° Il est évident que $S * \check{S} \gg 0$, en vertu même de la définition (VII, 9; 8), et de ce que

$$\text{(VII, 9; 22)} \qquad \mathrm{Tr}.(S * \check{S} * \varphi * \check{\bar{\varphi}}) = \iint \cdots \int |S * \varphi|^2 dx \geqslant 0.$$

Quant au fait que les $S * \check{S}$ sont denses parmi les $T \gg 0$, il résultera de la conséquence du théorème XIX, et de la densité des $\alpha * \tilde{\alpha}$, $\alpha \in (\mathcal{D})$, dans l'ensemble des $\beta \gg 0$ de $(\mathcal{S})$.

Pour qu'une distribution $T \gg 0$ soit de la forme $S * \check{S}$, $S \in (\mathcal{D}'_{L^2})$, il faut et il suffit, d'après les formules (VII, 6; 10) et le théorème XV pour $(\mathcal{D}'_{L^2})$, que son image de Fourier soit le carré du module du produit d'un polynôme par une fonction $\in L^2$, c'est-à-dire soit une fonction (nécessairement $\geqslant 0$ et à croissance lente d'après le théorème de Bochner).

Structure des distributions $\gg 0$. Toutes les distributions L_l de la formule (II, 3; 20) sont $\gg 0$, puisque leurs transformées de Fourier sont $\geqslant 0$ (formule VII, 7; 23). Donc, si $T \gg 0$, $L_l * T \gg 0$.

On voit ainsi que, quelle que soit $T \gg 0$, *la distribution tempérée* S *qui vérifie* $\left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k S = T$ *est aussi* $\gg 0$ (ici $\mathcal{F}S = (1 + r^2)^{-k} \mathcal{F}T$).

Pour k assez grand, S est une fonction continue bornée (formule VII, 9; 3); et elle devient une fonction continue dans R^n dès qu'elle est une fonction continue au voisinage de l'origine. Soit k un entier, tel qu'il existe une fonction continue g vérifiant, au voisinage de l'origine, $\left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k g = T$. La distribution S correspondant à cette valeur de k est telle que $S - g$ soit, au voisinage de l'origine, solution de l'équation aux dérivées partielles elliptique

$$\left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k (S - g) = 0,$$

donc elle est une fonction analytique (théorème XII du chap. V); S

est alors une fonction continue au voisinage de l'origine, donc sur R^n. On peut donc énoncer :

THÉORÈME XXI. *Toute distribution* $\gg 0$ *est le* $\left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k$ (*k entier assez grand*), *d'une fonction continue* $\gg 0$, *et réciproquement. Si une distribution* $T \gg 0$ *coïncide, sur un voisinage de l'origine, avec le* $\left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k$ *d'une fonction continue, elle est dans* R^n *le* $\left(1-\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k$ *d'une fonction continue* $\gg 0$.

On peut d'autre part étendre une proposition énoncée page 276 de la façon suivante :

THÉORÈME XXII. *Si une distribution* $T \gg 0$ *est, au voisinage de l'origine, une fonction* $2k$ *fois continûment différentiable, elle l'est également dans tout l'espace* R^n.

Soit en effet P un polynome de dérivation homogène de degré $2k$, dont l'image de Fourier $Q = \mathcal{F}P$ soit un polynome $\geqslant 0$. La dérivée $P * T$ est $\gg 0$, puisque son image de Fourier $Q(\mathcal{F}T)$ est $\geqslant 0$; elle est une fonction continue au voisinage de l'origine, donc dans R^n. Comme tout polynome homogène Q de degré $2k$ est combinaison linéaire finie de polynomes $Q_j \geqslant 0$, toutes les dérivées d'ordre $2k$ de T sont des fonctions continues dans R^n, c. q. f. d. Nous ignorons si la propriété subsiste quand on remplace $2k$ par $2k+1$.

Exemples. 1° Les fonctions r^m sont $\geqslant 0$ pour m réel $> -n$. Donc les distributions $\frac{1}{\Gamma\left(-\frac{m}{2}\right)} \mathrm{Pf}\left(\frac{1}{r^{m+n}}\right)$ sont $\gg 0$ (pour $m = 0$, $+2$, $+4$, ... on trouve seulement que les distributions $((-\Delta))^k\delta$ sont $\gg 0$). Si $2k < m < 2(k+1)$, $(-1)^{k+1}\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{r^{m+n}}\right)$ est donc $\gg 0$. Par contre, $\pm \mathrm{Pf}\left(\frac{1}{r^{n+2k}}\right)$ n'est pas $\gg 0$.

2° Considérons maintenant les distributions $U = \mathrm{Pf}\left(\frac{1}{r^{m+n}}\right)$, $m > 0$. Ce ne sont pas des mesures $\geqslant 0$, donc leurs images de Fourier ne sont pas $\gg 0$. D'ailleurs ces images sont proportionnelles à des fonctions r^m, qui sont continues au voisinage de l'origine et ne sont pas bornées dans R^n. Mais soit $2k \leqslant m < 2(k+1)$. Alors, d'après la formule (II, 3 ; 5), le symbole Pf est inutile si φ a toutes

ses dérivées d'ordre $\leqslant 2k$ nulles à l'origine. Donc si u a toutes ses dérivées d'ordre $\leqslant k$ nulles à l'origine, $\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{r^{m+n}}\right)\cdot u\bar{u} \geqslant 0$; et évidemment $\Delta^{k+1}\delta \, . \, u\bar{u} \geqslant 0$.

On peut donc dire que l'image de Fourier $V = \mathcal{F}U$ (formule VII, 7 : 13 et 14) est *conditionnellement* $\gg 0$. Si la fonction $\varphi \in (\mathcal{S})$ a tous ses moments d'ordre $\leqslant k$ nuls, on aura $V.\,(\varphi * \tilde{\varphi}) \geqslant 0$.

Autrement dit, en remplaçant φ par une mesure μ à support compact : si

(VII, 9 ; 23) $\displaystyle\iint\cdots\int x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} \, d\mu(x) = 0$

quels que soient les k_ν entiers $\geqslant 0$ tels que $k_1 + k_2 + \cdots + k_n \leqslant k$, alors

a) si $2k \leqslant m \leqslant 2(k+1)$,

(VII, 9 ; 24) $\displaystyle (-1)^{k+1}\iint\cdots\int |x-\xi|^m \, d\mu(x)\, d\mu(\xi) \geqslant 0$

[pour $m = 2k$, on trouve évidemment $= 0$] ;

b)

(VII, 9 ; 25) $\displaystyle (-1)^k \iint\cdots\int |x-\xi|^{2k} \log \frac{1}{|x-\xi|} \, d\mu(x) d\mu(\xi) \geqslant 0.$

Pour $k = 0$, (*b*) donne une propriété bien connue en théorie du potentiel (1).

§ 10 Applications aux équations aux dérivées partielles et aux équations intégrales (2)

Transformation de Fourier des équations de convolution.

Considérons l'équation

(VII, 10 ; 1) $$A * T = B$$

analogue à (VI, 10 ; 1), A, T, B, étant des distributions sur l'espace à n dimensions X^n.

Pour pouvoir effectuer sur cette équation une transformation de Fourier, nous devrons supposer que B est tempérée et nous borner à rechercher des solutions T tempérées. Mais alors nous pouvons élargir la catégorie d'équations considérée : au lieu d'être nécessai-

(1) Même pour k quelconque, cette propriété n'est sûrement pas nouvelle. M. Marcel Riesz m'a indiqué qu'il la connaissait depuis longtemps mais ne l'avait jamais publiée.

(2) Nous ne donnons ici que quelques applications. Mais toute la théorie moderne des équations aux dérivées partielles utilise la transformation de Fourier des distributions tempérées. Voir par exemple Hormander [3]. Signalons aussi des applications à la physique classique dans Arsac [1] et à la théorie quantique des particules ou des champs dans Schwartz [17], et Wightman [1]

rement à support compact, comme dans (VI, 10 ; 1) A sera dans (VII, 10 ; 1) une distribution à décroissance rapide $[\in(\mathcal{O}'_C)]$; le 1$^{\text{er}}$ membre aura bien alors un sens quelle que soit $T\in(\mathcal{S}')$.

Soient alors $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{B}$, les transformées de Fourier $\mathfrak{A} = \mathcal{F}A$, $\mathfrak{T} = \mathcal{F}T$, $\mathfrak{B} = \mathcal{F}B$; $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{B}$, sont des distributions sur l'espace Y^n. (VII, 10 ; 1) est entièrement équivalente à

$$(\text{VII}, 10 ; 2) \qquad \mathfrak{A}\mathfrak{T} = \mathfrak{B}.$$

Nous avons maintenant une équation multiplicative ; le problème posé est devenu un problème de division (chapitre v, §§ 4 et 5), d'où l'importance du problème de la division. $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{B}$ sont des distributions tempérées $[\in(\mathcal{S}')]$, $\mathfrak{A}$ est une fonction indéfiniment dérivable à croissance lente $[\in(\mathcal{O}_M)]$.

Naturellement, on pourrait aussi considérer un système d'équations de convolution à plusieurs distributions inconnues.

Équations de convolution homogènes

Nous supposerons ici $B = 0$, $\mathfrak{B} = 0$.

1° Si $\mathfrak{A}$ ne s'annule jamais dans Y^n, $\mathfrak{A}\mathfrak{T} = 0$ entraîne $\mathfrak{T} = 0$, et l'équation (VII, 10 ; 1) n'a pas d'autre solution *tempérée* que la solution nulle.

Ainsi l'équation aux dérivées partielles elliptique homogène

$$(\text{VII}, 10 ; 3) \qquad \left(1 - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k T = \left(\delta - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^{*k} * T = 0$$

n'a pas de solution tempérée autre que 0 puisque

$$\mathcal{F}\left(\delta - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^{*k} = (1 + r^2)^k$$

ne s'annule jamais. Remarquons, par contre, que cette équation a une infinité de solutions *non tempérées*, que la simple transformation de Fourier ne saurait permettre d'obtenir, par exemple des solutions exponentielles :

$$(\text{VII}, 10 ; 4) \qquad \begin{cases} T = \exp(2\pi h \cdot x) \\ h = \{h_1, h_2, \dots h_n\}; \qquad |h| = 1. \end{cases}$$

De même, l'équation intégrale homogène

$$(\text{VII}, 10 ; 5) \qquad \exp(-\pi r^2) * T = 0$$

n'a pas de solution tempérée autre que 0 puisque

$$\mathcal{F}[\exp(-\pi r^2)] = \exp(-\pi r^2)$$

ne s'annule jamais.

Cette équation n'a probablement aucune solution non nulle tempérée ou non.

Si, au contraire, la fonction $\mathfrak{A}$ s'annule en au moins un point a de Y^n, alors (VII, 10; 2) admet au moins pour solution la mesure discrète $\delta_{(a)}$, et (VII, 10; 1) a la solution tempérée exponentielle :

$$\text{(VII, 10; 6)} \qquad T = \overline{\mathcal{F}}\delta_{y:(a)} = \exp(2i\pi a \cdot x).$$

2° Si, maintenant, la fonction $\mathfrak{A}$ s'annule sur un ensemble fermé F de Y^n, $\mathfrak{T}$ a nécessairement son support dans F, donc T a son spectre dans F. Cette condition, nullement suffisante pour caractériser T, est souvent assez précise pour les applications.

Par exemple, dans le cas de l'équation de Laplace itérée, dans X^n, ou de l'équation de Cauchy dans X^2

$$\text{(VII, 10; 7)} \qquad \left\{\begin{array}{ll} & \Delta^k T = 0 \\ \text{ou} & \dfrac{\partial T}{\partial \bar{z}} = 0 \quad \text{[formule (II, 3; 23)]}, \end{array}\right.$$

l'équation transformée s'écrit

$$\text{(VII, 10; 8)} \qquad \left\{\begin{array}{l} (-4\pi^2 r^2)^k \mathfrak{T} = 0 \\ \quad \text{ou} \quad i\pi z \mathfrak{T} = 0, \end{array}\right.$$

et comme r^{2k} ou z ne s'annulent qu'à l'origine, $\mathfrak{T}$ est combinaison linéaire finie de dérivées de la mesure de Dirac (Théorème XXXV du chapitre III), donc T est un polynôme ; les seules fonctions poly-harmoniques ou holomorphes qui soient tempérées sont les polynômes poly-harmoniques ou holomorphes (généralisation du théorème classique de Picard-Liouville). La recherche des polynômes poly-harmoniques par résolution de (VII, 10 ; 8) n'est pas plus facile que la recherche directe par résolution de (VII, 10 ; 7). Ici encore remarquons que toutes les fonctions poly-harmoniques ou holomorphes entières qui ne sont pas tempérées échappent à la méthode de Fourier [tandis que l'équation (VII, 10 ; 8) n'admet d'autres solutions que des polynômes de dérivation, non seulement dans $(\mathcal{S}')$ mais dans $(\mathcal{D}')$].

Plus généralement, si l'ensemble fermé F est réduit à un nombre fini de points, T est une somme finie d'exponentielles-polynômes (page 25). On peut généraliser :

Théorème XXIII. — *Toute distribution tempérée* T, *solution d'une famille d'équations de convolution* (VII, 10 ; 1), *est limite dans* $(\mathcal{S}')$ *de*

combinaisons linéaires finies d'exponentielles-polynômes, solutions de la famille d'équations.

Nous ne donnerons pas ici la démonstration [1].

Il est analogue au théorème XXVIII du chapitre VI, mais ici n est quelconque et $A \in (\mathcal{O}'_C)$; par contre, on suppose T tempérée, et l'approximation a lieu dans $(\mathcal{S}')$.

3° Si A est à support compact [équation (VI, 10 ; 1)], $\mathcal{A}$ est une fonction analytique (théorème XVI, Paley-Wiener), et l'ensemble F où elle s'annule est une variété analytique de Y^n. Si cette variété n'a pas de points multiples, les méthodes du chapitre V permettront une résolution complète. Par exemple, pour l'équation aux dérivées partielles elliptique homogène

$$\text{(VII, 10 ; 9)} \qquad \left(1+\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^k T = \left(\delta+\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^{*k} * T = 0,$$

la transformation de Fourier donne

$$\text{(VII, 10 ; 10)} \qquad (1-r^2)^k \mathcal{T} = 0.$$

Alors, d'après la formule (V, 5 ; 2), toute solution tempérée T de (VII, 10 ; 9) est transformée de Fourier d'une couche multiple d'ordre $\leqslant k$ portée par la sphère $r=1$, et réciproquement.

On pourra de même caractériser les solutions tempérées de l'équation hyperbolique des ondes amorties itérée

$$\text{(VII, 10 ; 11)} \qquad \begin{cases} ((\nabla-\lambda))^k T = (\nabla - \lambda\delta)^{*k} * T = 0 \\ \nabla = \dfrac{\partial^2}{\partial x_n^2} - \dfrac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \cdots - \dfrac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2} \end{cases}$$

(pour λ réel $\neq 0$), comme transformées de Fourier de distributions tempérées $\mathcal{T}$, couches multiples d'ordre $\leqslant k$ portées par l'hyperboloïde $4\pi^2(y_n - y_1^2 - \cdots - y_{n-1}^2) + \lambda = 0$.

Pour λ non réel, il n'y a pas de solution tempérée non nulle.

Mais, pour $\lambda = 0$ (qui correspond à l'équation des ondes ordinaire), l'hyperboloïde est remplacé par le cône d'ondes $y_n^2 - y_1^2 - \cdots y_{n-1}^2 = 0$, qui a un point double à l'origine. $\mathcal{T}$ est nécessairement, en dehors de l'origine, une couche multiple d'ordre $\leqslant k$ portée par le cône d'ondes, mais la caractérisation de $\mathcal{T}$ au voisinage de l'origine serait plus délicate.

4° Remarquons que si A est à support compact, une solution $\mathcal{T}$ de

[1] On la trouvera dans SCHWARTZ [15].

(VII, 10 : 2) n'est jamais une fonction, puisque son support est une variété analytique, de sorte que, par exemple, pour l'étude des solutions des équations aux dérivées partielles à coefficients constants, la transformation de Fourier des mesures ou des distributions est inévitable.

Or toute distribution $T \in (\mathcal{D}'_{L^p})$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, en particulier toute distribution à support compact, a pour transformée de Fourier $\mathfrak{T}$ une fonction (chapitre VII § 7, exemple 4). *Ainsi une équation de convolution du type* (VI, 10 : 1) [où $A \in (\mathcal{E}')$] *n'a pas de solution* $\neq 0$ *appartenant à* $(\mathcal{D}'_{L^p})$, $1 \leqslant p \leqslant 2$, *ni à fortiori de solutions à support compact.*

En particulier, si A est un polynôme de dérivation d'ordre m, (VII, 10 : 1) est une équation aux dérivées partielles d'ordre m, à coefficients constants. Si S est une hypersurface compacte m fois continûment différentiable, limitant un volume V, *toute fonction m fois continûment différentiable f, solution usuelle de l'équation, nulle ainsi que ses dérivées d'ordre* $\leqslant m - 1$ *sur* S, *sera nulle dans* V : en effet, la fonction f' égale à f dans V et à 0 dans son complémentaire est alors solution de l'équation, au sens de la théorie des distributions (chapitre v, théorème XI), et elle est à support compact, donc nulle. Ce théorème très simple est indépendant du *type* de l'équation (elliptique, hyperbolique, etc.) puisqu'il est un cas particulier d'une propriété générale des équations de convolution ; il est indépendant de l'existence d'une solution élémentaire. Remarquons que ce résultat n'entraîne nullement que f soit nulle dans le complémentaire de V. Ainsi, toute fonction de la forme $f(x, y) = \alpha(x) + \beta(y)$, dans le plan R^2 où les coordonnées sont x, y, est solution de l'équation $(\partial^2 f/\partial x \partial y) = 0$: si α et β sont nulles ainsi que toutes leurs dérivées dans les intervalles $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$, et > 0 ailleurs, f est nulle dans le carré $|x| \leqslant 1$, $|y| \leqslant 1$, ainsi que toutes ses dérivées, et > 0 partout ailleurs. Nous ignorons dans quelle mesure on peut étendre ces propriétés aux équations aux dérivées partielles à coefficients variables [1].

5° Remarquons que si F est compact, T est une fonction analytique entière de type exponentiel (Théorème XVI, Paley-Wiener).

Ainsi les seules solutions tempérées d'un système elliptique d'équations aux dérivées partielles à coefficients constants sont des fonctions analytiques entières de type exponentiel.

[1] M. de Rham m'a indiqué une démonstration de cette propriété qui est indépendante de la transformation de Fourier, mais qui ne semble pas non plus applicable aux équations à coefficients variables. En tout cas, la propriété ne subsiste sûrement pas sous la forme très générale qui précède, il y a des contre-exemples

On trouvera aussi des équations ou systèmes d'équations hyperboliques ou d'équations intégrales dont toutes les solutions tempérées auront cette propriété.

Naturellement cette analyticité des solutions tempérées n'entraîne aucune conséquence relativement aux solutions non tempérées ; par exemple, pour λ non réel, l'équation *hyperbolique* (VII, 10 ; 11) n'a d'autre solution tempérée que 0, mais ses solutions non tempérées ne sont pas toutes des fonctions analytiques.

Recherche d'une solution élémentaire

Nous supposons maintenant $B = \delta$, $\mathfrak{B} = 1$. Nous avons à résoudre le problème de la division de 1 par $\mathfrak{a}$. Si l'on peut définir une distribution tempérée $\mathcal{E} = \frac{1}{\mathfrak{a}}$ ou $\mathrm{Pf}\,\frac{1}{\mathfrak{a}}$, alors $\mathfrak{a}\mathcal{E} = 1$ d'après la formule (V, 3 ; 10), et $E = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{E}$ sera une solution élémentaire *tempérée*. Donnons quelques exemples.

EXEMPLE 1 *Équations elliptiques*

(VII, 10 ; 12) $$A_k = \left(\delta - \frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^{*k}, \qquad \mathfrak{a}_k = (1 + r^2)^k.$$

On en déduit immédiatement la solution élémentaire

(VII, 10 ; 13)
$$\mathcal{E}_k = (1 + r^2)^{-k}, \qquad E_k = L_{2k} = \frac{2\pi^k}{(k-1)!} r^{k-\frac{n}{2}} K_{\frac{n}{2}-k}(2\pi r)$$

(voir formule VII, 7 ; 23), conformément aux formules déjà vues (II, 3 ; 22).

La solution élémentaire trouvée appartient à $(\mathcal{O}'_C)$, et c'est la seule qui soit tempérée. Remarquons que $\mathcal{E}_k = (\mathcal{E}_1)^k$, $E_k = (E_1)^{*k}$.

Par une homothétie, on en déduit que la solution élémentaire correspondant à

(VII, 10 ; 14) $$A_k = (\Delta - \lambda\delta)^{*k}, \qquad \lambda \text{ réel} > 0,$$

est

(VII, 10 ; 15) $$E_k = \frac{(-1)^k \lambda^{\frac{n}{4}-\frac{k}{2}}}{2^{\frac{n}{2}+k-1}\pi^{\frac{n}{2}}(k-1)!} r^{k-\frac{n}{2}} K_{\frac{n}{2}-k}(\sqrt{\lambda}\, r).$$

Mais cette solution élémentaire est une fonction holomorphe de

la variable complexe λ [à valeurs dans $(\mathcal{D}')$] ayant $\lambda=0$ comme seule singularité (point critique).

D'autre part, $(\Delta-\lambda\delta)^{*k}$ est une fonction holomorphe entière de la variable complexe λ [à valeur dans $(\mathcal{D}')$]. Leur produit de convolution égal à δ donc indépendant de λ pour λ réel >0, est encore δ pour λ complexe. En passant ainsi de λ réel >0 à λ réel <0 par le demi-plan complexe supérieur, on en déduit une solution élémentaire correspondant à

$$\text{(VII, 10; 16)} \qquad A_k=(\Delta+\lambda\delta)^{*k}, \quad \lambda \text{ réel} > 0.$$

La solution élémentaire trouvée n'est pas réelle, on peut la remplacer par sa partie réelle, et on obtient

$$\text{(VII, 10; 17)} \qquad E_k=\frac{(-1)^{k+1}\lambda^{\frac{n}{4}-\frac{k}{2}}}{2^{\frac{n}{2}+k}\pi^{\frac{n}{2}-1}(k-1)!}r^{k-\frac{n}{2}}Y_{\frac{n}{2}-k}(\sqrt{\lambda}r),$$

Y désignant une fonction de Bessel.

On ne peut pas se contenter de faire $\lambda=0$ pour avoir une solution élémentaire de l'opérateur de Laplace itéré Δ^k; un calcul direct sera plus simple.

Il est bon de remarquer que cette méthode de prolongement analytique nous a permis de passer d'un problème à un autre tout différent. En effet, pour $A_k=\left(\delta+\frac{\Delta}{4\pi^2}\right)^{*k}$, on a

$$\mathcal{A}_k=(1-r^2)^k, \quad \mathcal{E}_k=\mathrm{Pf}\frac{1}{(1-r^2)^k}.$$

Comme $1-r^2$ s'annule sur la sphère $r=1$, cette partie finie doit être au préalable définie explicitement, et la transformée de Fourier de la pseudo-fonction $\mathcal{E}_k$ est plus délicate à calculer directement que celle de la fonction $(1+r^2)^{-k}$. Il n'y a là qu'une difficulté d'ordre technique que nous avons évitée par le prolongement analytique en λ; car, au point de vue théorique, on peut prendre pour $\mathcal{E}_k$ n'importe quel résultat de la division de 1 par $(1-r^2)^k$ (théorème VIII du chapitre v), et $\mathcal{E}_k$ est bien tempérée (elle converge vers 0 à l'infini). L'opérateur A_k de (VII, 10; 16) a ainsi une infinité de solutions élémentaires tempérées, alors que celui de (VII, 10; 12) n'en avait qu'une; par ailleurs ici on ne peut pas écrire $\mathcal{E}_k=(\mathcal{E}_1)^k$, $E_k=(E_1)^{*k}$, car ces expressions sont dépourvues de sens.

EXEMPLE 2 *Équations de Laplace itérées*

(VII, 10 ; 18) $\quad A_k = \Delta^k \quad \mathfrak{A}_k = (-4\pi^2 r^2)^k$

(VII, 10 ; 19) $$\mathcal{E}_k = \frac{(-1)^k}{2^{2k}\pi^{2k}} \operatorname{Pf} r^{-2k}$$

et la solution élémentaire E_k se déduira des formules (VII, 7 ; 13 et 14) qui donnent $\bar{\mathcal{F}}(\operatorname{Pf} r^m)$.

Il faut distinguer 2 cas :

a) si n est impair, ou si n est pair mais $2k < n$, alors nous ne sommes pas dans le cas singulier, on pourra utiliser (VII, 7 ; 13) (le symbole Pf étant inutile pour $2k < n$).

(VII, 10 ; 20) $$E_k = \frac{(-1)^k}{2^{2k}\pi^{\frac{n}{2}}} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2} - k\right)}{(k-1)!} r^{2k-n} ;$$

b) si n est pair et $2k \geqslant n$, nous sommes dans un cas singulier et il faut utiliser la formule (VII, 7 ; 14) :

(VII, 10 ; 21)
$$E_k = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{2^{2k-1}\pi^{\frac{n}{2}}(k-1)!\left(k - \frac{n}{2}\right)!} r^{2k-n}\left(\log \frac{1}{r} + h\right).$$

La constante h est sans importance et peut être remplacée par 0, car cela revient à ajouter à la solution élémentaire une solution de l'équation homogène (polynôme polyharmonique) ; autrement dit, c'est seulement la partie la plus facile de la formule (VII, 7 ; 14) qui est nécessaire. Les formules (VII, 10 ; 20 et 21) sont bien en accord avec les formules (II, 3 ; 15 et 17).

Remarquons que, dans ces exemples 1 et 2, les résultats ne dépendent pas seulement des termes de plus haut degré de l'équation elliptique ; cela vient de ce que la solution élémentaire cherchée n'a pas seulement un caractère local, puisqu'elle doit être tempérée.

EXEMPLE 3 *Équation de la chaleur itérée*

(VII, 10 ; 22)
$$A_k = \left[\frac{\partial}{\partial x_n} - \lambda\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2}\right)\right]^{*k}, \quad \lambda \text{ réel} > 0.$$

Il sera commode de considérer l'espace X^n de la variable

$$x = \{x_1, x_2, \ldots x_n\}$$

comme produit de l'espace à $n-1$ dimensions de la variable $\xi = \{x_1, x_2, \ldots x_{n-1}\}$ par l'espace à 1 dimension de la variable x_n. Alors

(VII, 10; 23) $$A_k = \left(\frac{\partial}{\partial x_n} - \lambda\Delta_\xi\right)^{*k},$$

(VII, 10; 24)
$$\alpha_k = (2i\pi y_n + 4\pi^2\lambda|\eta|^2)^k; \qquad \eta = \{y_1, y_2, \ldots y_{n-1}\}.$$

(VII, 10; 25) $$\mathcal{E}_k = \mathrm{Pf}\left(\frac{1}{2i\pi y_n + 4\pi^2\lambda|\eta|^2}\right)^k.$$

Nous appliquerons alors la méthode de l'exemple 9 du § 7. et nous trouverons ainsi, pour $E_k = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{E}$

(VII, 10; 26)
$$E_k(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{pour} \quad x_n \leqslant 0 \\ \dfrac{x_n^{k-1}}{(k-1)!}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{\lambda\pi x_n}}\right)^{n-1} \exp\left(-\dfrac{|\xi|^2}{4\lambda x_n}\right) \quad \text{pour} \quad x_n > 0, \end{cases}$$

ce qui est encore un résultat classique.

Remarquons que nous trouvons

(VII, 10; 27) $$E_k = \frac{x_n^{k-1}}{(k-1)!} E_1,$$

ce qui est évident à priori, car, avec cette définition de E_k pour $k > 1$, la formule usuelle de dérivation d'un produit (V, 2; 3) donne pour $k > 1$

(VII, 10; 28)
$$\left(\frac{\partial}{\partial x_n} - \lambda\Delta_\xi\right)E_k = \frac{x_n^{k-2}}{(k-2)!} E_1 + \frac{x_n^{k-1}}{(k-1)!}\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_n} - \lambda\Delta_\xi\right)E_1\right]$$
$$= E_{k-1} + \frac{x_n^{k-1}}{(k-1)!}\delta = E_{k-1},$$

d'où

(VII, 10; 29) $$\left(\frac{\partial}{\partial x_n} - \lambda\Delta_\xi\right)^k E_k = \left(\frac{\partial}{\partial x_n} - \lambda\Delta_\xi\right) E_1 = \delta.$$

La solution élémentaire E_k dépend de λ, et c'est une fonction

holomorphe de la variable complexe λ pour $\mathcal{R}(\lambda) > 0$, et continue pour $\mathcal{R}(\lambda) \geqslant 0$, à valeurs dans $(\mathcal{D}')$ [lorsque $\mathcal{R}\lambda$ devient < 0, la fonction usuelle définie par la formule (VII, 10 ; 26) n'est plus sommable au voisinage de l'origine et ne représente plus une distribution]. Nous pouvons donc (voir exemple 1) remplacer λ par $\pm i\lambda$ et obtenir une solution élémentaire correspondant à

$$\text{(VII, 10 ; 30)} \quad A_k = \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \pm i\lambda\Delta_\xi\right)^{*k}, \quad \lambda \text{ réel} > 0,$$

qui est

(VII, 10 ; 31)

$$E_k(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{pour} \quad x_n \leqslant 0 \\ \dfrac{x_n^{k-1}}{(k-1)!}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}(1 \pm i)\sqrt{\lambda\pi x_n}}\right)^{n-1} \exp\left(-\dfrac{|\xi|^2}{\pm 4i\lambda x_n}\right) \\ \hfill \text{pour} \quad x_n > 0. \end{cases}$$

Ici encore, comme à l'exemple 1, le prolongement analytique en λ nous fait passer d'un problème à un autre tout différent, et évite des difficultés de nature purement technique.

Exemple 4. *Équations hyperboliques*

$$\text{(VII, 10 ; 32)} \qquad A_k = (\nabla - \lambda\delta)^{*k}; \qquad \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} - \Delta_\xi$$

avec les notations de l'exemple précédent.

$$\text{(VII, 10; 33)} \qquad \mathfrak{a}_k = (-4\pi^2\sigma^2 - \lambda)^k; \qquad \sigma^2 = y_n^2 - |\eta|^2.$$

$$\text{(VII, 10; 34)} \qquad \mathcal{E}_k = \text{Pf}\left(\frac{1}{-4\pi^2\sigma^2 - \lambda}\right)^k.$$

1° Si λ n'est pas réel, $4\pi^2\sigma^2 + \lambda$ ne s'annule jamais dans Y^n, le symbole Pf est inutile, $\mathcal{E}_k$ est manifestement une fonction continue bornée, et $E_k = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{E}_k$ donnera une solution élémentaire, la seule qui soit tempérée. Bien plus, $\mathcal{E}_k$ appartient à $(\mathcal{O}_M)$, donc E_k à $(\mathcal{O}'_C)$.

Cette solution élémentaire, que nous ne calculerons pas ici, a un caractère et des usages entièrement différents de celle qui a été trouvée à la formule (VI, 5 ; 29) :

a) La solution élémentaire de la formule (VI, 5 ; 29) a son support dans le cône d'onde direct $+\Gamma$; elle est la seule à posséder cette propriété, puisque $(\mathcal{D}'_{+\Gamma})$ est une algèbre. Elle peut être utilisée à la résolution des problèmes de Cauchy suivant la formule (VI, 5 ; 26). Elle a une croissance exponentielle à l'infini, donc n'est pas tempérée, et ne saurait être obtenue par transformation de Fourier ;

elle ne permet pas de trouver la solution tempérée d'une équation avec second membre tempéré.

b) La solution élémentaire $\mathcal{F}\mathcal{E}_k$ est symétrique par rapport à l'origine, elle ne peut donc pas servir à résoudre les problèmes de Cauchy suivant la formule (VI, 5 ; 26). Elle est tempérée, et c'est la seule à posséder cette propriété, puisque l'équation homogène n'a pas de solution tempérée ; elle appartient à $(\mathcal{O}'_C)$, donc peut donner la solution tempérée de toute équation à second membre tempéré.

2° Si λ est réel et $\neq 0$, $\mathcal{E}_k$ est singulière sur l'hyperboloïde $4\pi^2\sigma^2 + \lambda = 0$. Il y aurait lieu de définir explicitement la partie finie, mais ici encore on peut prendre pour $\mathcal{E}_k$ n'importe quel résultat de la division de 1 par $(-4\pi^2\sigma^2 - \lambda)^k$. Cette division est possible localement (théorème VIII du chapitre v), on peut montrer aisément qu'elle est possible de façon que $\mathcal{E}_k$ soit tempérée (voir page 297). La formule (VI, 5 ; 30) montre que c'est seulement pour $\lambda < 0$ qu'on peut retrouver ainsi la solution élémentaire appartenant à $(\mathcal{D}'_{+\Gamma})$, qui est dans ce cas tempérée.

3° Si $\lambda = 0$, l'hyperboloïde est remplacé par le cône, $\sigma^2 = 0$. La division par σ^2 ne rentre pas dans le théorème VIII du chapitre v à cause du point double du cône à l'origine, mais, ici, se fait néanmoins aisement. Comme nous l'avons indiqué (§ 7, exemple 8), on peut définir la pseudo-fonction $\mathcal{E}_k$, distribution tempérée, de façon à pouvoir retrouver les Z_{2k} de la formule (II, 3 ; 34).

Remarquons que dans tous les cas la solution élémentaire qui appartient à $(\mathcal{D}'_{+\Gamma})$, après multiplication par $\exp(-kx_n)$, $k > 0$ assez grand, devient tempérée, et peut être obtenue par transformation de Fourier ; cela revient à dire que ces solutions peuvent être obtenues par transformation de Laplace, ce qui est le cas de tous les systèmes hyperboliques.

Ces exemples montrent comment, dans le cas général, on peut être arrêté par les difficultés théoriques du problème de la division. Ils montrent, surtout, l'intérêt qu'il y a à construire des tables permettant de calculer les transformées de Fourier pour des distributions. [1]

Exemple 5 *Équations intégrales*

L'équation intégrale correspondant à

$$\text{(VII, 10; 35)} \qquad \begin{cases} A = \exp(-\pi r^2) \\ \mathcal{A} = \exp(-\pi r^2) \end{cases}$$

n'a pas de solution élémentaire tempérée, car $\exp(+\pi r^2)$ n'est pas

[1] Voir Lavoine [1]

tempérée. Cette équation n'a probablement pas de solution élémentaire, même non tempérée.

Exemple 6

Considérons l'équation intégrale correspondant au cas où A est la masse $+1$ répartie de façon homogène sur la sphère unité de centre O. Si alors T est une fonction f, $A * f$ est une fonction, égale, au point x, à la moyenne de f sur la sphère de centre x et de rayon 1. On a

$$\text{(VII, 10; 36)} \qquad \mathfrak{A} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{(\pi r)^{\frac{n-2}{2}}} J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi r)$$

$$\text{(VII, 10; 37)} \qquad \mathcal{E} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \operatorname{Pf}\left(\frac{(\pi r)^{\frac{n-2}{2}}}{J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi r)}\right).$$

Il y aurait lieu de définir cette partie finie sans ambiguïté, mais cela n'a comme toujours aucune importance, $\mathcal{E}$ est le résultat de n'importe quelle division de 1 par $\mathfrak{A}$, division qui rentre dans le cadre du théorème VIII du chapitre V, car toutes les racines en r de $J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi r)/r^{\frac{n-2}{2}}$ sont simples et $\neq 0$. Mais encore faut-il que $\mathcal{E}$ soit tempérée, ce qui nécessite un examen minutieux à l'infini.

Nous choisirons $\mathcal{E}$ de la façon suivante. Elle sera invariante par rotation autour de O, de sorte que $\mathcal{E}.\varphi(y) = \mathcal{E}.\psi(r)$, où $\psi(r)$ est la moyenne de $\varphi(y)$ sur la sphère $|y| = r$.

Soit L_1 la réunion des intervalles $(r_\nu - \varepsilon, r_\nu + \varepsilon)$, où r_ν parcourt la suite des racines $\neq 0$ de la fonction de Bessel $J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi r)$; soit L_2 le complémentaire de L_1 sur la demi-droite $0 \leqslant r < \infty$.

Nous poserons, pour $\varphi \in (\mathcal{S})$,

$$\text{(VII, 10; 38)} \qquad \mathcal{E}.\varphi = \int_{L_2} \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\left[\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right]^2} (\pi r)^{\frac{n-2}{2}} \frac{r^{n-1}\psi(r)}{J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi r)}\, dr$$

$$+ \sum_\nu \int_{r_\nu-\varepsilon}^{r_\nu+\varepsilon} \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\left[\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right]^2} (\pi r)^{\frac{n-2}{2}} r^{n-1} \left(\frac{r - r_\nu}{J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi r)}\right)\left(\frac{\psi(r) - \psi(r_\nu)}{r - r_\nu}\right) dr.$$

Compte tenu de ce que, pour $r \to \infty$,

$$\text{(VII, 10; 39)} \quad \begin{cases} \text{sur } L_2, & \left|\dfrac{1}{J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi r)}\right| = O(\sqrt{r}) \\ \text{sur } L_1, & \left|\dfrac{r - r_\nu}{J_{\frac{n-2}{2}}(2\pi r)}\right| = O(\sqrt{r})\,; \end{cases}$$

compte tenu, d'autre part, de ce que $\psi(r)$ décroît plus vite pour $r \to \infty$ que toute puissance de $1/r$, ainsi que, sur L_1, $\dfrac{\psi(r)-\psi(r_\nu)}{r-r_\nu}$ [qui est majorée par une dérivée $\psi'(\rho_\nu)$, $r_\nu - \varepsilon \leqslant \rho_\nu \leqslant r_\nu + \varepsilon$], on voit que $\mathcal{E}.\varphi$ est bien défini par une intégrale convergente et détermine $\mathcal{E}$ comme une distribution tempérée.

On voit aussitôt que $\mathcal{E}$ vérifie $\mathcal{A}\mathcal{E} = 1$ ou

$$\mathcal{E}(\mathcal{A}\varphi) = \iint \cdots \int \varphi(y)\,dy = 2\,\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \int_0^\infty \psi(r) r^{n-1}\,dr \quad [\text{car } \mathcal{A}(r_\nu) = 0].$$

Il resterait à calculer $E = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{E}$ pour avoir une solution élémentaire. Le résultat ne nous paraît pas pouvoir se mettre sous une forme simple.

Il n'y a aucune difficulté à trouver par le même procédé une solution élémentaire $\mathcal{E}_k = \mathrm{Pf}\left(\dfrac{1}{\mathcal{A}^k}\right)$ correspondant à $A_k = A^{*k}$ (On ne peut pas écrire $\mathcal{E}_k = \mathcal{E}^k$ ou $E^k = E^{*k}$; ces expressions sont dénuées de sens).

Exemple 7 *Théorème de Fredholm*

Supposons que $\mathcal{A}$ soit un polynôme de dérivation elliptique, d'ordre m, ne contenant que des dérivées d'ordre m :

$$\text{(VII, 10; 40)} \quad \begin{cases} A = \sum\limits_{|p|=m} a_p D^p\,; & a_p = \text{constantes complexes}\,; \\ \sum a_p y^p = 0 & \text{entraîne} \quad y = 0. \end{cases}$$

$$\text{(VII, 10; 41)} \qquad \mathcal{A} = \sum_p a_p (2i\pi y)^p$$

Plus généralement, si l est un nombre complexe quelconque, nous poserons

$$\text{(VII, 10; 42)} \qquad \mathcal{A}_l = \mathrm{Pf}\,[\mathcal{A}^l(y)], \qquad A_l = \overline{\mathcal{F}}\mathcal{A}_l.$$

Cela suppose une définition de l'argument de α dans Y^n (sauf à l'origine); c'est toujours possible si $n \neq 2$, en définissant cet argument sur la sphère unité; pour $n = 2$, si l'argument n'est pas une fonction uniforme [exemple $A = \frac{\partial}{\partial z}$, $\alpha = i\pi z$, formule (II, 3; 23)] on pourra raisonner sur $A * \tilde{A}$ et $\alpha\tilde{\alpha}$ au lieu de A et α.

Le symbole Pf est inutile pour $(\mathcal{R}l)m + n > 0$. Pour $|y| \to 0$, α^l est de l'ordre de $|y|^{m(\mathcal{R}l)}$, et la partie finie se définira, *par un procédé indépendant de* α^l, par la considération de sphères concentriques $|y| = \varepsilon$, $\varepsilon \to 0$, comme dans la formule (II, 3; 4) qui correspondait à $\alpha = r^2$. α_l est une fonction méromorphe de la variable complexe l à valeurs dans $(\mathcal{S}')_y$, les pôles étant les valeurs de l pour lesquelles $lm + n$ est entier $\leqslant 0$ pair; pour ces valeurs singulières, on a une formule d'un type analogue à (II, 3; 7).

Soit H un isomorphisme de Y^n sur lui-même. Lorsque $(\mathcal{R}l)m + n < 0$, $\alpha_l \in (\mathcal{D}'_{L^1})$, A_l est une fonction continue (§ 7, exemple 4), et on a d'après (VII, 6; 10)

$$\text{(VII, 10; 43)} \qquad \overline{\mathcal{F}}(H\alpha_l) = A_l({}^tH(x)).$$

Cette formule est peut-être dénuée de sens pour $(\mathcal{R}l)m + n \geqslant 0$.

Mais, pour $(\mathcal{R}l)m + n > 0$, α_l est une fonction, et alors, d'après (VII, 6; 14):

$$\text{(VII, 10; 44)}\ H\alpha_l(y) = |\text{dét. } H^{-1}|\alpha_l(H^{-1}(y)) = |\text{dét. } H^{-1}|\alpha^l(H^{-1}(y)).$$

Par prolongement analytique, on en déduit, pour toutes les valeurs de l non singulières,

$$\text{(VII, 10; 45)} \qquad H\alpha_l = |\text{dét. } H^{-1}|\,\text{Pf}\,\alpha^l(H^{-1}(y)).$$

On a donc finalement, pour toutes les valeurs de l non singulières telles que $(\mathcal{R}l)m + n < 0$,

$$\text{(VII, 10; 46)} \qquad \overline{\mathcal{F}}\{|\text{dét. } H^{-1}|\,\text{Pf}\,\alpha^l(H^{-1}(y))\} = ({}^tH(x)).$$

Mais (tant que H reste inversible) la distribution

$$|\text{dét. } H^{-1}|\,\text{Pf}\,\alpha^l(H^{-1}(y)) \in (\mathcal{D}'_{L^1})_y$$

dépend analytiquement des coefficients de la matrice H (pour la prolonger aux valeurs complexes des coefficients de H, on remplacera bien entendu $|\text{dét. } H^{-1}|$ par dét. H^{-1} ou — dét. H^{-1} suivant les cas); donc, pour l non singulier et $(\mathcal{R}l)m + n < 0$, $A_l({}^tH(x))$ (en tant que fonction continue, pour la topologie de la convergence uniforme

sur tout compact) dépend analytiquement des coefficients de la matrice inversible H′. *Cela prouve que la fonction continue $A_l(x)$ est analytique sur le complémentaire de l'origine dans* X^n (1).

Par un passage à la limite convenable, on étend la propriété au cas singulier, de sorte que celle-ci est vraie sans restriction pour $(\mathcal{R}l)m + n < 0$.

Mais on a toujours [formule (V, 3 ; 10)]

$$\text{(VII, 10 ; 47)} \qquad \begin{cases} \alpha_l \alpha = \alpha_{l+1} \\ A_l * A = A_{l+1}, \end{cases}$$

ce qui permet de passer de l à $l+1$; de sorte que finalement, *pour toutes les valeurs complexes de* l, A_l *est en dehors de l'origine une fonction analytique* (mais A_l n'est plus toujours une fonction dans X^n, par exemple A_1 est un polynôme de dérivation).

Le théorème de Fredholm (2) correspond au cas particulier $l = -1$:

Le polynôme de dérivation elliptique A *a une solution élémentaire* A_{-1}, *qui est, en dehors de l'origine, une fonction analytique.*

La méthode du théorème XII du chapitre v montre alors que les solutions de l'équation $A * T = B$ sont toutes des fonctions analytiques, là où B est une fonction analytique ; la démonstration est d'ailleurs simplifiée par les formules du produit de convolution, et il est inutile de savoir si A_{-1} est une fonction dans R^n, car (V, 6 ; 33 et 34) s'écrivent

$$\text{(VII, 10 ; 48)} \qquad \begin{cases} \beta T = A_{-1} * (A * \beta T) = A_{-1} * \alpha g \\ \qquad + A_{-1} * (1 - \alpha)(A * \beta T). \end{cases}$$

Cette démonstration peut s'étendre à bien d'autres équations ou systèmes elliptiques à coefficients constants.

Si, par ailleurs, un système elliptique à coefficients constants admet une solution élémentaire, celle-ci est nécessairement, d'après le théorème XII du chapitre v, une fonction analytique là où le second membre δ l'est lui-même, c'est-à-dire en dehors de l'origine.

(1) Soit en effet $x = \{1, 1, \dots 1\}$, et H la matrice dont les éléments de la diagonale sont $t_1, t_2, \dots t_n$, tous $\neq 0$, les autres étant nuls ; alors $A_l(t_1, t_2, \dots t_n)$ est une fonction analytique de $t_1, t_2, \dots t_n$, lorsqu'aucun des t_i n'est nul. Donc A est une fonction analytique en dehors des hyperplans de coordonnées ; par un changement d'axes on en déduit qu'elle est analytique en dehors de l'origine

(2) Fredholm a fait une étude détaillée de la solution élémentaire de ces équations elliptiques, l'exprimant au moyen d'intégrales abéliennes, mais seulement pour $n = 3$: FREDHOLM, [1]. La méthode ci-dessus est très générale et de caractère très élémentaire

Mais le théorème XXIX du chapitre VI démontre l'analyticité des solutions sans faire intervenir la solution élémentaire.

Résolution d'équations avec seconds membres tempérés quelconques
Si on a pu trouver une solution élémentaire E appartenant à $(\mathcal{O}'_c)$, la formule (VI, 10; 9) donnera une solution tempérée $E * B$ de l'équation avec second membre B, toutes les fois que B est tempérée, et ce sera d'ailleurs la seule.

Mais si E n'appartient pas à $(\mathcal{O}'_C)$, cette méthode n'est plus applicable. Il sera alors possible que la transformation de Fourier donne, par la formule (VI, 10; 2), une résolution directe de l'équation avec second membre, sans passer par l'intermédiaire d'une solution élémentaire. Donnons quelques exemples.

Exemple 1 $\quad A = \left(\frac{\Delta}{4\pi^2} + \delta\right)^{*k}$ [formule (VII 10; 16)]. Une solution élémentaire est transformée de Fourier de $\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{1-r^2}\right)^k$; comme $\mathrm{Pf}\left(\frac{1}{1-r^2}\right)^k \notin (\mathcal{O}_M)$, aucune solution élémentaire n'appartient à $(\mathcal{O}'_C)$. Mais la division par $(1-r^2)^k$ est toujours possible dans $(\mathcal{D}')_y$, d'après le théorème VII du chapitre V; le quotient $\mathcal{B}/(1-r^2)^k$ est déterminé d'une manière unique sur le complémentaire de la sphère $r = 1$; si $\mathcal{B}$ est tempérée, c'est-à-dire « à croissance lente à l'infini » (théorème VI), il en est encore de même pour tout quotient $\mathcal{T} = \mathcal{B}/(1-r^2)^k$, puisque $1/(1-r^2)^k$ tend vers 0 pour $r \to \infty$ ainsi que toutes ses dérivées. Par transformation de Fourier, on en déduit une solution T tempérée de l'équation. Ainsi A est « complètement inversible » dans $(\mathcal{S}')$ (page 212). Toutes les distributions A des exemples précédents (sauf l'exemple 5), qui sont inversibles, sont aussi complètement inversibles [bien qu'en général E n'appartienne pas à $(\mathcal{O}'_C)$], comme on le voit par un raisonnement inspiré des précédents et généralisant celui qui prouve l'existence d'une solution élémentaire. Nous ne connaissons pas d'exemple d'une distribution A inversible dans $(\mathcal{S}')$ et non complètement inversible dans $(\mathcal{S}')$.

Exemple 2 $\quad$ Pour l'opérateur $A = (\nabla - \lambda\delta)^{*k}$ (λ réel $\neq 0$) (formule (VII, 10; 32)), on peut introduire un raisonnement nouveau d'une nature très générale.

Nous avons à résoudre *dans* $(\mathcal{S}')$ le problème de division :

(VII, 10; 49) $\qquad (-4\pi^2\rho^2 - \lambda)^k\mathcal{T} = \mathcal{B}.$

A distance finie, cette division est possible d'après le théorème VIII du chapitre v ; mais nous voulons que $\mathcal{T}$ soit tempérée, ce qui exige certaines précautions à l'infini.

Considérons Y^n comme ensemble ouvert de l'espace projectif réel P^n et utilisons les résultats et notations du théorème V.

Soit $\Omega_0 = Y^n$ et soit Ω_l l'ouvert complémentaire dans P^n de l'hyperplan projectif $y_l = 0$. Les $\Omega_\nu (\nu = 0, 1, 2, \ldots n)$ forment un recouvrement ouvert de P^n ; soit $\{\overline{\alpha}_\nu\}$ une partition de l'unité sur P^n subordonnée à ce recouvrement, $\overline{\alpha}_\nu \in (\mathcal{D}_{\Omega_\nu})$ (chapitre I, théorème II).

$\mathcal{B}$, étant tempérée, admet un prolongement $\overline{\mathcal{B}}$, distribution sur P^n. Montrons que pour chaque ν on peut trouver une distribution $\overline{\mathcal{T}}_\nu \in (\mathcal{D}'_{\Omega_\nu})$, dont la restriction $\mathcal{T}_\nu$ à $\omega_\nu = \Omega_\nu \cap Y^n$ vérifie l'égalité (VII, 10 ; 49).

C'est déjà vrai pour $\nu = 0$. Soit $\nu = l \neq 0$. Dans Ω_l on peut prendre comme coordonnées locales $y'_1, y'_2, \ldots y'_n$, avec (¹)

$$\text{(VII, 10; 50)} \quad \begin{cases} y'_1 = \dfrac{y_1}{y_l}, & y'_2 = \dfrac{y_2}{y_l}, \quad \cdots \quad y'_l = \dfrac{1}{y_l}, \quad \cdots \quad y'_n = \dfrac{y_n}{y_l} \\[2ex] y_1 = \dfrac{y'_1}{y'_l}, & y_2 = \dfrac{y'_2}{y'_l}, \quad \cdots \quad y_l = \dfrac{1}{y'_l}, \quad \cdots \quad y_n = \dfrac{y'_n}{y'_l}. \end{cases}$$

On peut alors résoudre dans Ω_l le problème de division :

$$\text{(VII, 10 ; 51)} \quad [-4\pi^2(y'^2_n - y'^2_1 - y'^2_2 \cdots - 1 - \cdots - y'^2_{n-1}) \\ - \lambda y'^2_l]^k \overline{\mathcal{T}}_l = y'^{2k}_l \overline{\mathcal{B}},$$

car $y'^{2k}_l \overline{\mathcal{B}}$ est une distribution connue sur Ω_l, et

$$-4\pi^2(y'^2_n - y'^2_1 - \cdots - 1 - \cdots - y'^2_{n-1}) - \lambda y'^2_l$$

vérifie dans Ω_l les conditions d'application du théorème VIII du chapitre v.

(VII, 10 ; 51) est encore vérifiée dans ω_l, mais y_l^{2k} est indéfiniment dérivable dans ω_l, on peut donc multiplier les 2 membres par y^{2k}, ce qui donne (VII, 10 ; 49) dans ω_l.

Alors, $\overline{\alpha}_\nu$ ayant un support compact dans Ω_ν, $\overline{\alpha}_\nu \overline{\mathcal{T}}_\nu$ est une distribution non seulement sur Ω_ν, mais sur P^n. Sa restriction à Y^n est donc une distribution tempérée sur Y^n, qui vérifie, non seulement dans ω_ν mais dans Y^n,

$$\text{(VII, 10 ; 52)} \quad (-4\pi^2\sigma^2 - \lambda)^k(\alpha_\nu \mathcal{T}_\nu) = \alpha_\nu \mathcal{B}.$$

(¹) On peut toujours prendre comme coordonnées locales sur P^n des fonctions homographiques des coordonnées cartésiennes

La somme $\mathcal{T}=\sum\alpha_\nu\mathcal{T}_\nu$ est donc une distribution tempérée sur Y^n, qui vérifie (VII, 10 ; 49).

Cette méthode est une application de la remarque du chapitre v, § 5, 2°, une résolution de la division par recollement des résolutions locales sur P^n.

Conséquences de la solution du problème de la division

Comme Lojasiewicz et Hörmander ont démontré [1] que dans R^n la division par un *polynôme* est *toujours* possible, on en déduira, à l'aide du raisonnement ci-dessus utilisant l'espace projectif P^n, que :

Pour toute équation aux dérivées partielles à coefficients constants (A = *polynôme de dérivation*), *il existe au moins une solution élémentaire tempérée, et au moins une solution tempérée toutes les fois que le 2° membre est tempéré.*

Le théorème de Fredholm (exemple 7) s'étend alors à toutes les équations aux dérivées partielles elliptiques.

La transformation de Fourier a beaucoup d'autres applications aux équations de convolution, nous n'avons donné ici que quelques exemples typiques.

[1] Voir Hörmander [1], Lojasiewicz [1], Schwartz [16], exposés 21 à 25 inclus

Transformation de Laplace

SOMMAIRE. — Le paragraphe 1 introduit les définitions essentielles, l'ensemble convexe Γ et ses propriétés. Au paragraphe 2, Γ étant un convexe de l'espace Ξ^n, on étudie l'espace $\mathcal{S}'_x(\Gamma)$ des distributions sur X^n, telles que $\exp(-x.\xi)\, T_x$ soit dans $\mathcal{S}'$ pour tout $\xi \in \Gamma$; la proposition 4 en donne une propriété de convolution essentielle. Au paragraphe 3, on définit l'image de Laplace d'une distribution $T \in \mathcal{S}'_x(\Gamma)$; dans le cas le plus important, où Γ est ouvert, la proposition 6 dit que cette image est une fonction holomorphe de la variable complexe p, $p = \xi + i\eta$, $\xi \in \Gamma$, à majoration polynômiale à l'infini. Le cas particulier de la dimension $n = 1$ est indiqué brièvement à la remarque 5, page 308. La transformation de Laplace transforme la convolution en multiplication. Le paragraphe 4 étudie le support d'une distribution, à partir des propriétés de croissance de son image de Laplace. Le corollaire final donne le cas de la dimension $n = 1$.

La transformation de Laplace des fonctions d'une variable a été abondamment étudiée (théorie et applications) par Dœtsch, Widder, etc. Pour plusieurs variables, les travaux sont plus récents : Bochner, Leray, Mackey, Garding, etc. Par ailleurs, il y a lieu de remarquer que c'est spécialement dans la transformation de Laplace que les distributions ont été utilisées par les électriciens avant d'être mathématiquement justifiées (δ, δ', δ'' ... comme les objets dont les images sont 1, p, p^2, ...) Des travaux récents traitent de la transformation de Laplace des distributions [1].

Il nous a paru utile de donner in extenso le formalisme théorique de la transformation de Laplace des distributions. Le lecteur se convaincra aisément qu'il n'y a ici qu'une utilisation immédiate de la technique courante des distributions.

[1] GARNIR [5], e SILVA [2], [3], [4], SCHWARTZ [10] vol. 1, page 74. Des tables d'images de Laplace sont données dans LAVOINE [2]. Le présent chapitre est une simple reproduction de notre article dans *Séminaire math. Univ. Lund, 1952*

§ 1. PRODUITS D'UNE DISTRIBUTION PAR DES EXPONENTIELLES

Soient $X^n = R^n$ un espace vectoriel réel à n dimensions, $\Xi^n = R^n$ son dual, $\Pi^n = \Xi^n + i\,\Xi^n$ l'espace vectoriel à n dimensions complexes canoniquement construit sur Ξ^n (ou espace des formes linéaires à valeurs complexes sur X^n).

Pour $x = (x^1, x^2, \dots x^n) \in X^n$, $p = (p^1, p^2, \dots p^n) \in \Pi^n$ ($p^j = \xi^j + i\eta^j$, $p = \xi + i\eta$, $\xi \in \Xi^n$, $\eta \in \Xi^n$) nous poserons $px = p^1x^1 + \dots + p^nx^n$, produit scalaire (à valeurs complexes).

Soit maintenant $T \in \mathcal{D}'_x$ une distribution sur X^n. L'ensemble des $p \in \Pi^n$ pour lesquels $\exp(-px)\,T$ [1] est une distribution tempérée ($\in \mathcal{S}'_x$) est évidemment un « cylindre » $\Gamma + i\,\Xi^n$ défini par $\xi \in \Gamma$, où Γ est un ensemble convenable de Ξ^n; car, quel que soit $\eta \in \Xi^n$, $\exp(-i\eta x)\,S$ est évidemment tempérée dès que S est tempérée.

(De plus l'application $(\eta, S) \to \exp(-i\eta x)\,S$ de $\Xi^n \times \mathcal{S}'$ dans $\mathcal{S}'$ est continue).

Proposition 1 *L'ensemble* Γ *est convexe*

Soient en effet ξ_1 et $\xi_2 \in \Gamma$. Pour $0 \leq t \leq 1$, posons $\xi = t\xi_1 + (1-t)\xi_2$; la quantité $\exp(-\xi x) = [\exp(-\xi_1 x)]^t\,[\exp(-\xi_2 x)]^{1-t}$ est comprise entre les deux quantités $\exp(-\xi_1 x)$, $\exp(-\xi_2 x)$, donc majorée par leur somme. Si nous posons

$$\text{(VIII, 1; 1)} \qquad \alpha(x;\xi) = \exp(-\xi x)/[\exp(-\xi_1 x) + \exp(-\xi_2 x)]$$

c'est une fonction continue bornée de x, et on voit qu'il en est de même de toutes ses dérivées partielles en x. Autrement dit $a \in \mathcal{B}_x = (\mathcal{D}_{L^\infty})_x$.

Nous avons alors

$$\text{(VIII, 1; 2)} \qquad \exp(-\xi x)\,T = \alpha[\exp(-\xi_1 x)\,T] + \alpha[\exp(-\xi_2 x)\,T].$$

Comme le produit d'une distribution $\in \mathcal{S}'$ et d'une fonction $\in \mathcal{B}$ est dans $\mathcal{S}'$, la proposition est démontrée.

[1] Nous avons appelé x la variable du côté objet, $p = \xi + i\eta$ la variable du côté image. Contrairement au chapitre VII, nous avons appelé $\mathcal{F}$ la transformation de Fourier définie par l'intégrale $g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-ixy)\,dx$ et non $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-2i\pi xy)\,dx$, de façon à avoir pour tranformée de Laplace $\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-px) f(x)\,dx$; alors $\overline{\mathcal{F}}$ est défini par $f(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \exp(+ixy)\,dy$; ceci dans le but de simplifier les écritures

Plus généralement, si $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_l$ sont l points fixes de Γ, ξ un point de leur enveloppe convexe, $p = \xi + i\eta$, la fonction

$$\text{(VIII, 1; 3)} \quad \alpha(x, p) = \exp(-px) \Big/ \left[\sum_{j=1}^{j=l} \exp(-\xi_j x)\right]$$

est dans $\mathcal{B}_x$. En effet elle est bornée; et chacune de ses dérivées partielles en x, combinaison finie (à coefficients bornés si η reste borné) de produits de cette fonction par des fonctions analogues où p est remplacé par $\xi_1, \xi_2 \dots \xi_l$ (donc toutes bornées par 1), est bornée sur X^n pour η borné.

Par ailleurs chacune de ses dérivées partielles en x, ξ, η, est fonction continue de ces 3 variables et majorée par un polynôme en x (pour η borné). Cela exprime que $(\xi, \eta) \to \alpha$ est une fonction indéfiniment différentiable de ξ, η, à valeurs dans $(\mathcal{O}_M)_x$. Si de plus l'enveloppe convexe des l points ξ_j a un intérieur non vide dans Ξ^n, $p \to a$ est une fonction holomorphe de p à valeurs dans $(\mathcal{O}_M)_x$.

Comme on a toujours

$$\text{(VIII, 1; 4)} \quad \exp(-px)\,T = \sum_{j=1}^{j=l} \alpha(x, p)\,[\exp(-\xi_j x)\,T], \text{ on aura :}$$

Proposition 2 *La distribution* $\exp(-px)T \in \mathcal{S}'_x$ *est une fonction indéfiniment différentiable de* ξ, η *(à valeurs dans* $\mathcal{S}'_x$*), tant que* ξ *reste dans l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points* ξ_j $(j = 1, 2 \dots l)$ *de* Γ; *elle est fonction holomorphe de* p *(à valeurs dans* $\mathcal{S}'_x$*) tant que* ξ *reste dans l'intérieur* $\overset{0}{\Gamma}$ *de* Γ.

Remarquons que, si par exemple Γ est constitué de la boule fermée $|\xi| \leq 1$ et si ξ_0 est un point de la sphère $|\xi| = 1$, cette proposition n'affirme la continuité de $\exp(-\xi x)\,T_x$ (dans $\mathcal{S}'_x$) lorsque ξ tend vers ξ_0, que si l'angle de $\xi - \xi_0$ et de l'hyperplan tangent à la sphère reste borné inférieurement par un nombre $\varepsilon > 0$. On peut montrer par un contre-exemple que ce genre de restrictions est nécessaire. Mais si on sait que $\exp(-\xi x)\,T$ est bornée dans $\mathcal{S}'_x$, lorsque x parcourt une partie A de Γ, elle est une fonction continue de $\xi \in A$ à valeurs dans $\mathcal{S}'_x$, car elle est fonction continue de ξ à valeurs dans $\mathcal{D}'_x$, et sur une partie bornée de $\mathcal{S}'_x$ (donc relativement compacte), les topologies de $\mathcal{S}'$ et de $\mathcal{D}'$ sont identiques. Comme

ses dérivées partielles en ξ (dans $\mathcal{D}'_x$) sont ses produits par des polynômes en x, donc dans $\mathcal{S}'_x$ et bornées dans $\mathcal{S}'_x$, c'est une fonction indéfiniment différentiable de $\xi \in A$ à valeurs dans $\mathcal{S}'_x$.

Proposition 3 *Si* ξ *varie dans un compact* K *de* $\overset{0}{\Gamma}$, *il existe un nombre* $\varepsilon > 0$ *tel que* $\exp[\varepsilon\sqrt{1+|x|^2} - px]\, T_x$ *reste borné dans* $\mathcal{S}'_x$ *pour* $\xi \in K$, *tant que* η *reste borné, et c'est une fonction holomorphe de* p *à valeurs dans* $\mathcal{S}'_x$.

En effet, pour ε assez petit, l'ensemble des $\xi + b$, $\xi \in K$, $|b| \leq \varepsilon$ reste dans l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points ξ_j $(j = 1, 2, \ldots l)$ de Γ.

Soit alors

$$\text{(VIII, 1; 5)} \quad \beta(x; p) = \exp(\varepsilon\sqrt{1+|x|^2})\, \alpha(x; p).$$

On a

$$|\beta(x; p)| \leq \exp(\varepsilon)\exp(\varepsilon|x|)\, \alpha(x; p)$$
$$\leq \exp(\varepsilon) \operatorname*{Max}_{|b| \leq \varepsilon} \exp(-bx)\, \alpha(x; p) \leq \operatorname*{Max}_{|b| \leq \varepsilon} \exp(\varepsilon)\, \alpha(x; p + b)$$

qui est majorée, d'après l'hypothèse, quand η reste borné.

Chaque dérivée partielle en x de $\beta(x; p)$ reste bornée dans les mêmes conditions, car elle est combinaison linéaire finie de produits de dérivées de α, majorées comme α elle-même, par des dérivées de $\exp(\varepsilon\sqrt{1+|x|^2})$, bornées comme cette fonction elle-même.

Donc pour tout p, tel que $\xi \in K$, $\beta(x; p)$ est dans $\mathcal{B}_x$, donc dans $(\mathcal{O}_M)_x$; et elle est fonction holomorphe de p à valeurs dans $(\mathcal{O}_M)_x$.

On a alors

$$\text{(VIII, 1; 6)} \quad \exp[\varepsilon\sqrt{1+|x|^2} - px]\, T = \sum_{j=1}^{j=l} \beta(x; p)\, [\exp(-\xi_j x)\, T]$$

donc cette distribution est bornée dans $\mathcal{S}'_x$ pour η borné, et fonction holomorphe de p à valeurs dans $\mathcal{S}'_x$. C.Q.F.D.

Corollaire *Pour* $\xi \in \overset{0}{\Gamma}$, $\exp(-px)\, T$ *est dans* $(\mathcal{O}'_c)_x$, *c'est une fonction holomorphe de* p *à valeurs dans* $(\mathcal{O}'_c)_x$.

En effet, elle est le produit de $\exp[\varepsilon\sqrt{1+|x|^2} - px]\, T$, fonction holomorphe de p à valeurs dans $\mathcal{S}'_x$, par $\exp[-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2}] \in \mathcal{S}$.

On voit qu'on pourrait dans l'énoncé de la prop. 3, remplacer $\mathcal{S}$ par $(\mathcal{O}'_c)$.

Remarque. On pourrait remplacer $\mathcal{S}'_x$ par d'autres espaces faisant intervenir des hypothèses plus restrictives de régularité locale; alors la prop. 3 s'étendrait sans difficulté.

Par exemple si T est une fonction f et si lorsque ξ est dans un convexe Γ, $\exp(-\xi x) f$ est dans $L^k(X^n)$, alors, lorsque ξ est dans $\overset{\circ}{\Gamma}$, $\exp(-px) f$ est le produit d'une fonction de L^k par une fonction à décroissance rapide ($\exp(-\varepsilon\sqrt{1+|x|^2})$, ε convenable). Si pour $\xi \in \Gamma$, $\exp(-\xi x) f$ est dans $(\mathcal{O}_M)$, alors, pour $\xi \in \overset{\circ}{\Gamma}$, $\exp(-px) f$ est dans $\mathcal{S}$. Naturellement à $T \in \mathcal{D}'_x$ et à tout espace de distributions tel que $\mathcal{S}'$, L^k, $\mathcal{O}_M$, etc. ... est associé un convexe Γ, qui varie avec cet espace (1).

§ 2. L'espace de distributions $\mathcal{S}'_x(\Gamma)$ associé a un ensemble convexe non vide Γ de Ξ^n

Nous appellerons $\mathcal{S}'_x(\Gamma)$ l'ensemble des distributions $T \in \mathcal{D}'_x$ telles que $\exp(-\xi x)$ T soit dans $\mathcal{S}'_x$, pour tout $\xi \in \Gamma$. L'espace $\mathcal{S}'_x$ usuel correspond à $\Gamma = \{0\}$.

$\mathcal{S}'_x(\Gamma)$ sera muni de la topologie suivante : des $T_j \in \mathcal{S}'_x(\Gamma)$ convergeront vers 0 si, pour tout $\xi \in \Gamma$, les $\exp(-\xi x) T_j$ convergent vers 0 dans $\mathcal{S}'_x$ (auquel cas les $\exp(-px) T_j$ convergent vers 0 dans $\mathcal{S}'_x$, uniformément pour η borné et lorsque ξ parcourt l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de Γ, d'après la prop. 2); c'est la topologie la moins fine pour laquelle les applications linéaires $T \to \exp(-\xi x) T$ de $\mathcal{S}'_x(\Gamma)$ dans $\mathcal{S}'_x$ soient continues. L'espace $\mathcal{S}'_x(\Gamma)$ est localement convexe, séparé, complet. On introduira de même l'espace $(\mathcal{O}'_c)_x(\Gamma)$ (ou d'autres espaces analogues si l'on a en vue des applications déterminées). On a

$$(\mathcal{O}'_c)_x(\Gamma) \subset \mathcal{S}'_x(\Gamma) \subset (\mathcal{O}'_c)_x(\overset{\circ}{\Gamma})$$

et les espaces $\mathcal{S}'_x(\Gamma)$, $(\mathcal{O}'_c)_x(\Gamma)$ sont identiques (vectoriellement et topologiquement) si Γ est ouvert.

Proposition 4 Pour $S \in \mathcal{S}'_x(\Gamma)$, $T \in (\mathcal{O}'_c)_x(\Gamma)$, le produit de convolution $S * T$ est défini et appartient à $\mathcal{S}'_x(\Gamma)$; l'application

(1) Γ ne peut pas être n'importe quel convexe. Voir Authier [1]

bilinéaire $(S, T) \to S * T$ *de* $\mathcal{S}'_x(\Gamma) \times (\mathcal{O}'_c)_x(\Gamma)$ *dans* $\mathcal{S}'_x(\Gamma)$ *est hypocontinue.*

Nous définirons S * T par la formule

$$\text{(VIII, 2; 1)} \quad \exp(-px)(S*T) = [\exp(-px)S]*[\exp(-px)T]$$
pour $\xi \in \Gamma$, ou

$$\text{(VIII, 2; 2)} \quad S*T = \exp(px)[(\exp(-px)S)*(\exp(-px)T)].$$

Pour p choisi une fois pour toutes ($\xi = \mathcal{R}p \in \Gamma$), la formule (VIII, 2; 2) définit explicitement S * T; cette définition sera valable et la proposition 4 aussitôt démontrée si le résultat est indépendant de p.

Soit alors α_j une suite de fonctions $\in \mathcal{D}_x$, telle que les $1 - \alpha_j$ convergent vers 0 uniformément sur tout compact en restant bornées sur X^n, chacune de leurs dérivées ayant la même propriété.

Alors les $S_j = \alpha_j S$, $T_j = \alpha_j T$ convergent vers S, T, respectivement dans $\mathcal{S}'_x(\Gamma)$, $(\mathcal{O}'_c)_x(\Gamma)$ (ce qui prouve que $\mathcal{E}'_x$, et même $\mathcal{D}_x$ par régularisation, est dense dans ces espaces). On a, quel que soit p, la formule (VIII, 2; 2′), identique à (VIII, 2; 2), mais où S et T sont remplacées par S_j et T_j. Mais les $\exp(-px)S_j = \alpha_j[\exp(-px)S]$ convergent vers $\exp(-px)S$ dans $(\mathcal{O}'_c)_x$, si $\xi \in \Gamma$. De même les $\exp(-px)T_j$ convergent vers $\exp(-px)T$ dans $\mathcal{S}'_x$.

Le 2ᵉ membre de (VIII, 2; 2′) converge dans $\mathcal{D}'_x$ vers le 2ᵉ membre de (VIII, 2; 2). Cela prouve que $S_j * T_j$ a pour limite (dans $\mathcal{D}'_x$) ce 2ᵉ membre, et comme $S_j * T_j$ est indépendant de p, le 2ᵉ membre de (VIII, 2; 2) est indépendant de p, pour $\xi \in \Gamma$, C. Q. F. D.

Cette démonstration, qui montre de plus que le produit de convolution ainsi défini S * T, est limite dans $\mathcal{D}'_x$ des $S_j * T_j$, montre que, si S * T est défini pour une autre raison par un autre procédé, le résultat trouvé est le même.

Corollaire. Si Γ *est ouvert,* $\mathcal{S}'_x(\Gamma)$ *est une algèbre commutative pour le produit de convolution, et celui-ci est une application bilinéaire continue de* $\mathcal{S}'_x(\Gamma) \times \mathcal{S}'_x(\Gamma)$ *dans* $\mathcal{S}'_x(\Gamma)$.

Cela résulte de ce que $\mathcal{S}'_x(\Gamma) = (\mathcal{O}'_c)_x(\Gamma)$, de ce que $(\mathcal{O}'_c)$ est une algèbre pour la convolution et de ce que celle-ci est une opération hypocontinue [1].

[1] Voir proposition 4, et Dieudonné-Schwartz [1], page 96, théorème 9

§ 3. Transformation de Laplace sur $\mathcal{S}'_x(\Gamma)$

Soit Γ un ensemble convexe non vide de Ξ^n. Pour ξ fixé dans Γ cherchons la transformée de Fourier de $\exp(-\xi x)\,T_x$, considérée comme distribution en x; nous écrirons cette transformée de Fourier comme une distribution en η, appartenant à $\mathcal{S}'_\eta$ $(\eta \in \Xi^n)$, dépendant du paramètre $\xi \in \Gamma$, soit

$$\text{(VIII, 3; 1)} \qquad (E(\xi)]_\eta = [\mathcal{F}_{(x)}(\exp(-\xi x)\,T_x)]_\eta$$

(qui est la fonction $\int_{X^n} \exp[-(\xi + i\eta)x]\,T_x\,dx$ si cette intégrale a un sens, c'est-à-dire si $\exp(-(\xi + i\eta)x)\,T_x$ est dans $(\mathcal{D}'_{L^1})_x$).

Proposition 5 *$\xi \to (E(\xi))_\eta$ est une application de Γ dans $\mathcal{S}'_\eta$, indéfiniment différentiable lorsque ξ parcourt l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de Γ. Si* d *est une dérivation suivant un vecteur de Ξ^n appartenant à la variété linéaire V engendrée par Γ, on a*

$$\text{(VIII, 3; 2)} \qquad (d_\xi + i d_\eta)\,(E(\xi))_\eta = 0$$

aux points ξ qui sont intérieurs à Γ dans V (²).

Réciproquement si $\xi \to (E(\xi))_\eta$ est une application de Γ dans $\mathcal{S}'_\eta$ ayant les propriétés précédentes, il existe une distribution $T \in \mathcal{S}'_x(\Gamma)$ et une seule, telle que $(E(\xi))_\eta = [\mathcal{F}_{(x)}(\exp(-\xi x)\,T_x)]_\eta$.

Soit en effet $(T(\xi))_x = [\mathcal{F}_\eta(E(\xi))_\eta]_x$. Il est équivalent d'écrire (VIII, 3; 2) ou

$$\text{(VIII, 3; 3)} \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a^\nu \frac{\partial}{\partial \xi^\nu}(T(\xi))_x + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a^\nu x^\nu (T(\xi))_x = 0$$

pour tout vecteur $a = (a^1, a^2, \dots a^n) \in V$ (avec $\xi = (\xi^1, \xi^2 \dots \xi^n)$, $x = (x^1, x^2, \dots x^n)$), lorsque ξ parcourt l'intérieur de Γ dans V. Ceci est encore équivalent à

$$\text{(VIII, 3; 4)} \qquad \sum_{\nu=1}^{\nu=n} a^\nu \frac{\partial}{\partial \xi^\nu}\Big[\exp(\xi x)\,(T(\xi))_x\Big] = 0$$

(le crochet étant considéré comme fonction de ξ à valeurs dans $\mathcal{D}'_x$).

(¹) d_ξ est la dérivation d appliquée à $(E(\xi))_\eta$, fonction de ξ à valeurs dans $\mathcal{S}'_\eta$; d_η est, pour ξ fixé, la dérivation d appliquée à $(E(\xi))_\eta$, distribution $\in \mathcal{S}'_\eta$

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que $\exp(\xi x)(T(\xi))_x \in \mathcal{D}'_x$ soit indépendante de ξ quand ξ parcourt l'intérieur de Γ dans V, donc par continuité quand ξ parcourt Γ; donc il faut et il suffit qu'il existe une distribution $T \in \mathcal{D}'_x$ telle que

$$\text{(VIII, 3; 5)} \quad (T(\xi))_x = \exp(-\xi x)\, T_x \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Remarquons que, pour que T_x converge vers 0 dans $\mathcal{S}'_x(\Gamma)$, il faut et il suffit que $(E(\xi))_\eta$ converge vers 0 dans $\mathcal{S}'_x$, pour tout $\xi \in \Gamma$, auquel cas la convergence est uniforme dans l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points de Γ.

Définition Cette application $\xi \rightarrow (E(\xi))_\eta$ de Γ dans $\mathcal{S}'_x$ s'appelle la transformée de Laplace de $T \in \mathcal{S}'_x(\Gamma)$, et se note $(\mathfrak{L}\, T(\xi))_\eta$ ou simplement $\mathfrak{L}T$.

Proposition 6 *Si* Γ *est ouvert, la transformée de Laplace de* $T \in \mathcal{S}'_x(\Gamma)$ *est une application indéfiniment différentiable de* Γ *dans* $(\mathcal{O}_M)_\eta$, *et de plus*

$$\text{(VIII, 3; 6)} \quad (E(\xi))_\eta = E(\xi, \eta) = F(\xi + i\eta) = F(p),$$

où F est une fonction holomorphe de p *dans* $\Gamma + i\,\Xi^n$, *qu'on appellera encore la transformée de Laplace de T.*

Réciproquement, toute fonction holomorphe F (p) *sur* $\Gamma + i\,\Xi^n$, *telle que, pour tout compact K de* Γ, *F soit majorée sur* $K + i\,\Xi^n$ *par un polynôme en* η, *est transformée de Laplace d'une distribution* $T \in \mathcal{S}'_x(\Gamma)$ *unique.*

1) *La condition est nécessaire*

On pourrait le déduire de la prop. 5, mais c'est évident directement. Le fait que $\mathcal{S}'_\eta$ puisse être remplacé par $(\mathcal{O}_M)_\eta$ résulte du corollaire de la proposition 3; de même, puisque $\exp(-px)\, T_x$ est une fonction holomorphe de p à valeurs dans $(\mathcal{O}'_c)_x$, F (p) qui ici est exactement l'intégrale

$$\text{(VIII, 3; 6)} \qquad F(p) = \int_{X^n} [\exp(-px\, T_x]\, dx,$$

est une fonction holomorphe de p.

2) *La condition est suffisante*

Si, sur $K + i\Xi^n$, F est majorée par un polynôme, la majoration classique par l'intégrale de Cauchy montre que toute dérivée partielle en ξ ou η de F est majorée aussi par un polynôme (de degré

fixe) en η; alors $\xi \to F(\xi + i\eta)$ est une application indéfiniment différentiable de Γ dans $(\mathcal{O}_M)_\eta$ donc dans $\mathcal{G}'_\eta$; comme de plus F est holomorphe, elle vérifie les conditions de Cauchy $(d_\xi + id_\eta)$ $F(\xi + i\eta) = 0$ $\left(d\right.$, dérivation suivant un vecteur arbitraire; si $d = \dfrac{\partial}{\partial \xi^\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots n)$, $\left. d_\xi + id_\eta = \dfrac{\partial}{\partial \xi^\nu} + i \dfrac{\partial}{\partial \eta^\nu}\right)$, d'où la conclusion en vertu de la proposition 5.

Remarques diverses

1) Pour que des T_j convergent vers 0 dans $\mathcal{G}'_x(\Gamma)$, il suffit (et il faut s'il s'agit d'une suite, ou d'un filtre à base bornée ou dénombrable) que les $F_j(\xi + i\eta)$ convergent vers 0 uniformément sur tout compact de $\Gamma + i\Xi^n$ et que, pour tout compact K de Γ, elles restent majorées par un polynôme fixe en η sur $K + i\Xi^n$.

2) Tout polynôme en η est majoré par un polynôme en p lorsque ξ reste borné (car il est majoré par une puissance de $A + \sum_{\nu=1}^{\nu=n} (\eta^\nu)^2$, donc de $B - \sum_{\nu=1}^{\nu=n} (p^\nu)^2$) donc, pour tout compact K de Γ, F (p) est sur $K + i\Xi^n$ le produit d'un polynôme en p par une fonction G (p) holomorphe et bornée.

3) Si $(E(\xi))_\eta \in (\mathcal{D}'_{L^p})_\eta$ (resp. $(\mathcal{O}'_c)_\eta$) pour tout $\xi \in \Gamma$, alors $(E(\xi))_\eta \in (\mathcal{D}_{L^p})_\eta$ (resp. $\mathcal{G}_\eta$) pour tout $\xi \in \overset{0}{\Gamma}$ et c'est une application indéfiniment différentiable de $\overset{0}{\Gamma}$ dans $(\mathcal{D}_{L^p})_\eta$ (resp. $\mathcal{G}_\eta$).

En reprenant en effet les méthodes utilisées dans la démonstration de la proposition 3, on a

$$(E(\xi))_\eta = \sum_j [\mathcal{F}_{(x)} \exp(-\varepsilon\sqrt{1 + |x|^2})] * \mathcal{F}_{(x)} \beta * (E(\xi_j))_\eta.$$

Or si $(E(\xi_j))_\eta \in (\mathcal{D}'_{L^p})_\eta$, $\mathcal{F}\beta \in (\mathcal{O}'_c)_\eta$, $\mathcal{F} \exp(-\varepsilon\sqrt{1 + |x|^2}) \in \mathcal{G}_\eta$, donc $(E(\xi))_\eta \in (\mathcal{D}_{L^p})_\eta$. C. Q. F. D.

4) Nous avons, en passant, montré ce qui suit :

Soit U_x une distribution tempérée ; pour que $\exp(k\sqrt{1 + |x|^2})\, U_x$ *soit une distribution bornée dès que* $k < R$, *il faut et il suffit que*

$V(y) = \mathcal{F}U$ soit une fonction analytique de y, *prolongeable en une fonction holomorphe de* $z = y + iy'$ *pour* $|y'| < R$, *majorée par un polynôme* (*en* y ou *en* z) *pour* $|y'| \leq R - \varepsilon$.

5) Dans le cas d'une dimension ($n = 1$), Γ est un intervalle (a, b) que nous supposerons ouvert. Alors si

$$T \in \mathcal{S}'_x(a, b), \mathfrak{L}T = F(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-px)\, T_x dx$$

est une fonction holomorphe de $p = \xi + i\eta$ pour $a < \xi < b$; pour $a + \varepsilon \leq \xi \leq b - \varepsilon$, elle est le produit d'un polynôme en p par une fonction $G(p)$ holomorphe et bornée; et réciproquement.

Proposition 7. Si Γ est un convexe non vide de Ξ^n, $S \in \mathcal{S}'_x(\Gamma)$, $T \in (\mathcal{O}'_c)_x(\Gamma)$, alors $\mathfrak{L}(S * T)$ est le produit de $\mathfrak{L}S$ et de $\mathfrak{L}T$, produit effectué pour tout $\xi \in \Gamma$ entre une distribution de $\mathcal{S}'_\eta$ et une fonction de $(\mathcal{O}_M)_\eta$.

Conséquence immédiate de la proposition 4.

Corollaire Si Γ est ouvert, et si S et T sont dans $\mathcal{S}'_x(\Gamma)$, la fonction holomorphe $\mathfrak{L}(S * T)$ de la variable complexe $p \in \Gamma + i\Xi^n$ *est le produit des fonctions holomorphes $\mathfrak{L}S$ et $\mathfrak{L}T$. Alors l'algèbre $\mathcal{S}'_x(\Gamma)$ est sans diviseurs de* 0.

§ 4. Étude du support d'une distribution a partir de sa transformée de Laplace

Proposition 8 [1] *Soit T_x une distribution, $\Gamma \subset \Xi^n$ l'ensemble convexe attaché à T* (§ 1), *supposé non vide, et $\xi_0 \in \Gamma$.*

Pour que le support de T soit contenu dans le demi-espace $\xi x \geq A$, $\xi \in \Xi^n$, il faut et il suffit que, quel que soit $B < A$, la distribution

$$\text{(VIII, 4; 1)} \qquad \exp(tB) \exp(-(\xi_0 + t\xi)\, x)\, T_x$$

soit dans $\mathcal{S}'_x$ pour tout t *réel* ≥ 0, *et y reste bornée pour* $t \geq 0$.

1) *La condition est nécessaire*

Nous supposons donc le support de T contenu dans le demi-espace $\xi x \geq A$. Nous allons montrer que $\xi \in \Gamma$ entraîne alors $\xi_0 + t\xi \in \Gamma$ pour tout $t \geq 0$, et que (VIII, 4; 1) reste bornée dans $\mathcal{S}'_x$ et même y converge vers 0 pour $t \to +\infty$. Pour cela nous montrerons que, si $\varphi \in \mathcal{D}_x$ a son support assez voisin de l'origine,

[1] Ce résultat est dû à M. Lions. Avec son accord, je le publie ici à cause des relations étroites qu'il a avec ce qui précède

la régularisée par φ est dans $(\mathcal{O}_M)_x$ et y tend vers 0 pour $t \to +\infty$.

Nous pouvons supposer le support de φ contenu dans la bande $|\xi x| \leq \varepsilon$. Posons alors

$$\text{(VIII, 4; 2)} \qquad \psi_{(t)}(x) = \exp(t\xi x - 2\varepsilon t)\, \varphi(x).$$

ψ_t est majorée par $\exp(-\varepsilon t)$, chacune de ses dérivées partielles en x est majorée par $\exp(-\varepsilon t) \times$ polynôme en t, donc ψ_t est majorée dans $\mathcal{D}_x$ pour $t \geq 0$, et converge vers 0 dans $\mathcal{D}_x$ pour $t \to +\infty$. Comme alors $\xi_0 \in \Gamma$, on peut affirmer que $[\exp(-\xi_0 x)\, T_x * \psi_t]$, qui a son support dans le demi-espace $\xi x \geq A - \varepsilon$, est dans $(\mathcal{O}_M)_x$ pour $t \geq 0$, et converge vers 0 dans $(\mathcal{O}_M)_x$ pour $t \to +\infty$. Mais

$$\text{(VIII, 4; 3)} \quad \exp(tB)\, [\exp(-(\xi_0 + t\xi)\, x)\, T_x] \underset{(x)}{*} \varphi(x) =$$
$$= [\exp(-\xi_0 x)\, T_x * \psi_t]\, [\exp(-t\xi x + tB + 2\varepsilon t)];$$

le 2e crochet est majoré par $\exp(-\varepsilon t)$ et chacune de ses dérivées en x par $\exp(-\varepsilon t) \times$ polynôme en t, sur le support du premier crochet, dès que $B \leq A - 4\varepsilon$; dans ces conditions le 2e membre est dans $(\mathcal{O}_M)_x$ et y tend vers 0 pour $t \to +\infty$, donc aussi le 1er membre; et comme ε est aussi petit qu'on veut, la proposition est démontrée.

2) *La condition est suffisante*

Nous supposons maintenant que $\xi_0 + t\xi \in \Gamma$ pour tout $t \geq 0$, et que (VIII, 4; 1) reste bornée dans $\mathcal{S}'_x$ pour $t \geq 0$. Soit ψ une fonction de $\mathcal{D}_x$, de support assez voisin de l'origine, par exemple contenu dans la bande $|\xi x| \leq \varepsilon$. Posons cette fois

$$\text{(VIII, 4; 4)} \qquad \varphi_{(t)}(x) = \exp(-t\xi x - 2\varepsilon t)\, \psi(x).$$

Comme précédemment $\varphi_{(t)}$ est bornée dans $\mathcal{D}_x$ pour $t \geq 0$. D'après l'hypothèse, la régularisée de (VIII, 4; 1) par $\varphi_{(t)}$ doit donc être bornée dans $(\mathcal{O}_M)_x$. Mais

$$\text{(VIII, 4; 5)} \quad \exp(tB)\, [\exp(-(\xi_0 + t\xi)\, x)\, T_x] \underset{(x)}{*} \varphi_{(t)}(x) =$$
$$= [\exp(-\xi_0 x)\, T_x * \psi]\, \exp(-t\xi x + tB - 2\varepsilon t).$$

Le crochet du 2e membre est une fonction continue indépendante de T; l'exponentielle qui le multiplie tend vers $+\infty$ pour $t \to +\infty$, si $B \geq A - \varepsilon$, et $\xi x \leq A - 4\varepsilon$; donc le support du crochet du 2e membre est contenu dans le demi-espace $\xi x \geq A - 4\varepsilon$; ceci étant vraie pour toute $\psi \in \mathcal{D}_x$ de support assez voisin de l'origine, le support de $\exp(-\xi_0 x)\, T_x$ ou de T_x est lui aussi dans le demi-

espace $\xi x \geq A - 4\varepsilon$; comme ε est arbitrairement petit, le support de T est dans le demi-espace $\xi x \geq A$.

Remarques

1) Si $\xi_0 \in \overset{0}{\Gamma}$, $\exp(-\xi_0 x)\, T_x \in (\mathcal{O}'_c)_x$, et dans l'énoncé de la proposition on peut remplacer $\mathcal{S}'_x$ par $(\mathcal{O}'_c)_x$.

2) La plus grande valeur de A possible telle que le support de T soit contenu dans le demi-espace $\xi x \geq A$, est la borne supérieure des B réels tels que (VIII, 4; 1) soit borné dans $\mathcal{S}'_x$ pour $t \geq 0$. Cette borne est donc indépendante du choix de $\xi_0 \in \Gamma$. Cette méthode détermine donc tous les demi-espaces contenant le support de T, et par suite l'enveloppe convexe fermée de ce support.

Une transformation de Laplace donne immédiatement :

Corollaire *Pour que le support de* $T \in \mathcal{S}'_x(\Gamma)$ *soit contenu dans le demi-espace* $\xi x \geq A$, *il faut et il suffit que la transformée de Laplace* $(E(\xi)_\eta)$ *de* T *soit telle que, pour tout* $B < A$, *et au moins un point* $\xi_0 \in \Gamma$ *(auquel cas c'est vrai pour tout* $\xi_0 \in \Gamma$*)* :

$$\text{(VIII, 4; 6)} \qquad \exp(tB)\,(E(\xi_0 + t\xi))_\eta$$

soit bornée dans $\mathcal{S}'_\eta$ *pour* $t \geq 0$.

Remarque 1 Si Γ est ouvert, et si $(E(\xi))_\eta = F(\xi + i\eta)$, il faut et il suffit, pour que la condition précédente soit réalisée, que, pour tout point $\xi_0 \in \Gamma$, et tout $B < A$,

$$\text{(VIII, 4; 7)} \qquad \exp(tB)\, F(\xi_0 + t\xi + i\eta)$$

soit majorée par un polynôme en η (ou p) pour $t \geq 0$.

Remarque 2 On peut donner une condition nécessaire plus forte (donc *a fortiori* suffisante). Nous nous bornerons à le faire pour la dimension $n = 1$:

Pour que la fonction holomorphe F sur C soit l'image de Laplace d'une distribution T sur R à support dans la demi-droite $x \geqslant A$, *il est nécessaire et suffisant que* $|F(p)\, e^{A\xi}|$ *soit majoré, pour* ξ *assez grand, par un polynôme en* η. *(ou en* $|p|$*)*.

Soit en effet $T \in \mathcal{D}'$ à support dans $x \geqslant A$, et ξ_0 tel que :

$$S_x = e^{-\xi_0 x} T_x \in \mathcal{D}'_{L^1}.$$

Alors cette dernière distribution S est somme finie $\sum_{k \leq m} (\mu_k)^{(k)}$ de dérivées de mesures intégrables à support dans $x \geqslant A$ (On

commence par la décomposer en somme d'une distribution S_1 à support dans $[A, A+1]$, et d'une distribution S_2 à support dans $[A+1, +\infty[$ et intégrable (3° du théorème XXXIV du chap. III); S_1 est somme finie de dérivées de mesures à support dans $[A, A+1]$ (2° du même théorème); S_2 est somme finie de dérivées de mesures intégrables (théorème XV du chap. VI), qu'on peut évidemment supposer à support dans $[A+\infty[$, en multipliant au besoin par une fonction C^∞ à support dans $[A, +\infty[$, égale à 1 sur un voisinage de $[A+1, +\infty[$).

Alors l'image de Laplace de T est

$$F(p) = \sum_{k \leq m} (-1)^k \int (e^{\xi_0 x} e^{-px})^{(k)} \, d\mu_k(x)$$

$$= \sum_{k \leq m} (p - \xi_0)^k \int_{x \geq A} e^{-(p-\xi_0)x} \, d\mu_k(x).$$

D'où, pour $\xi \geq \xi_0$:

$$|F(p)| \leq |p - \xi_0|^m \, e^{-A(\xi - \xi_0)} \sum_{k \leq m} \int_{x \geq A} e^{-(\xi - \xi_0)(x - A)} \, d\mu_k(x).$$

Comme les $\int d\mu_k$ sont finis, on en déduit que F a bien la majoration demandée, $|F(p)| \leq$ constante $\times \, e^{-A\xi} \, |p - \xi_0|^m$. La réciproque résulte évidemment de la remarque 1.

Courants sur une variété

Sommaire. — Le paragraphe 1 (p. 313) rappelle ce que sont les variétés différentiables (avec bord), et les formes usuelles ou tordues sur ces variétés. On évite souvent d'avoir à utiliser les formes tordues; on ne peut le faire qu'en supposer la variété, non seulement orientale, mais orientée, ce qui est assez gênant; alors que les formes tordues sont d'un maniement très aisé.

Le paragraphe 2 (p. 322) définit alors les courants, usuels ou tordus, sur une variété. De nombreux exemples sont donnés (p. 323), tirés notamment de la physique (courant électrique). Dans le cas d'une variété orientée (p. 337), les deux notions de courants se confondent. Le paragraphe se termine par la définition des sections-distributions d'un espace fibré à fibres vectorielles de dimension finie (p. 339).

Le paragraphe 3 (p. 341) étudie les opérations sur les courants : multiplication extérieure (p. 341), multiplication intérieure par un champ de vecteurs (p. 343), cobord ou différentielle extérieure (p. 343) avec divers exemples, dérivation par une transformation infinitésimale (p. 351). Le paragraphe se termine par la cohomologie des courants (théorème de de Rham généralisé, théorème I, p. 355).

Le paragraphe 4 (p. 362) étudie l'image directe d'un courant par une application. Le théorème II (p. 364) résume ses principales propriétés; des exemples sont donnés ensuite (p. 366). Le théorème II *bis* (p. 367) donne un isomorphisme utile dans la pratique.

Le paragraphe 5 (p. 373) étudie l'image réciproque d'un courant, ou changement de variables dans un courant. Cette image réciproque est introduite progressivement, et ses propriétés sont résumées dans le théorème III (p. 377). Reste à voir quand ce théorème est applicable. On traite d'abord le cas d'un difféomorphisme local (p. 378), avec des exemples (p. 378). On étudie ensuite, sur une variété fibrée, la notion d'intégrale partielle sur les fibres d'une forme différentielle; ceci conduit au cas général d'un changement de variables par une application de rang n d'une variété U^m dans une variété V^n de dimension n (théorème IV, p. 390). Des exemples sont donnés (p. 391).

Le paragraphe 6 étudie la transformation de Fourier sous forme invariante : transformation de Fourier des courants pairs et impairs tempérés sur un espace vectoriel de dimension finie. Il a été étudié antérieurement par Scarfiello [1].

§ 1. Formes paires et impaires sur une variété indéfiniment différentiable

Formes ordinaires ou paires

Nous supposerons connues les principales propriétés des variétés différentiables, et, pour éviter les longueurs et les complications, nous nous bornerons souvent à donner une esquisse des démonstrations (1). *Variété voudra dire: variété indéfiniment différentiable sur le corps réel R, séparée, dénombrable à l'infini;* sauf mention expresse du contraire.

Rappelons que, sur une variété (*éventuellement avec bord* (2)) à n dimensions, $V = V^n$, on connaît la notion de fonction m-fois continuement différentiable (ou de classe C^m) ou indéfiniment différentiable (ou de classe C^∞). On sait aussi ce qu'est une application indéfiniment différentiable d'une variété dans une autre. En particulier, une application inversible s'appelle un difféomorphisme si elle est indéfiniment différentiable ainsi que sa réciproque.

(1) On pourra, pour l'étude des variétés, consulter par exemple de Rham [3], Helgason [1]

(2) Bien que la notion de variété indéfiniment différentiable avec bord soit implicitement bien connue, elle ne figure pas toujours explicitement dans la littérature. Une carte d'un voisinage d'un point du bord représente ce voisinage sur un ouvert de l'espace topologique R^n_- (sous-espace $x_1 \leqslant 0$ de R^n). La notion de fonction différentiable sur V^n se ramène alors à celle de fonction différentiable sur R^n_-; or les dérivées partielles peuvent se définir immédiatement pour une fonction définie dans R^n_- (pour le calcul d'une dérivée partielle en x_1 en un point de l'hyperplan $x_1 = 0$, seules les valeurs de la fonction pour $x_1 \leqslant 0$, domaine de définition de la fonction, doivent intervenir). On aura souvent besoin de savoir que toute fonction φ, m fois continuement différentiable sur R^n_-, est la restriction d'une fonction Φ, m fois continuement différentiable sur R^n. On obtiendra un tel prolongement Φ de façon tout à fait élémentaire, si m est fini, en posant, pour $x_1 > 0$:

$$\Phi(x_1, x_2 \dots x_n) = \sum_{\nu=0}^{m} c_\nu \varphi(-\nu x_1, x_2, \dots x_{n-1}, x_n),$$

les c_ν étant choisis de manière à vérifier le système d'équations de Vandermonde : $\sum_{\nu=0}^{m} c_\nu (-\nu)^k = 1$, $k = 0, 1, 2, \dots m$; ainsi les dérivées partielles d'ordre $\leqslant m$ de Φ pour $x_1 > 0$ se raccordent bien avec celles de φ, lorsque $x_1 \to 0$. Si φ a un support compact, il en est de même de Φ. La chose est plus délicate pour m infini. On pourra utiliser, par exemple, le théorème de prolongement de Whitney [4], théorème 1, page 65, ou de Seeley [1]. Withney donne un prolongement Φ analytique pour $x_1 > 0$, ce qui nous est inutile; si φ est à support compact, et si α est une fonction sur R^n, appartenant à $\mathcal{D}$, égale à 1 sur un voisinage du support de φ, $\alpha\Phi$ sera aussi un prolongement de φ, mais à support compact

Alors une carte de V est la donnée d'un ouvert Ω de V, le domaine de la carte, et d'un difféomorphisme H de cet ouvert sur un ouvert de R^n ou de R^n_- (sous espace $x_1 \leqslant 0$ de R^n). L'ensemble des cartes de V constitue l'atlas de V. Un atlas partiel de V est un ensemble de cartes, dont les domaines forment un recouvrement de V.

On connaît aussi, sur une variété V, les p-formes, ou formes différentielles de degré p, ou champs de p-covecteurs; la valeur d'une p-forme en un point de V est un p-covecteur en ce point; nous considérerons que, pour $p < 0$ ou $p > n$, il y a une p-forme unique, 0. On sait ce qu'est une p-forme m fois continuement différentiable (ou de classe C^m) ou localement sommable : on entend par là que la transportée de la p-forme par tout difféomorphisme défini par une carte est une p-forme, sur un ouvert de R^n ou de R^n_-, dont les coefficients sont m fois continuement différentiables ou localement sommables. Les formes considérées sont complexes.

On appelle support d'une p-forme continue l'adhérence de l'ensemble des points où le p-covecteur qu'elle définit est $\neq 0$. Nous appellerons $\overset{p}{\mathfrak{D}}{}^m$ (resp $\overset{p}{\mathfrak{D}}$) l'espace des p-formes m fois continuement différentiables (resp. indéfiniment différentiables) à support compact (nous écrirons $\overset{p}{\mathfrak{D}}{}^m(V)$ (resp. $\overset{p}{\mathfrak{D}}(V)$) s'il est nécessaire de spécifier la variété V); sur le sous-espace $\overset{p}{\mathfrak{D}}{}^m_K$ (resp. $\overset{p}{\mathfrak{D}}_K$) constitué par les formes qui ont leur support dans un compact K de V^n, nous mettrons la topologie suivante : des φ_j convergent vers 0 dans $\overset{p}{\mathfrak{D}}{}^m_K$ (resp. $\overset{p}{\mathfrak{D}}_K$), si leurs transportées par tout difféomorphisme défini par une carte sont des p-formes, sur un ouvert de R^n ou de R^n_-, qui convergent uniformément vers 0 sur tout compact de cet ouvert, ainsi que leurs dérivées partielles d'ordre $\leqslant m$ (resp. ainsi que chacune de leurs dérivées partielles). On mettra ensuite sur $\overset{p}{\mathfrak{D}}{}^m$ (resp. $\overset{p}{\mathfrak{D}}$) les topologies limites inductives habituelles. Si $(\Omega_i)_{i\in I}$ est un recouvrement ouvert de V, il existe une partition de l'unité indéfiniment différentiable subordonnée (Théorème II du chap. I). La démonstration se fait de la même manière que sur R^n.

Le théorème de densité (Théorème I du chap. I [1]) est également

[1] Le théorème I a été démontré seulement pour R^n, mais il est vrai aussi dans R^n_-. Soit $\varphi \in \mathfrak{D}^m(R^n_-)$. On peut la prolonger en une fonction $\Phi \in \mathfrak{D}^m(R^n)$. Le théorème I, appliqué à Φ, donne une suite de fonctions $\Phi_j \in \mathfrak{D}(R^n_-)$, qui convergent vers Φ dans un $\mathfrak{D}^m_H(R^n)$; leurs restrictions φ_j à R^n_- sont des fonctions de $\mathfrak{D}(R^n_-)$ qui convergent vers φ dans un $\mathfrak{D}^m_{H\cap R^n_-}(R^n_-)$

exact sur V^n. On peut en effet, pour toute $\varphi \in \overset{p}{\mathfrak{D}}{}^m$, l'écrire sous la forme $\varphi = \sum_i \alpha_i \varphi$, où $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une partition de l'unité subordonnée à un atlas partiel, et on est alors ramené au théorème de densité pour les $\alpha_i\varphi$, qui se démontre simplement par transport à partir de R^n ou R^n_-, par les difféomorphismes H_i^{-1}.

On appellera souvent forme une somme formelle de p-formes, p variant de 0 à $n : \omega = \sum_{p=0}^{n} \overset{p}{\omega}$; $\overset{p}{\omega}$ est la composante de degré p de ω. Une forme est appelée homogène si toutes ses composantes, sauf une au plus, sont nulles; elle a alors un degré déterminé, sauf si c'est la forme 0, de degré indéterminé. L'espace des formes est ainsi, par définition, la somme directe des espaces de p-formes. L'espace $\mathfrak{D}^m$ ou $\mathfrak{D}$ aura la topologie somme directe de topologies des $\overset{p}{\mathfrak{D}}{}^m$ ou $\overset{p}{\mathfrak{D}}$. Les formes que nous venons d'étudier, ou formes ordinaires, s'appellent aussi formes d'espèce paire ou formes paires.

Formes impaires ou tordues (1)

Nous allons maintenant définir une autre espèce de formes, les formes d'espèce impaire ou formes impaires ou tordues.

Soit $\tilde{V}$ le revêtement orienté canonique de V. C'est l'ensemble des couples d'un point de V^n et d'une orientation de l'espace tangent en ce point (2). C'est un revêtement de V de degré 2. C'est donc encore un espace fibré de base V, la fibre au-dessus d'un point de V étant canoniquement isomorphe à l'ensemble à deux éléments des orientations de l'espace tangent en ce point.

$\tilde{V}$ est elle aussi une variété indéfiniment différentiable, mais qui admet une orientation canonique. Si en effet, $\tilde{a}$ est un point de $\tilde{V}$, c'est un couple (a, O) d'un point a de V et d'une orientation O de l'espace tangent en a à V; la projection canonique de $\tilde{V}$ sur V admet en $\tilde{a}$ une application linéaire tangente qui est un isomorphisme; le transport de O par l'inverse de cet isomorphisme définit l'orientation en $\tilde{a}$ de l'espace tangent à $\tilde{V}$.

(1) Voir de Rham [3], chap. II, § 5, p. 21

(2) Rappelons que, si V^0 est réduite à un point (dimension 0), on appelle orientation de V en ce point l'un des deux signes +, —

Nous appellerons P la projection de $\tilde{V}$ sur V, et σ la symétrie de $\tilde{V}$ changeant entre eux les deux points situés au-dessus de chaque point de V. Une forme ω de V admet une image réciproque $P^*\omega$ sur $\tilde{V}$. C'est une forme sur $\tilde{V}$, qui est σ-invariante; et réciproquement, toute forme sur $\tilde{V}$ qui est σ-invariante, est l'image réciproque d'une forme sur V. Il y a donc une correspondance bijective entre les formes paires sur V et les formes σ-invariantes sur V. Nous appellerons alors *forme impaire ou forme tordue*, sur V, une forme sur $\tilde{V}$ qui est *σ-anti-invariante*, c'est-à-dire transformée en son opposée par la symétrie σ. Nous noterons par $\underline{\omega}$ une forme tordue sur V, par $\tilde{\omega}$ la forme σ-anti-invariante de V qui la définit [1]. Les notions de forme homogène et de degré, de support, de différentiabilité, sont évidentes pour les formes impaires.

Nous appellerons $\underline{\mathfrak{D}}^m$ l'espace des formes impaires m fois continuement différentiables à support compact de V. On introduira de même les espaces analogues $\underline{\mathfrak{D}}$, $\underline{\overset{p}{\mathfrak{D}}}^m$, $\underline{\overset{p}{\mathfrak{D}}}$, et les topologies évidentes sur ces espaces. Le théoréme de densité (théorème 1 du chap. I) est trivial. On pourra aussi appeler forme la somme formelle d'une forme paire et d'une forme impaire. Les dénominations « forme ordinaire, forme tordue », sont souvent préférables à celles de « forme paire, forme impaire », qui pourraient prêter à confusion avec le degré pair ou impair des formes.

Formes paires et impaires sur une variété orientée

Si V est orientée, on définit une identification canonique entre formes paires et impaires. Le revêtement $\tilde{V}$ est alors en effet la réunion d'une variété $\tilde{V}_+$ et d'une variété $\tilde{V}_-$ disjointes, la projection P étant un difféomorphisme de $\tilde{V}_+$ sur V conservant les orientations, et un difféomorphisme de $\tilde{V}_-$ sur V inversant les orienta-

[1] On peut trouver étrange d'avoir deux notations différentes pour des objets identiques par définition. Ces deux notations indiquent en réalité deux façons différentes de considérer le même objet. Donnons un exemple : « le support de $\underline{\omega}$ » veut dire « le support de la forme tordue $\underline{\omega}$ sur V », c'est un ensemble fermé de V; « le support de $\tilde{\omega}$ » veut dire « le support de la forme ordinaire $\tilde{\omega}$ sur V », c'est un ensemble fermé de $\tilde{V}$; le premier est la projection du second. Notons que $\tilde{\omega}$ n'est pas l'image réciproque $P^*\underline{\omega}$ de $\underline{\omega}$ par P, chose qui n'a aucun sens. Il n'y a pas d'image réciproque d'une forme tordue par une application; en outre, $\underline{\omega}$ est une forme tordue, $\tilde{\omega}$ une forme ordinaire. Mais il existe trivialement une application orientée (voir page 320)

tions. Nous appellerons P_+ et P_- la restriction de P à $\tilde{V}_+$ et $\tilde{V}_-$. Si alors ω est une forme paire, c'est-à-dire une forme ordinaire sur V, la forme égale à $P^*\omega$ sur $\tilde{V}_+$ et à $-P^*\omega$ sur $\tilde{V}_-$ est manifestement σ-anti-invariante, donc définit une forme impaire $\underline{\omega}$ sur V. Inversement, si $\underline{\omega}$ est une forme impaire sur V, définie par une forme $\tilde{\omega}$ σ-anti-invariante de $\tilde{V}$; alors la forme transportée de $\tilde{\omega}$ par le difféomorphisme P_+ est une forme paire ω sur V, qui donne naissance à $\underline{\omega}$ par le procédé précédent. La correspondance ci-dessus définie est un isomorphisme, pour toutes les structures considérées, entre les espaces de formes paires et les espaces de formes impaires du même degré. Aussi pourra-t-on, sur une variété orientée, éviter, si on le désire, de considérer les deux catégories de formes, en identifiant toujours les formes paires et les formes impaires qui se correspondent. Sauf s'il y a une contre-indication spéciale, c'est ce que nous ferons toujours et alors nous parlerons simplement de formes. Cela montre aussi qu'il est naturel, si V est une variété connexe orientable, de considérer qu'une forme impaire $\underline{\omega}$ est un couple de deux formes paires ω', ω'', opposées l'une à l'autre, et respectivement associées aux deux orientations possibles V', V'', de V. En effet, on peut considérer le revêtement $\tilde{V}$ comme la réunion de deux variétés disjointes $\tilde{V}'$ et $\tilde{V}''$. de manière qu'ici encore la projection P soit un difféomorphisme de $\tilde{V}'$ sur V' et de $\tilde{V}''$ sur V'', conservant les orientations. A la forme impaire $\underline{\omega}$ correspond donc toujours une forme $\tilde{\omega}$ σ-anti-invariante sur $\tilde{V}$, donc deux formes $\tilde{\omega}'$ et $\tilde{\omega}''$ sur $\tilde{V}'$ et $\tilde{V}''$. Les images de ces deux formes par la projection P sont donc bien deux formes ω', ω'', opposées sur V, et respectivement attachées aux deux orientations V', V'' de V. Si V est non seulement orientable mais orientée, et si, par exemple, V' est son orientation, alors la correspondance signalée plus haut entre formes impaires et formes paires, est celle qui à $\underline{\omega}$ associe ω'.

Si maintenant V est une variété non nécessairement orientable, on pourra considérer n'importe quel recouvrement de V par des

$\underline{P}$ de $\tilde{V}$ sur V (dont l'application associée est P), alors $\underline{P}^*\underline{\omega}$ est une forme tordue sur $\tilde{V}$; comme $\tilde{V}$ est orientée on peut associer à $\underline{P}^*\omega$ une forme ordinaire (voir page 317) qui n'est autre que $\tilde{\omega}$

Le soulignage des formes tordues permet de les distinguer aussitôt des formes ordinaires; mais nous n'en ferons pas un esclavage et l'omettrons souvent

ouverts orientables, et définir une forme impaire sur V par un système cohérent de formes impaires sur ces ouverts, chacune étant définie par le procédé précédent. D'ailleurs une p-forme tordue n'est pas autre chose qu'un champ de p-covecteurs tordus, un p-covecteur tordu en un point $a \in V$ étant un couple de 2 p-covecteurs en a, opposés, respectivement associés aux deux orientations de V en a.

Produits extérieurs de formes

On peut définir des produits extérieurs de formes. Le produit extérieur de deux formes paires ou de deux formes impaires est une forme paire. Le produit extérieur d'une forme paire et d'une forme impaire est une forme impaire.

Le cas de deux formes paires est connu.

Soient α, $\underline{\beta}$ une forme paire et une forme impaire. Alors $P^*\alpha$ et $\tilde{\beta}$ sont des formes paires sur $\tilde{V}$, respectivement σ-invariante et σ-anti-invariante. Donc $P^*\alpha \wedge \tilde{\beta}$ est σ-anti-invariante; donc elle définit une forme impaire $\underline{\gamma}$ sur V, avec $P^*\alpha \wedge \tilde{\beta} = \tilde{\gamma}$. Par définition, $\alpha \wedge \underline{\beta} = \underline{\gamma}$. Si maintenant $\underline{\alpha}$ et $\underline{\beta}$ sont deux formes impaires sur V, on définit la forme paire $\gamma = \underline{\alpha} \wedge \underline{\beta}$ par $P^*\gamma = \tilde{\alpha} \wedge \tilde{\beta}$.

En ce qui concerne les produits intérieurs, nous nous bornerons à indiquer qu'on peut définir le produit intérieur, à gauche ou á droite, d'une forme paire (resp. impaire), par un champ de multivecteurs ξ, et qu'on obtient une forme de même nature, c'est-à-dire paire (resp. impaire) (¹). Si ξ est un champ de vecteurs, nous appellerons $i(\xi)$ l'opération sur les formes, paires ou impaires, définie par $\omega \to \omega \llcorner \xi = i(\xi)\,\omega$; c'est une dérivation d'algèbre graduée, en ce sens que $i(\xi)\,(\overset{p}{\alpha} \wedge \beta) = i(\xi)\,\alpha \wedge \beta + (-1)^p\,\overset{p}{\alpha} \wedge i(\xi)\,\beta$, si α est de degré p.

Formes sur R^n

Si $V = R^n$, on sait qu'on a la décomposition canonique d'une p-forme ordinaire :

$$\omega = \sum_{I} \omega_I \, dx_I; \qquad \text{(IX, 1; 1)}$$

les ω_I sont des fonctions, dx_I désigne un produit extérieur

$$dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \ldots \wedge dx_{i_p},$$

(¹) Voir Bourbaki [9], chap. III, § 8, nº 4

si I est la partie $\{i_1, i_2, \ldots i_p\}$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$, $i_1 < i_2 < \ldots < i_p$; I parcourt l'ensemble des parties à p-éléments de l'ensemble $\{1, 2, \ldots n\}$. On aura une décomposition analogue pour une p-forme tordue $\underline{\omega}$ sur R^n, mais alors les $\underline{\omega}_I$ seront des fonctions tordues. Comme R^n possède une orientation canonique, une fonction tordue $\underline{f}$ est la donnée d'un couple de deux fonctions ordinaires opposées, f_+, f_-, la première attachée à l'orientation canonique de R^n, et l'autre à l'orientation opposée; la correspondance entre fonctions tordues et fonctions ordinaires, définie par l'orientation canonique de R^n, est celle qui associe $\underline{f}$ et f_+.

Remarquons à ce sujet que les notations adoptées universellement sur R sont ambiguës. Le symbole dx peut désigner la 1-forme paire, différentielle extérieure de x; alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ est l'intégrale sur la droite munie de son orientation canonique, de la 1-forme paire $f(x)\,dx$. Mais il peut désigner aussi la mesure de Lebesgue, 1-forme impaire; alors $\int_{R} f(x)\,dx$ est l'intégrale, sur la droite non orientée, de la 1-forme impaire $f(x)\,dx$. Ces 1-formes paire et impaire se correspondent par l'orientation canonique de R. De même, sur R^n, dx peut désigner la n-forme paire $dx_1 \wedge dx_2 \ldots \wedge dx_n$, ou la n-forme impaire définie par la mesure de Lebesgue. On pourra aisément les distinguer, par l'écriture dx pour la forme paire et $\underline{dx}$ pour la forme impaire.

Nous aurons parfois besoin de division de formes. Soient α, β, γ, trois formes (paires ou impaires), et supposons que $\alpha = \beta \wedge \gamma$. On peut être tenté d'écrire $\gamma = \beta^{-1} \wedge \alpha$.

Cette écriture est dénuée de sens. Nous nous permettrons cependant de l'employer dans les deux cas suivants :

1) α et β sont de même degré, donc γ de degré 0. Alors la donnée de α et β détermine complètement γ si β ne s'annule pas, et la formule ci-dessus est commode.

2) On se trouve sur R^n, muni de son orientation canonique. Soient alors $i_1, i_2, \ldots i_p, j_1, j_2, \ldots j_q$, des entiers compris entre 1 et n. On conviendra que :

$$(dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \ldots \wedge dx_{i_p})^{-1} \wedge (dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \ldots \wedge dx_{i_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \ldots \wedge dx_{j_q}) = \\ = dx_{j_1} \wedge dx_{j_2} \ldots \wedge dx_{j_q}.$$

C'est ainsi que la forme $(-1)^{k-1}\, dx_1 \wedge dx_2 \dots \wedge dx_{k-1} \wedge dx_{k+1} \dots \wedge dx_n$, d'un emploi fréquent, s'écrira plus facilement :

$$(dx_k)^{-1} \wedge (dx_1 \wedge dx_2 \dots \wedge dx_k \wedge \dots dx_n) = (dx_k)^{-1} \wedge dx.$$

De la même manière il existera une notation $\alpha \wedge \beta^{-1}$ désignant γ telle que $\alpha = \gamma \wedge \beta$. Ainsi :

$$dx \wedge (dx^k)^{-1} = (-1)^{n-k}\, dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{k-1} \wedge dx_{k+1} \dots \wedge dx_n.$$

Il existera des notations du même type avec les formes impaires.

Remarquons qu'on pourra aussi utiliser le produit intérieur. Si $\vec{e_k}$ est le k-ième vecteur de la base de R^n, $(dx_k)^{-1} \wedge dx$ pourra aussi se noter $i\,(\vec{e_k})\, dx$.

Image réciproque d'une forme

Soit H une application C^∞ d'une variété U dans une variété V. Si ω est une p forme sur V, de classe C^m, on peut définir son image réciproque $H^*\omega$, qui est une p-forme sur U, de classe C^m. L'opération $H^* : \omega \rightarrow H^*\omega$ est linéaire, conserve la multiplication extérieure des formes ($H^*(\alpha \wedge \beta) = H^*\alpha \wedge H^*\beta$) et la différentiation extérieure ($H^*\, d\omega = d\, H^*\omega$); le support de $H^*\omega$ est contenu dans l'image réciproque par H du support de ω. Ceci est valable pour les formes ordinaires; *il n'y a pas d'image réciproque des formes tordues.*

Mais soit $\tilde{H}$ une « application orientée » C^∞ de U dans V [1]. On entend par là une application C^∞ de $\tilde{U}$ dans $\tilde{V}$, invariante par σ : $\tilde{H}\sigma_{\tilde{U}} = \sigma_{\tilde{V}}\tilde{H}$. Cela revient à dire que $\tilde{H}$ est un morphisme d'espaces fibrés de $\tilde{U}$, fibré sur U, dans $\tilde{V}$, fibré sur V. $\tilde{H}$ définit donc une application ordinaire H de U dans V; $\tilde{H}$ est même exactement la donnée d'une telle application H, et, pour chaque x de U, d'une bijection de l'ensemble des 2 orientations de U en x sur l'ensemble des 2 orientations de V en H (x), bijection variant continuement avec x. Si alors $\underline{\omega}$ est une p-forme tordue sur V, on peut définir son image réciproque $\tilde{H}^*\underline{\omega}$, p-forme tordue sur U, qui est définie par la p-forme σ-anti-invariante $\tilde{H}^*\tilde{\omega}$ sur $\tilde{U}$. A partir d'une application orientée $\tilde{H}$, on peut donc définir à la fois une image réciproque d'une forme tordue $\underline{\omega}$, soit $\tilde{H}^*\underline{\omega}$, et une image réciproque

[1] Voir de Rham [3], chap. II, § 5, p. 21

d'une forme ordinaire ω, soit $H^* \omega$. $\tilde{H}^*$ commute avec d, et on a les formules

$$(\text{IX}, 1; 2) \qquad \begin{cases} \tilde{H}^* (\underline{\alpha} \wedge \beta) = \tilde{H}^* \underline{\alpha} \wedge H^* \beta \\ H^* (\underline{\alpha} \wedge \underline{\beta}) = \tilde{H}^* \underline{\alpha} \wedge H^* \underline{\beta}. \end{cases}$$

(Ces formules sont évidentes, en identifiant une forme ordinaire ω sur U ou V à son image réciproque $P^* \omega$ sur $\tilde{U}$ ou $\tilde{V}$, σ-invariante; $\tilde{H}$ est compatible avec les projections P, $HP_U = P_V\tilde{H}$, de sorte que $\tilde{H}^* P_V^* \omega = P_U^* H^* \omega$, et (IX, 1; 2) revient exactement à exprimer que $\tilde{H}^*$ conserve la multiplication des formes ordinaires, σ-invariantes ou σ-anti-invariantes ou quelconques, sur $\tilde{U}$ et $\tilde{V}$).

Cohomologie des formes C^∞

Soit $\overset{p}{\mathfrak{Z}}$ l'espace des p-formes C^∞ fermées sur V, c'est-à-dire de cobord nul; soit $\overset{p}{\mathcal{B}}$ l'espace des p-cobords C^∞, c'est-à-dire des cobords des $(p-1)$-formes C^∞. Le quotient $\mathfrak{Z}^p/\mathcal{B}^p$ est l'espace vectoriel de cohomologie de V, pour le degré p et les formes C^∞; sa dimension est le p-ième nombre de Betti de V. On sait (théorème de de Rham (1)) qu'il s'identifie à l'espace vectoriel de cohomologie complexe de V. L'espace vectoriel de cohomologie tordue est $\underline{\mathfrak{Z}^p/\mathcal{B}^p}$, obtenu en remplaçant formes par formes tordues; il est isomorphe à l'espace vectoriel de cohomologie complexe tordue. On obtient les cohomologies à support compact en imposant aux formes considérées d'être à support compact. Les classes de cohomologie se multiplient comme les formes elles-mêmes; par exemple l'espace vectoriel de cohomologie, somme directe des espaces vectoriels de p-cohomologie pour $p = 0, 1, 2...$, est une algèbre sur C, tandis que l'espace vectoriel de cohomologie tordue est un module sur cette algèbre. Si H est une application C^∞ d'une variété U dans une autre V, la commutation de H^* avec d et le produit montre que H^* est un homomorphisme de l'algèbre de cohomologie de V dans celle de U. Si $\tilde{H}$ est une application orientée, $\tilde{H}^*$ applique l'espace vectoriel de cohomologie tordue de V dans celui de U. Si H est propre (c'est-à-dire si l'image réciproque par H d'un compact de V est un compact de U), H^* applique l'espace vectoriel de cohomologie à support compact de V dans celui de U, etc.

(1) Voir de Rham [3], chap. IV, § 21, théorème 16

§ 2. Courants pairs et impairs sur une variété

Courants (¹)

On appelle p-courant impair sur V^n une forme linéaire continue sur $\overset{n-p}{\mathcal{D}}$. On appelle p-courant pair une forme linéaire continue sur $\underline{\overset{n-p}{\mathcal{D}}}$. Nous verrons plus loin (exemple 1, page 323) la raison d'être de ce choix. La valeur du courant impair $\underline{\overset{p}{T}}$ sur la forme $\overset{n-p}{\varphi}$ pourra se noter $\underline{T}(\varphi)$ ou $< \underline{T}, \varphi >$ ou $\underline{T}.\varphi$. On se gardera bien par contre d'intervertir $\underline{T}$ et φ et de la noter $< \varphi, \underline{T} >$ ou $\varphi.\underline{T}$. Au contraire, on conviendra que

(IX, 2; 1)

$$\varphi.\underline{T} = < \varphi, \underline{T} > = (-1)^{p(n-p)}\,\underline{T}.\varphi = (-1)^{p(n-p)} < \underline{T}, \varphi >.$$

Il en sera de même pour un courant pair T et une forme impaire $\underline{\varphi}$. On appelle courant impair une somme formelle de p-courants impairs, p variant de 0 à n. Cela revient à considérer l'espace des courants impairs comme somme directe des espaces de p-courants impairs, p variant de 0 à n. On fait de même pour les courants pairs. Un courant est homogène si toutes ses composantes, sauf une au plus, sont nulles. On sera amené, pour une forme paire $\varphi = \sum_{p=0}^{n} \overset{p}{\varphi}$, et pour un courant impair $\underline{T} = \sum_{p=0}^{n} \underline{\overset{p}{T}}$, à poser :

(IX, 2; 2)
$$\underline{T}(\varphi) = \sum_{p=0}^{n} \underline{\overset{p}{T}}\left(\overset{n-p}{\varphi}\right),$$

ce qui revient à considérer, comme d'habitude, que le dual d'une somme directe est identique à la somme directe des duals. Ayant ainsi défini la valeur d'un courant impair sur une forme paire, nous voyons qu'un courant impair est homogène de degré p, autrement dit toutes ses composantes de degré $\neq p$ sont nulles, si et seulement si il est nul sur toute forme paire homogène de degré $\neq n - p$.

(¹) Les courants ont été introduits par de Rham, dans un cas particulier, bien avant les distributions; voir Introduction, page 6. On en trouvera une théorie générale dans de Rham [3]

On pourra aussi appeler courant la somme formelle d'un courant pair et d'un courant impair, et poser

$$(\mathrm{XI}, 2; 2\,bis) \quad < \mathrm{T}_1 + \underline{\mathrm{T}}_2, \varphi_1 + \underline{\varphi}_2 > \; = \; < \mathrm{T}_1, \underline{\varphi}_2 > + < \underline{\mathrm{T}}_2, \varphi_1 >.$$

L'espace des courants impairs (resp. paris) de degré p se notera $\underline{\overset{p}{\mathfrak{D}}}'$ (resp. $\overset{p}{\mathfrak{D}}'$); l'cspace des courants impairs (resp. pairs) se notera $\underline{\mathfrak{D}}'$ (resp. $\mathfrak{D}'$). De la même manière que pour les distributions, on peut définir les courants d'ordre $\leq m$, et les espaces $\overset{p}{\mathfrak{D}}'^m$, $\underline{\overset{p}{\mathfrak{D}}}'^m$, $\mathfrak{D}'^m$, $\underline{\mathfrak{D}}'^m$; $\mathfrak{D}'^m$ et $\underline{\mathfrak{D}}'^m$ sont des sous-espaces de $\mathfrak{D}'$ et $\underline{\mathfrak{D}}'$ respectivement. *Ne pas confondre l'ordre d'un courant, qui indique la nature de sa singularité locale, avec son degré.* La restriction d'un courant de V à un ouvert de V, le principe de localisation (théorème du recollement des morceaux, théorème 4 du chap. I) et la notion de support d'un courant, se définissent sans ambiguïté. On peut également définir T (φ) toutes les fois que T est un courant impair (resp. pair) et φ une forme paire (resp. impairc) indéfiniment différentiable, dont les supports ont une intersection compacte (chap. III, § 7). Les topologies sur les espaces dc courants n'introduisent pas de nouveauté particulière.

EXEMPLES

Exemple 1. Courant défini par une forme

Rappelons d'abord que, sur une variété orientée V de dimension n, on peut définir l'intégrale $\int \omega$ d'une forme différentielle ω de degré n, localement sommable à support compact. On en déduit aisément que, si V est une variété non orientée de dimension n, on peut définir l'intégrale sur V d'une n-forme impaire $\underline{\omega}$, localement sommable à support compact. Si en effet $\tilde{\omega}$ est la forme qu'elle définit sur le revêtement orienté $\tilde{\mathrm{V}}$, il suffira de poser :

$$(\mathrm{IX}, 2; 3) \qquad \int_{\mathrm{V}} \underline{\omega} = \frac{1}{2} \int_{\tilde{\mathrm{V}}} \tilde{\omega}.$$

On met le facteur $\frac{1}{2}$ pour des raisons évidentes; si V est orientée, nous avons vu (p. 316) qu'à $\underline{\omega}$ on peut associer une forme ordi-

naire ω; nous voulons que l'intégrale de $\underline{\omega}$ sur V soit égale à l'intégrale de ω sur V orientée.

Si V est réduite à un point a (dimension 0), une 0-forme paire est un nombre complexe z; son intégrale sur a, muni de l'orientation $\pm$, est $\pm z$. Une 0-forme impaire est un système $\pm z$ de deux nombres complexes opposés, respectivement associés aux signes $\pm$; son intégrale sur a, non orienté, est z.

Il sera souvent commode de parler d'intégrale sur V d'une forme impaire non nécessairement homogène. Ce sera par définition l'intégrale de sa composante de degré n. Et l'intégrale sur V, non orientée, d'une forme paire, sera 0 par définition. Soit alors ω une p-forme paire à coefficients localement sommables. Si $\underline{\varphi}$ est une forme impaire appartenant à $\underline{\overset{n-p}{\mathfrak{D}}}$, le produit extérieur $\omega \wedge \underline{\varphi}$ est une n-forme impaire localement sommable à support compact. Elle a donc une intégrale, et on voit sans peine que

$$\omega(\underline{\varphi}) = \int_V \omega \wedge \underline{\varphi} \tag{IX, 2; 4}$$

définit une forme linéaire continue sur $\underline{\overset{n-p}{\mathfrak{D}}}$, c'est-à-dire un p-courant pair. C'est ce fait, qu'une p-forme paire localement sommable définit un p-courant pair, qui nous a amenés à prendre la définition donnée au début du paragraphe (cette définition généralisant celle de la distribution associée à une fonction localement sommable sur R^n). Il est facile de voir que deux p-formes définissent le même courant, si et seulement si elles sont presque partout égales ([1]). De la même manière, une p-forme impaire définit un p-courant impair : il suffira cette fois de prendre pour φ une $(n-p)$-forme paire. Remarquons que, si $\omega.\underline{\varphi} = \int_V \omega \wedge \underline{\varphi}$, la définition donnée à (II, 2; 1) montre que $\underline{\varphi}.\omega = \int_V \underline{\varphi} \wedge \omega$. La formule ci-dessus est d'ailleurs valable sans spécifier le degré; si ω est une forme paire, le courant qu'elle définit est donné par (IX, 2; 4), pour φ forme impaire sans spécification de degré. On peut même ne pas spécifier la parité : une forme ω (somme formelle d'une forme paire et d'une

([1]) « Presque partout » sur une variété indéfiniment différentiable V veut dire : sauf sur un ensemble dont l'image, par toute carte d'un ouvert de V sur un ouvert de R^n ou R^n_-, soit de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue de R^n. Il suffit, pour cela, qu'il en soit ainsi pour toutes les cartes d'un atlas

forme impaire) localement sommable, définit un courant $\varphi \rightarrow \int_V \omega \wedge \varphi$, φ forme quelconque C^∞ à support compact.

En particulier, *une fonction localement sommable sur V définit un 0-courant pair.*

Les formes C^∞ à support compact sont denses dans l'espace des courants (même si V a un bord); en effet, si $\varphi \in \mathcal{D}$ est orthogonale à $\mathcal{D}$, c'est-à-dire si $\int_V \omega \wedge \varphi = 0$ pour toute $\omega \in \mathcal{D}$, on voit sans peine que $\varphi = 0$, donc $\mathcal{D}$ est faiblement dense dans $\mathcal{D}'$, et par suite fortement dense, parce que $\mathcal{D}$, espace de Montel, est réflexif.

Exemple 2. L'intégrale ; intégrale d'un courant

La forme linéaire qui, à toute $\underline{\varphi} \in \overset{n}{\underline{\mathcal{D}}}$, fait correspondre son intégrale $\int_V \underline{\varphi}$, est un 0-courant pair, qui n'est pas autre chose que le 0-courant défini par la fonction égale à la constante 1 (exemple 1). Remarquons aussi que, si T est un courant quelconque à support compact, on peut encore définir T (1) (toujours nul, si $\underline{\text{T}}$ est impair homogène de degré $\neq n$, ou si T est pair). Il sera logique de l'appeler intégrale de T et de le noter $\int_V$ T, puisqu'il en est ainsi si T est une forme localement sommable à support compact (voir formule (IX, 2; 4)).

Exemple 3. Courants de Dirac

Donnons-nous, en un point a de V, un k-vecteur X, et posons :

$$\text{(IX, 2; 5)} \qquad X(\varphi) = < X, \varphi(a) >, \varphi \in \overset{k}{\mathcal{D}}.$$

Le symbole $< X, \varphi(a) >$ désigne le produit scalaire, au point a, entre le k-vecteur X et le k-co-vecteur $\varphi(a)$, valeur de la k-forme φ au point a.

Nous venons de définir ainsi un $(n-k)$-courant impair, ayant pour support a, et qui est une sorte de généralisation de la mesure de Dirac attachée à un point. Pour retrouver la mesure de Dirac il faudrait prendre $k = 0$, et pour X le 0-vecteur égal au scalaire 1; la mesure de Dirac est un n-courant impair.

On pourrait remplacer le k-vecteur par un k-vecteur tordu en a; il définirait un $(n-k)$-courant pair de support a.

Un cas de ce genre montre bien les difficultés qu'il y aurait à souligner les objets « tordus », et ne pas souligner les objets « usuels » : un k-vecteur tangent en a, usuel (resp. tordu), est un $(n-k)$-courant de support a, tordu (resp. usuel). Si l'on veut maintenir cette règle, il faudra souligner les *courants* tordus, et ne pas souligner les *courants* usuels, quels que soient les objets qui leur donnent naissance; et ne pas se forcer à observer trop rigoureusement cette règle.

Les combinaisons linéaires finies de courants de Dirac sont denses dans l'espace des courants; en effet, si $\varphi \in \mathfrak{D}$ est orthogonal à tous les courants de Dirac, elle est nulle.

Exemple 4. *Mesures*

Une mesure de Radon $\underline{\mu}$ sur V^n est un n-courant impair d'ordre zéro, c'est-à-dire appartenant à $\mathfrak{D}'^0$. Alors $\underline{\mu}(\varphi)$ est l'intégrale de φ par rapport à $\underline{\mu}$. Nous remarquons ainsi qu'une fonction localement sommable (exemple 1, pour $p = 0$) et une mesure ne sont pas du tout des courants du même type; ils l'étaient sur R^n, à cause de l'identification de la fonction f et de la mesure $f(x)\, \underline{dx}$, rendue possible par la donnée de la mesure de Lebesgue sur R^n, $\underline{dx}$. Sur une variété, c'est une n-forme impaire localement sommable qui est un cas particulier d'une mesure de Radon.

Exemple 5. *Chaînes*

Soit Γ une chaîne singulière (différentiable) de dimension k. Une chaîne Γ est par définition un couple (W; H) d'une variété une fois continuement différentiable W de dimension k *orientée*, et d'une application propre une fois continuement différentiable H de W dans V; le support de Γ est l'image H (W), fermée parce que H est propre.

[On rappelle qu'une application H est dite propre si l'image réciproque d'un compact est compacte. Cela entraîne que l'image directe d'un ensemble fermé soit fermée (lorsqu'il s'agit, comme ici, d'espaces localement compacts). Au lieu de propre, on dit aussi « continue à l'infini ». Cela exprime en effet que l'image par H d'une base de filtre de W, « convergeant vers l'infini », soit une

base de filtre de V convergeant vers l'infini]. Une chaîne telle que Γ définit un $(n-k)$-courant impair par la formule :

$$(\mathrm{IX}, 2; 6) \qquad \underline{\Gamma}(\varphi) = \int_\Gamma \varphi = \int_W H^* \varphi, \varphi \in \overset{k}{\mathfrak{D}} \ (^1).$$

Comme Γ est de dimension k, on voit qu'*il est naturel, pour tout courant de degré* p, *de dire qu'il a la dimension* n — p. *Si T est un courant, de degré* p *ou de dimension* n — p, *on pourra aussi le noter* $\overset{p}{T}$ *ou* $\underset{n-p}{T}$ *ou* $\underset{n-p}{\overset{p}{T}}$. Remarquons qu'un point définit une chaîne de dimension 0, à laquelle correspond le n-courant impair, mesure de Dirac associée à ce point.

Les chaînes que nous venons de voir là sont celles qu'on appelle chaînes ordinaires ou paires, les plus utilisées en topologie algébrique. Elles définissent malheureusement des courants impairs ou tordus!

On appellera maintenant chaîne impaire ou tordue Γ la donnée d'une variété W différentiable, et d'une application orientée $\tilde{H}$ de W dans V, de classe C^1 et propre. Ici ce n'est plus W qui est orientée, c'est $\tilde{H}$. Γ définit alors un courant pair Γ par la formule

$$(\mathrm{IX}, 2; 6\,bis) \quad < \Gamma, \underline{\varphi} > = \int_\Gamma \underline{\varphi} = \int_W \tilde{H}^* \underline{\varphi} \ (^2).$$

En particulier le couple de V^n et de l'application identique de V est une chaîne tordue de dimension n sur V; elle définit donc un 0-courant pair, qui n'est autre que celui qui est défini par la fonction 1, ou intégrale $\underline{\varphi} \to \int_V \underline{\varphi}$ (exemple 2). On pourra donc le noter $V : \underline{\varphi} \to < V, \underline{\varphi} >$. On peut généraliser ces exemples, et obtenir les courants introduits par de Rham en 1936 (³). Soit Γ une chaîne de dimension p, ω une q-forme continue sur V; alors $\varphi \to \int_\Gamma \omega \wedge \varphi$ est un $(n-p+q)$-courant Γ, qu'on notera, pour des raisons

(¹) Puisque H est propre, $H^*\varphi$, image réciproque de φ par H, est dans $\overset{k}{\mathfrak{D}}$ (W). $\int_W H^*\varphi$ est ici l'intégrale d'une forme *ordinaire* sur une variété *orientée*

(²) C'est ici l'intégrale d'une k-forme impaire sur une variété de dimension k non orientée

(³) de RHAM [1], [2]

indiquées plus loin (§ 3), $\Gamma \wedge \omega$. Il suffit naturellement que ω soit donnée sur le support de Γ, et non nécessairement partout sur V.

Les chaînes ne forment pas un espace vectoriel; c'est pourquoi on appellera encore chaînes les combinaisons linéaires finies de chaînes du type précédent. Elles forment alors un sous-espace vectoriel dense de l'espace des courants; en effet, si $\varphi \in \mathfrak{D}$ est orthogonale à toutes les chaînes, elle est nulle.

Les courants de Dirac sont donc des limites de chaînes; mais on peut le voir de façon particulièrement simple. On se ramène à R^n, et au $(n-k)$-courant de Dirac X défini par le k-vecteur $e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_k$ en O, produit des k premiers vecteurs de base de R^n. Si alors B_ε est, dans le sous-espace engendré par ces k vecteurs, la boule de centre O et de volume ε, son injection dans R^n définit une chaîne, et on a visiblement, pour $\varphi \in \mathfrak{D}$:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} < \frac{1}{\varepsilon} B_\varepsilon, \varphi > = \text{coefficient de } dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots \wedge dx_k$$

dans $\varphi(O) = < e_1 \wedge e_2 \wedge \ldots \wedge e_k, \varphi(O) > = < X, \varphi >$.

Exemple 6. *Le doublet*

Tous les courants précédents sont d'ordre 0, c'est-à-dire appartiennent à $\mathfrak{D}'^0$. Il n'en est pas de même du suivant.

Le doublet de moment $\vec{\mathfrak{M}}$ au point a de V est le n-courant impair d'ordre 1 défini par :

$$\text{(IX, 2; 7)} \quad \underline{\overset{n}{T}} . \overset{0}{\varphi} = \text{dérivée de } \varphi \text{ suivant } \vec{\mathfrak{M}} = < \vec{\mathfrak{M}}, d\varphi(a) >.$$

Naturellement il ne faut pas le confondre avec le $(n-1)$-courant impair d'ordre 0 défini par (IX, 2; 5) pour $k = 0$:

$$\text{(IX, 2; 8)} \qquad \overset{n-1}{\vec{S}} . \overset{1}{\psi} = < \vec{\mathfrak{M}} . \psi(a) >.$$

Nous verrons plus tard que le premier de ces courants n'est autre que la différentielle extérieure du deuxième, au signe $(-1)^n$ près (voir p. 337).

Exemple 7. Courant électrique

On définit d'habitude, dans R^n, un courant électrique réparti dans l'espace par un champ de vecteurs intensité $\vec{J}$ (dépendant du

temps). Si Σ est une hypersurface fermée de classe C^1 (éventuellement avec bord) munie d'un sens de passage (ou orientation transversale) variant continuement, le *flux électrique* traversant Σ dans le sens donné est alors donné par

$$\text{(IX, 2; 9)} \qquad \Phi(\Sigma) = \int_\Sigma J_\nu \, dS,$$

où J_ν est la projection de $\vec{J}$ sur la normale $\vec{\nu}$ à Σ, orientée dans le sens de passage donné, et dS l'élément d'aire de Σ; on suppose par exemple $\vec{J}$ continu, l'intégrale précédente a donc un sens si Σ est compacte.

Tout ceci conserve un sens si on remplace R^n par un espace de Riemann, c'est-à-dire une variété V^n munie d'un ds^2 riemannien; mais (IX, 2; 9) ne veut plus rien dire sur une variété V quelconque.

On doit alors définir l'intensité du courant comme étant une $(n-1)$-forme impaire $\overset{n-1}{\underline{\omega}}$ continue (dépendant du temps). Alors une hypersurface Σ fermée, munie d'un sens de passage, définit une chaîne tordue de dimension $n-1$ de V, *car son injection dans V est une application orientée* (voir p. 320) : en tout point a de Σ, le sens de passage de Σ définit une correspondance bijective entre les orientations en a de Σ et de V, en convenant, comme toujours, que le sens de passage de Σ, suivi d'une orientation de Σ, donne l'orientation correspondante de V. Alors on peut intégrer $\overset{n-1}{\underline{\omega}}$ sur Σ, si par exemple ω est continue et Σ compacte; l'intégrale $\int_\Sigma \overset{n-1}{\underline{\omega}}$ est aussi l'intégrale sur Σ de l'image réciproque de $\underline{\omega}$ par l'injection orientée de Σ dans V; ou de la $(n-1)$-forme impaire induite par ω sur Σ grâce au sens de passage de Σ; c'est aussi la valeur $< \Sigma, \overset{n-1}{\underline{\omega}} >$ du 1-courant pair Σ (défini par la chaîne tordue Σ de dimension $n-1$, voir exemple 5), sur la forme $\underline{\omega}$, valeur qui a un sens si Σ est compacte et $\underline{\omega}$ continue.

On peut poser

$$\text{(IX, 2; 10)} \qquad \Phi = \int_\Sigma \underline{\omega}.$$

Si V est un espace de Riemann, les données de ω ou de $\vec{J}$ sont équivalentes. En effet, il existe une mesure des volumes sur V,

c'est-à-dire une n-forme impaire $\underline{\tau}$ définie par la structure riemannienne; si au champ $\vec{J}$ on associe la $(n-1)$-forme impaire

(IX, 2; 10 *bis*) $$\underline{\omega} = i(\vec{J})\,\tau,$$

la correspondance $\vec{J} \to i(\vec{J})\,\tau$ entre champs de vecteurs et $(n-1)$-formes impaires est bijective.

Si $V = R^n$, muni de sa base, de son orientation et de sa structure euclidienne canoniques, et si $\vec{J}$ a pour composantes $J_1, J_2, \ldots, J_n$, cela revient à associer à $\vec{J}$ la forme

(IX, 2; 11) $$\underline{\omega} = \sum_{k=1}^{n} J_k\,(dx_k)^{-1} \wedge \underline{dx}.$$

On vérifie bien qu'on a pour toute hypersurface Σ :

(IX, 2; 12) $$\int_\Sigma J_\nu\,dS = \int_\Sigma i(\vec{J})\,\tau.$$

On considère en général qu'à côté du courant il y a une distribution de charges, définie dans R^n ou sur un espace de Riemann par une densité continue ρ (dépendant du temps), ou, sur une variété quelconque V^n par une n-forme impaire $\underline{\overset{n}{\varpi}}$ (dépendant du temps); sur un espace de Riemann, $\rho\underline{\tau} = \underline{\varpi}$, et, sur R^n, $\rho\,\underline{dx} = \underline{\varpi}$. Les formes $\underline{\omega}$ et $\underline{\varpi}$ ne sont pas indépendantes; entre elles existe une relation dépendant de la quantité de charges créée à chaque instant. S'il n'y a pas de création de charges, alors, pour tout volume Ω de V, limité par une hypersurface Σ de classe C^1, l'augmentation de la charge de Ω par unité de temps, c'est-à-dire $\frac{d}{dt}\int_\Omega \underline{\varpi}$, est égale au flux de courant entrant dans Ω par Σ, soit $-\int_\Sigma \underline{\omega}$ (le sens de passage de Σ étant celui de bord de Ω). L'équation

(IX, 2; 13) $$\frac{d}{dt}\int_\Omega \underline{\varpi} = -\int_\Sigma \underline{\omega} = -\int_\Omega d\underline{\omega}$$

pour tout Ω, est équivalente à l'équation de continuité ou de conservation des charges

(IX, 2; 13 *bis*) $$d\omega + \frac{\partial\varpi}{\partial t} = 0.$$

Dans un espace de Riemann, $d\underline{\omega} = d(i(\vec{J})\underline{\tau}) = \theta(\vec{J})\,\underline{\tau}$(¹) $= (\operatorname{div}\vec{J})\,\underline{\tau}$, et (IX, 2; 13 *bis*) s'écrit :

(IX, 2; 13 *ter*) $$\operatorname{div}\vec{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0.$$

Ce que nous venons de dire n'est pas lié à la nature électrique du « fluide »; c'est valable aussi en hydrodynamique. Il y a bien entendu d'autres relations qui interviennent dans les différents cas (équations de Maxwell par exemple).

On dit que le courant admet un champ de vitesses $\vec{v}$ (champ de vecteurs sur V^n, dépendant du temps), si

(IX, 2; 13 *quarto*) $$\underline{\omega} = i(\vec{v})\,\underline{\varpi},$$

ou, sur un espace de Riemann,

(IX, 2; 13 *quinto*) $$\vec{J} = \rho\vec{v}.$$

Dans ce cas, l'équation de conservation des charges s'écrit :

(IX, 2; 13 *sexto*) $$\theta(\vec{v})\,\varpi + \frac{\partial\varpi}{\partial t} = 0$$

(car $\theta(\vec{v})\ \underline{\varpi} = d\,i\,(v)\,\underline{\varpi} = d\underline{\omega}$); sur un espace de Riemann :

(IX, 2; 13 *septimo*) $$\operatorname{div}(\rho\vec{v}) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0;$$

c'est une relation entre $\underline{\varpi}$ (ou ρ) et $\vec{v}$. L'existence d'un champ de vitesses est une condition assez restrictive, nous verrons des exemples simples où il n'y en a pas. Si la forme ϖ ne s'annule en aucun point, il existe toujours un champ de vecteurs unique $\vec{v}$ tel que $\underline{\omega} = i(v)\,\underline{\varpi}$; ce champ est C^m si $\underline{\varpi}$ et $\underline{\omega}$ sont C^m. Mais il n'y a aucune raison de supposer que $\underline{\varpi}$ ne s'annule en aucun point; un zéro isolé de $\underline{\varpi}$ sera généralement une singularité de $\vec{v}$.

On pourra alors, plus généralement, considérer qu'un courant électrique sur une variété V^n est un $(n-1)$-courant impair $\overset{n-1}{\underline{\Omega}}$ quelconque; il pourra lui être associé une distribution de charges $\overset{n}{\underline{\Pi}}$,

(¹) $\theta(\vec{J})$ est la transformation infinitésimale définie par J ; $\theta(\vec{J}) = di\,(\vec{J}) + i\,(\vec{J})\,d$

n-courant impair (tous deux dépendant du temps). L'équation de conservation des charges sera $d\underline{\Omega} + \frac{\partial \underline{\Pi}}{\partial t} = 0$ (nous définirons plus loin le cobord d'un courant, voir (IX, 3; 10)). Il y aura un champ de vitesses, $\vec{V}$, si $\underline{\Omega} = i(\vec{v})\,\underline{\Pi}$ (multiplication intérieure d'un courant par un champ de vecteurs, voir (IX, 3; 6)), formule qui n'a un sens que si le champ $\vec{v}$ est C^∞, condition trés restrictive qui ne sera généralement pas réalisée; et alors l'équation de conservation des charges sera $\theta(\vec{v})\,\underline{\Pi} + \frac{\partial \underline{\Pi}}{\partial t} = 0$ (action d'une transformation infinitésimale sur un courant, formule (IX, 3; 29)). On aura des formules correspondantes sur R^n, avec un champ de vecteurs-distribution $\vec{J}$ et une distribution P : $\underline{\Pi} = P\,\underline{dx}$ et $\overset{n-1}{\underline{\Omega}} = \sum_{k=1}^{n} J_k\,(dx_k)^{-1} \wedge \underline{dx}$ (voir expression des courants sur R^n, formule (IX, 3; 2)). Ceci se traduira pour

$$\overset{1}{\varphi} = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k dx_k = \overset{1}{\mathfrak{D}}, \text{ et pour } \overset{0}{\psi} \in \overset{0}{\mathfrak{D}}, \text{ par :}$$

$$\text{(IX, 2; 13 } octavo) \quad \begin{cases} \overset{1}{\varphi} \cdot \overset{n-1}{\underline{\Omega}} = \sum_{k=1}^{n} J_k(\varphi_k), \\ J_k\,(\overset{0}{\psi}) = \overset{0}{\psi}\, dx_k \cdot \overset{n-1}{\underline{\Omega}}. \end{cases}$$

Voici quelques exemples de courants électriques :

Exemple 7 a. Courant linéaire

Considérons une « ligne » représentée par exemple par une sous-variété Γ continuement différentiable fermée à une dimension, et soit $\underline{j}$ une fonction réelle tordue localement sommable, sur la variété Γ. Elle associe donc à chaque point de Γ un système de deux nombres réels opposés, respectivement associés aux deux sens de parcours possibles de Γ au voisinage de ce point. On peut parler d'un courant électrique traversant la ligne Γ avec l'intensité $\underline{j}$; cela donnera deux intensités de signes contraires, suivant qu'on oriente Γ dans un sens ou dans l'autre; si par exemple, Σ est une surface munie d'un sens de passage, et coupant transversalement Γ en un point a, le flux de courant $\Phi(\Sigma)$ à travers Σ sera par défini-

tion, la valeur de $\underline{j}$ au point a, pour l'orientation de Γ associée au sens de passage de Σ. Montrons d'abord qu'on peut considérer localement le courant précédent comme limite d'un courant défini, comme les précédents, par un champ de vecteurs-intensité, de la façon suivante. Plaçons-nous dans un ouvert assez petit, pour qu'il soit représentable, par une carte, sur un ouvert de R^n, Γ venant sur l'axe des x_1. Considérons un tube cylindrique entourant cet axe, et le champ $\vec{j}_\varepsilon$, nul en dehors de ce tube, et, à l'intérieur du tube, parallèle à Ox_1 et de mesure algébrique, dans l'hyper-plan $x_1 = c_1$, $\varepsilon^{-1} j_+(c_1)$ (valeur de $\underline{j}$ au point c_1 de Γ, pour l'orientation $\overrightarrow{Ox_1}$ de Γ). Nous supposons que la base du tube a une aire $(n-1)$-dimensionnelle ε. Si alors Σ coupe transversalement Γ au point a ($x_1 = a_1$ sur Ox_1), le flux de ce courant est :

$$\text{(IX, 2, 14)} \qquad \Phi_\varepsilon(\Sigma) = \varepsilon^{-1} \int_\Sigma j_+(x_1)\, dx_2 \ldots, dx_n,$$

si le sens de passage de Σ est Ox_1, et son orientation déduite de là à partir de l'orientation de R^n. Quand on fait tendre l'épaisseur du tube vers 0, $\varepsilon \to 0$, $\Phi_\varepsilon(\Sigma)$ tend vers $j_+(a_1) = \Phi(\Sigma)$. Il est donc légitime de dire que le courant électrique défini par la donnée de Γ et de $\underline{j}$ dans la carte considérée, est limite [1] de celui qui est défini par le champ $\vec{j}_\varepsilon$. Or $\vec{j}_\varepsilon$ est associé à la $(n-1)$-forme impaire $\overset{n-1}{\underline{\omega}}_\varepsilon$ égale à 0 en dehors du tube et à $\varepsilon^{-1} j_+(x_1)\,(dx_1)^{-1} \wedge \underline{dx}$ dans le tube. Comme $(n-1)$-courant impair, cette forme impaire vérifie

$$\text{(IX, 2; 15)} \qquad \overset{1}{\varphi} \cdot \underline{\omega} = (\Sigma\, \varphi_k\, dx_k) \cdot \underline{\omega} =$$
$$= \varepsilon^{-1} \int_{\text{tube}} j_+(x_1)\, \varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, \underline{dx},$$

qui, pour $\varepsilon \to 0$, tend vers $\int_\Gamma \underline{j}\, \varphi$.

Nous sommes donc amenés à *définir* correctement le $(n-1)$-courant impair associé à Γ et à la fonction tordue $\underline{j}$ sur Γ, par la formule :

$$\text{(IX, 2; 16)} \qquad \overset{1}{\varphi} \cdot \overset{n-1}{\underline{\Omega}} = \int_\Gamma \underline{j}\, \varphi.$$

Le second membre a bien un sens, si $\underline{j}$ est localement sommable

[1] Il s'agit bien de limite dans l'espace des courants

sur la ligne Γ ($\underline{j}\,\varphi$ est une 1-forme tordue sur Γ, son intégrale a un sens), et définit bien un $(n - 1)$-courant impair. (Le premier membre vaut aussi : $(-1)^{n-1}\,\underline{\Omega}\,.\,\varphi$). Ce courant a été appelé $(-1)^{n-1}\,\Gamma \wedge j$ à l'exemple 5 page 328.

Dans R^n (Γ étant ici quelconque, et non plus dirigée suivant Ox_1 comme dans la carte précédente) on peut dire aussi qu'il lui est associé la distribution-champ de vecteurs $\vec{J}$, dont les composantes sont les distributions J_k :

(IX, 2; 17) $$J_k(\varphi) = \int_\Gamma \underline{j}\,\varphi\, dx_k,\ \varphi \in \mathcal{D}.$$

Exemple 7 b. Courant d'une particule ponctuelle animée d'une vitesse

Considérons le courant électrique défini, à un instant donné, par une masse ponctuelle e au point a, animée d'une vitesse $\vec{v}$, vecteur tangent en a à V^n. En le considérant ici encore sur une carte, comme limite, pour $\varepsilon \to 0$, d'un champ de vecteurs-intensité, ayant pour valeur $\varepsilon^{-1}e\vec{v}$ dans un volume ε entourant le point a, et 0 en dehors, on voit que ce courant électrique peut être *défini* par le $(n - 1)$-courant impair $\overset{n-1}{\underline{\Omega}}$ tel que

(IX, 2; 18) $$\overset{1}{\varphi}.\ \overset{n-1}{\underline{\Omega}} = e < \vec{v}, \overset{1}{\varphi}(a) >,$$

qui n'est autre, au signe $(-1)^{n-1}$ près, que celui qui a été donné à l'exemple 3 page 325 (pour $k = 1$), avec $\vec{X} = e\vec{v}$. Dans R^n, il est défini par un champ de vecteurs-distributions $\vec{J}$, dont les composantes sont les $ev_k\delta_{(a)}$, où les v_k sont les composantes de la vitesse. Nous avons bien signalé, à l'exemple 6 précédent, qu'il ne fallait pas confondre les deux courants définis par les formules (IX, 2; 5) et (IX, 2; 7). Le deuxième est une charge électrique, le doublet, n-courant impair; le premier est une intensité de courant électrique, définie par une charge en mouvement, $(n - 1)$-courant impair.

Nous avons considéré ici $a \in V$, e, $\vec{v}$ comme fixés. Mais on peut imaginer un point a se déplaçant sur V en fonction du temps, $\vec{v}$ étant à chaque instant sa vitesse. Si alors on appelle $\underline{\Pi}$ la charge, n-courant impair, qui, à chaque instant, est définie par $e\delta_{(a)}$, on voit que $\underline{\Pi}$ et $\underline{\Omega}$ sont associés comme il est dit page 331. Il y a ici un champ des vitesses, n'importe quel champ C^∞ de vecteurs égal,

au point a, à la vitesse $\vec{v}$ de a. En fonction des définitions qui seront données plus tard, nous laissons au lecteur le soin de vérifier que $d\underline{\Omega} + \frac{\partial \Pi}{\partial t} = 0$, et $\underline{\Omega} = i(\vec{v})\,\underline{\Pi}$ $\left(\frac{\partial \Pi}{\partial t}\right.$ est le doublet en a de moment $\left.e\vec{v}\right)$. Si l'on prend un courant formé de la somme d'une forme C^∞, $\overset{n-1}{\underline{\omega}}$, ayant un champ de vitesses C^∞, $\vec{w}$, et du courant vu à l'instant, correspondant à une vitesse $\vec{v}$ en a différente de $\vec{w}(a)$, on aura un courant auquel n'est attaché aucun champ de vitesses continu.

Nous laissons aussi au lecteur le soin de montrer comment l'exemple 7 b est un cas limite de 7 a, quand la longueur de Γ tend vers 0, cependant que la fonction j tend vers l'infini, de façon convenable (dans R^n, on pourra prendre pour Γ le segment $(a, a + \vec{v}\varepsilon)$, avec $j = \frac{e}{\varepsilon}$ dans le sens de $\vec{v}$).

Exemple 7 c. Courant défini par une particule immobile ayant un spin

Considérons une charge électrique ponctuelle e, placée à l'origine de R^3, et munie d'un spin de valeur S, suivant l'axe Oz. Nous entendons par là que cette charge est la « limite », lorsque $r \to 0$, d'une charge e, de masse d'inertie m, placée dans le plan $z = 0$, sur le cercle de centre 0 et de rayon r, et tournant avec la vitesse linéaire $v = \frac{S}{mr}$, de façon que son moment cinétique en O soit dirigé suivant Oz et de mesure algébrique S. Si nous imaginons r fixé, et une vitesse grande, ce qui est le cas si r est petit, nous pouvons « remplacer » le courant, constitué à chaque instant par la seule charge e, par un « courant moyen » traversant le cercle Γ_r dans le sens direct, avec une intensité moyenne j_r égale au produit de e par le nombre de tours par seconde, donc

$$j_r = \frac{ev}{2\pi r} = \frac{eS}{2\pi mr^2}.$$

Cette substitution faite, le courant mathématique correspondant à celui qui est défini par le cercle Γ_r et l'intensité j_r est $\overset{2}{\underline{\Omega}}_r$ défini par la formule (IX, 2; 16) :

$$\text{(IX, 2; 19)} \quad (\alpha\, dx + \beta\, dy + \gamma\, dz) \,.\, \overset{3}{\underline{\Omega}}_r = \int_{\Gamma_r} \frac{eS}{2\pi mr^2} (\alpha\, dx + \beta\, dy).$$

On a les développements de Taylor :

$$\text{(IX, 2; 20)}\quad \begin{aligned} \alpha(x, y) &= \alpha_{0.0} + \alpha_{1.0}x + \alpha_{0.1}y + O(r^2) \\ \beta(x, y) &= \beta_{0.0} + \beta_{1.0}x + \beta_{0.1}y + O(r^2) \end{aligned}$$

au voisinage de l'origine; comme

$$\int_{\Gamma_r} dx = \int_{\Gamma_r} dy = \int_{\Gamma_r} x\,dx = \int_{\Gamma_r} y\,dy = 0,$$

$$\text{(IX, 2; 21)}$$

$$\int_{\Gamma_r} x\,dy = \pi r^2, \int_{\Gamma_r} y\,dx = -\pi r^2$$

on a donc :

$$\text{(IX, 2; 22)}\quad (\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz)\,.\,\underline{\overset{2}{\Omega}}_r = (-\alpha_{0.1} + \beta_{1.0})\frac{eS}{2m} + O(r).$$

Si l'on fait tendre r vers 0, on voit qu'on est amené à faire correspondre à la particule à spin le 2-courant impair défini par

$$\text{(IX, 2; 23)}\quad \begin{aligned} (\alpha\,dx + \beta\,dy + \gamma\,dz)\,.\,\underline{\overset{2}{\Omega}} &= (\beta_{1.0} - \alpha_{0.1})\frac{eS}{2m} \\ &= \left(\frac{\partial\beta}{\partial x}(0,0,0) - \frac{\partial\alpha}{\partial y}(0,0,0)\right)\frac{eS}{2m}. \end{aligned}$$

Si l'on cherche le champ de vecteurs-distribution $\vec{J}$ associé, on voit que les trois composantes sont les trois distributions suivantes de R^3 :

$$\text{(IX, 2; 24)}\quad J_x(\varphi) = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}(0,0,0)\frac{eS}{2m},$$

$$J_y(\varphi) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(0,0,0)\frac{eS}{2m}, J_z = 0.$$

Autrement dit, J_x (resp. J_y) est, dans R^3, le doublet placé à l'origine, de moment -1 (resp. $+1$), dirigé suivant Oy (resp. Ox). Le courant trouvé est d'ailleurs bien évidemment invariant par n'importe quelle rotation autour de Oz. On peut considérer que c'est un champ de vecteurs-distributions, dont la composante orthogonale sur Oz est nulle, et dont la composante orthogonale sur n'importe quelle direction du plan $z = 0$ est une distribution R^3, représentée par un doublet à l'origine, dont le moment

a la valeur $-\frac{eS}{2m}$ et est dirigé dans la direction perpendiculaire directe.

Un exemple comme celui-là montre toute la complexité et la richesse qu'apportent ici les distributions et les courants. Si l'on cherche la charge $\underline{\Pi}$ qu'on peut associer à $\underline{\Omega}$ comme dit page 330, on est amené inévitablement à prendre $\underline{\Pi} = e\underline{\delta}$. Cette charge est « immobile », puisqu'elle ne fait que « tourner sur elle-même »; $\underline{\Pi}$ ne dépend pas du temps, $\frac{\partial \underline{\Pi}}{\partial t} = 0$, et on verra aisément que $d\underline{\Omega} = 0$. Il n'y a pas de champ C^∞ des vitesses $\vec{v}$ tel que $\underline{\Omega} = i(\vec{v})\,\underline{\Pi}$.

Ce sont ces différents exemples qui ont amené de Rham, quand il a introduit certains courants (voir p. 327) antérieurement aux distributions, à leur donner précisément le nom de *courants*.

Courants $\geqslant 0$

La définition de deux courants complexes conjugués est triviale. *Un n-courant impair T est dit* $\geqslant 0$, si $\underline{T}(\varphi) \geqslant 0$ pour $\varphi \geqslant 0$, $\varphi \in \overset{0}{\mathfrak{D}}$. On peut définir la notion de n-forme impaire $\geqslant 0$: une n-forme impaire est dite $\geqslant 0$, si la n-forme ordinaire qui la définit rur $\tilde{V}$ est $\geqslant 0$ par rapport à l'orientation de $\tilde{V}$. Alors une n-forme impaire localement sommable est $\geqslant 0$, si et seulement si le courant qu'elle définit est $\geqslant 0$ au sens ci-dessus. Nous dirons ensuite *qu'un* 0-*courant pair* T *est* $\geqslant 0$, si $T(\varphi) \geqslant 0$ pour toute $\varphi \geqslant 0$, $\varphi \in \underline{\overset{n}{\mathfrak{D}}}$. Par exemple une fonction localement sommable $\geqslant 0$ est un 0-courant pair $\geqslant 0$. Une mesure $\geqslant 0$ est un n-courant impair $\geqslant 0$. On démontre (théorème V du chap. I) *qu'un courant positif est d'ordre zéro.*

Courants pairs et impairs sur une variété orientée

Si V est orientée, il existe un isomorphisme canonique entre les espaces de courants pairs et de courants impairs, transposé de l'isomorphisme correspondant entre les formes, et induisant sur les espaces de formes ce même isomorphisme. On voit aussi, de la même manière, que, si V est connexe et orientable, on pourra définir un courant pair sur V comme un couple de deux courants impairs opposés, respectivement associés aux deux orientations de V.

(Nous avons défini une forme impaire comme un couple de deux formes paires opposées. Nous n'avons pas, à ce moment-là, songé à définir une forme paire comme un couple de deux formes impaires opposées associées aux deux orientations de V; cela tient à ce que c'est la notion de forme paire qui était la notion la plus simple. Mais naturellement, il aurait été possible de le faire. De la même manière, nous définissons ici un courant pair comme couple de deux courants impairs opposés, associés aux deux orientations de V, car c'est ici la notion de courant impair qui apparaît comme la plus simple. Mais il est évidemment parfaitement possible de faire le contraire) [1].

Courants et distributions

Soit $\underline{\alpha}$ une n-forme tordue indéfiniment différentiable, et partout > 0 (autrement dit $\geqslant 0$, et $\neq 0$ en tout point de V). Alors $\varphi \to \underline{\alpha}\varphi$ est un isomorphisme de $\overset{0}{\mathfrak{D}}$ sur $\underline{\overset{*}{\mathfrak{D}}}$. On peut donc aussi par transposition définir un isomorphisme, que nous noterons $T \to T\underline{\alpha}$, de $\underline{\overset{0}{\mathfrak{D}}'}$ dans $\underline{\overset{*}{\mathfrak{D}}'}$: $T\underline{\alpha}(\varphi) = T(\underline{\alpha}\varphi)$ [2]. Ainsi l'existence d'une forme telle que $\underline{\alpha}$ permet des identifications. En particulier, une fonction f localement sommable, 0-courant pair, peut s'identifier à la mesure $\underline{\alpha}f$, n-courant impair.

Si V est orientée et si $\underline{\alpha}$ est une n-forme impaire comme ci-dessus,

(1) On peut aussi représenter autrement les courants pairs sur une variété V, en se ramenant à la notion plus simple de courant impair. L'application $\underline{\varphi} \to \tilde{\varphi}$ de $\underline{\mathfrak{D}}$ (V) dans $\mathfrak{D}$ ($\tilde{V}$) a pour transposée une application de $\underline{\mathfrak{D}'}$ ($\tilde{V}$) dans $\mathfrak{D}'$ (V); on voit sans peine que sa restriction au sous-espace de $\underline{\mathfrak{D}'}$ ($\tilde{V}$) formé des courants impairs σ-anti-invariants est un isomorphisme de cet espace sur $\mathfrak{D}'$ (V). On peut donc représenter un courant pair T sur V par un courant impair $\underline{\tilde{T}}$ sur $\tilde{V}$, σ-anti-invariant (de la même manière qu'une forme impaire $\underline{\omega}$ sur V était une forme paire $\tilde{\omega}$ sur $\tilde{V}$, σ-anti-invariante). Nous introduirons un facteur $\frac{1}{2}$, et choisirons la correspondance de manière que, pour $T \in \mathfrak{D}'$ (V), $\underline{\varphi} \in \underline{\mathfrak{D}}$ (V), on ait $T(\underline{\varphi}) = \frac{1}{2}\underline{\tilde{T}}(\tilde{\varphi})$. Si en particulier T est défini par une forme ω localement sommable sur V, on a aussi : $\int_V \omega \wedge \underline{\varphi} = \frac{1}{2}\int_{\tilde{V}} (P^*\omega) \wedge \tilde{\varphi}$ (d'après IX, 2; 3). Donc $\underline{\tilde{T}}$ est le courant impair défini par la forme impaire associée par l'orientation de $\tilde{V}$ à la forme paire $P^*\omega$

(2) Cette notation $T\alpha$ sera justifiée au § 3 (multiplication d'un courant par une forme C^∞)

on a une identification canonique entre formes paires et impaires du même degré, entre courants pairs et impairs du même degré, et d'autre part on peut identifier les degrés 0 et n. Dans ce cas, on appellera distribution sur V un courant, indifféremment pair ou impair, indifféremment de degré 0 ou de degré n. C'est ce que nous avons fait sur R^n, en prenant l'orientation canonique de R^n, et en prenant pour $\underline{\alpha}$ la mesure de Lebesgue $\underline{dx}$. La définition de distribution que nous avons donnée au chapitre I, correspondrait plutôt à celle de n-courant impair, puisque nous avons pris pour φ des fonctions. Mais comme nous considérons aussi une fonction f localement sommable comme définissant une distribution, les distributions étaient alors plutôt des 0-courants pairs. En réalité il n'y avait pas lieu de faire ces distinctions. Par contre si V n'est pas orientée, et si l'on n'a pas choisi de forme fondamentale telle que $\underline{\alpha}$, le mot distribution est ambigu. Suivant les ouvrages, il désigne un 0-courant pair, de manière qu'une fonction soit une distribution particulière, ou bien un n-courant impair, faisant intervenir pour φ des fonctions. *Nous adopterons la convention suivant laquelle une distribution sur V est* un 0-*courant pair ; les distributions généralisent les fonctions. Notons que ce n'est pas conforme à la définition du paragraphe* 5, *chapitre I*, 3°, *où une distribution était un* n-*courant impair.*

Sections-distributions d'un espace fibré à fibres vectorielles

Soit V^n une variété, E un espace fibré de classe C^∞ sur V, à fibres espaces vectoriels de dimension finie; soit π la projection de E sur V. Au-dessus d'un point x de V, la fibre $\pi^{-1}(\{x\})$ sera notée E_x. On sait alors définir l'espace $\mathcal{E}^m(V; E)$ des sections de classe C^m de E, l'espace $\mathcal{E}(V; E)$ des sections de classe C^∞, et leurs sous-espaces $\mathcal{D}^m(V; E)$, $\mathcal{D}(V; E)$, de sections à support compact; ces espaces sont munis de topologies évidentes, que le lecteur définira lui-même. D'autre part, si E et F sont deux tels espaces fibrés sur V, on peut définir leur produit tensoriel fibré $E \otimes_V F$, dont la fibre en chaque point x de V est $E_x \otimes F_x$; et l'espace fibré dual E' de E, dont la fibre en x est le dual E'_x de E_x. Si E est l'espace fibré $\overset{p}{\Omega}$ est p-covecteurs tangents à V, $\mathcal{E}^m(V; \overset{p}{\Omega})$ n'est autre que l'espace des p-formes m fois continuement différentiables; si $\overset{p}{\underline{\Omega}}$ est l'espace fibré des p-covecteurs tangents tordus [soit $x \in V$; son

image réciproque $P^{-1}(\{x\})$ par la projection $P : \tilde{V} \to V$, est un couple de deux points du revêtement orienté $\tilde{V}$ de V; un p-covecteur tangent tordu en x est un système de deux p-covecteurs tangents à $\tilde{V}$, respectivement aux deux points de $p^{-1}(\{x\})$, σ-anti-invariant. On peut encore dire que c'est un couple de deux *p-covecteurs* tangents opposés en x, respectivement associés aux deux orientations de V en x. Les p-covecteurs tangents tordus en x forment trivialement un espace vectoriel $\underline{\overset{p}{\Omega}}_x$, et la collection $\underline{\overset{p}{\Omega}}$ des $\underline{\overset{p}{\Omega}}_x$ a une structure évidente d'espace fibré $\underline{\overset{p}{\Omega}}$ sur V], $\mathcal{E}^m(V; \underline{\overset{p}{\Omega}})$ est l'espace des p-formes tordues de classe C^m sur V. On conviendra d'appeler *p-forme ordinaire (resp. tordue) sur V, section de l'espace fibré E, une section du produit tensoriel fibré* $E \otimes_V \overset{p}{\Omega}$ *(resp.* $E \otimes_V \underline{\overset{p}{\Omega}}$*).*

On va maintenant introduire l'espace $\overset{n-p}{\mathfrak{D}}(V; E') = \mathfrak{D}(V; E' \otimes \overset{n-p}{\Omega})$ des $(n-p)$-formes C^∞ à support compact, sections de E'; son dual s'appellera espace des *p-courants impairs sur V, sections de E*, et sera noté $\underline{\overset{p}{\mathfrak{D}}}'(V; E)$. De même le dual de

$$\underline{\overset{n-p}{\mathfrak{D}}}(V; E') = \mathfrak{D}(V; E' \otimes \underline{\overset{n-p}{\Omega}})$$

sera l'espace des *p-courants pairs sections de E*, et sera noté $\overset{p}{\mathfrak{D}}'(V; E)$.

Soit ω une section p-forme de E, localement sommable. Si $\underline{\varphi} \in \underline{\overset{n-p}{\mathfrak{D}}}(V; E')$, on peut former leur produit extérieur $\omega \wedge \underline{\varphi}$, section de $\underline{\overset{n}{\Omega}} \otimes_V E \otimes_V E'$, qu'on peut contracter par l'application linéaire canonique de $E'_x \otimes E_x$ dans C définie en tout x de V par la dualité entre E'_x et E_x, en une section de $\underline{\overset{n}{\Omega}}$, c'est-à-dire une n-forme impaire, que nous noterons encore $\omega \wedge \underline{\varphi}$; elle est localement sommable à support compact, et on peut donc l'intégrer sur V. Alors $\underline{\varphi} \to \int_V \omega \wedge \varphi$ est une forme linéaire continue sur $\underline{\overset{n-p}{\mathfrak{D}}}(V; E')$, donc un p-courant pair section de E. Ainsi *une p-forme paire* $\overset{p}{\omega}$, *section de E, définit bien un p-courant pair, section de E;* de même pour formes et courants impairs, et nos définitions sont cohérentes. Si, comme il vient d'être dit, on appelle distributions sur V les 0-courants pairs, alors *les distributions sections de E sont les* 0-*cou-*

rants pairs sections de E, ou éléments de $\overset{0}{\mathfrak{D}}'(V\,;E)$, *dual de* $\overset{n}{\underline{\mathfrak{D}}}(V\,;E') = \mathfrak{D}(V\,;E' \otimes \overset{n}{\underline{\Omega}})$; *elles généraliseront les sections usuelles localement sommables de E.* Nous ne poursuivrons pas plus loin cette étude [1].

§ 3. Opérations élémentaires sur les courants

Première opération : produit extérieur d'un courant par une forme C^∞

Soient $\overset{p}{T}$, $\overset{q}{\alpha}$, un courant de degré p et une forme C^∞ de degré q respectivement, ordinaires ou tordus. On définira les produits extérieurs $T \wedge \alpha$ et $\alpha \wedge T$, courants de degré $p+q$, de manière que, si T est une forme ω localement sommable, on retrouve la forme $\omega \wedge \alpha$ ou $\alpha \wedge \omega$. Il suffit pour cela de poser :

$$(\text{IX}, 3; 1) \qquad < T \wedge \alpha, \varphi > = < T, \alpha \wedge \varphi >$$

en vertu de (IX, 2; 4); et $\overset{q}{\alpha} \wedge \overset{p}{T} = (-1)^{pq}\, \overset{p}{T} \wedge \overset{q}{\alpha}$.

Les propriétés de ce produit sont analogues à celles du chapitre v, et à celles du produit extérieur des formes usuelles.

Soit alors $\overset{p}{T}$ un p-courant (pair ou impair) sur un ouvert U de R^n. Il admet, tout comme une forme, une décomposition unique

$$(\text{IX}, 3; 2) \qquad \overset{p}{T} = \sum_{I} T_I\, dx_I,$$

où $I = \{ i_1, i_2, \dots i_p \}$ est une partie à p éléments de $\{1, 2, \dots, n\}$, $i_1 < i_2 \dots < i_p$, T_I un 0-courant (pair ou impair), et où dx_I est la p-forme $dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \dots \wedge dx_{i_p}$.

On peut identifier T_I à une distribution usuelle $\overset{0}{T}_I$ sur $U \subset R^n$. Elle est définie comme suit : si $\varphi \in \mathfrak{D}(U)$, on a

$$(\text{IX}, 3; 3) \quad < \overset{0}{T}_I, \varphi > = (-1)^{\rho(I, J)} < T, \varphi\, dx_J >,$$

où $J = \{ j_1, j_2, \dots, j_{n-p} \}$ est le complémentaire de I dans $\{1, 2, \dots n\}$, $j_1 < j_2 < \dots < j_{n-p}$, et où $\rho(I, J)$ est la signature de la permutation $(i_1, i_2 \dots, i_p, j_1, j_2 \dots, j_{n-p})$ de $(1, 2 \dots, n)$; en effet, (IX, 3; 1) donne bien, si on pose (IX, 3; 2), et si on suppose par exemple $\underline{T}$ tordue :

[1] Voir une autre manière de définir les sections distributions d'un fibré, valable même pour des fibres de dimension infinie, dans Schwartz [11], chap. II § 5, exemple 2, p. 140

$$(\mathrm{IX}, 3; 4) \quad < T, \varphi\, dx_J > = \sum_{I'} < T_{I'}\, dx_{I'}, \varphi\, dx_J >$$
$$= \sum_{I'} < T_{I'}, \varphi\, dx_{I'} \wedge dx_J > = (-1)^{\rho(I,J)} < \underline{T_I}, \varphi\, dx >$$
$$= (-1)^{\rho(I,J)} < \overset{0}{T}_I, \varphi >.$$

Ceci permettrait de définir à nouveau les courants sur une variété V, sans passer par une dualité, en utilisant une méthode de complétion. Voici comment. Pour que des courants $\overset{p}{S}$ convergent vers U dans $\overset{p}{\mathcal{D}}'$ (V), il est nécessaire et suffisant que, pour tout ouvert Ω de V, domaine d'une carte Φ sur un ouvert $U = \Phi(\Omega)$ de R^n (1) les restrictions des $\overset{p}{S}$ à Ω convergent vers 0. Pour cela, il est nécessaire et suffisant que les courants transportés $\overset{p}{T} = \Phi(\overset{p}{S})$ (par transport de structure) convergent vers 0 dans $\mathcal{D}'^p$ (U). Mais, si l'on utilise sur l'ouvert U la décomposition (IX, 3; 2), des courants $\overset{p}{T}$ convergent vers 0 si et seulement si chacune de leurs composantes $\overset{0}{T}_I$ converge vers 0 dans l'espace $\mathcal{D}'$ (U) des distributions sur U. Ainsi la topologie de $\overset{p}{\mathcal{D}}'$ (V) se ramène à des topologies d'espaces de distributions $\mathcal{D}'$ (U) sur des ouverts U de R^n. D'autre part, nous avons vu (p. 325) que l'espace $\overset{p}{\mathcal{E}}$ (V) est dense dans $\overset{p}{\mathcal{D}}'$ (V), autrement dit $\overset{p}{\mathcal{D}}'$ (V) peut s'identifier à un complété de $\overset{p}{\mathcal{E}}$ (V), pour la topologie induite par $\overset{p}{\mathcal{D}}'$ (V). On pourra donc définir directement $\overset{p}{\mathcal{D}}'$ (V) comme suit. On dira que des $\omega \in \overset{p}{\mathcal{E}}$ (V) convergent vers 0 au sens des courants, si, pour chaque carte Φ d'un ouvert Ω de V sur un ouvert U de R^n, les $\varpi = \Phi\,\omega$ convergent vers 0 au sens des courants; et on dira que les $\varpi = \sum \varpi_I\, dx_I$ convergent vers 0 au sens des courants, si les ϖ_I (fonctions ou fonctions tordues) convergent vers 0 *dans l'espace des distributions* $\mathcal{D}'$ (U). Ceci introduit sur l'espace $\overset{p}{\mathcal{E}}$ (V) des p-formes C^∞ sur V une topologie; son complété pour cette topologie sera par définition $\overset{p}{\mathcal{D}}'$ (V). Ceci vaut aussi bien pour des courants pairs ou impairs. Au lieu de toutes les cartes, on peut se borner à celles d'un atlas. Cette définition par complétion ne présente habituellement aucun avantage sur la définition initiale par dualité. Toutefois on remarquera ainsi que beaucoup d'opérations élémentaires sur les courants, au lieu d'être

(1) Ou R^n_-; nous ne le répéterons pas

définies par dualité et transposition, peuvent être définies en prolongeant par continuité, de $\mathcal{E}$ (V) à $\mathcal{D}'$ (V), des propriétés connues pour les formes usuelles. Par exemple, la multiplication par une forme C^∞ de degré q, $\overset{p}{\omega} \to \overset{p}{\omega} \wedge \overset{q}{\alpha}$, est linéaire continue de $\overset{p}{\mathcal{E}}$ (V) dans $\overset{p+q}{\mathcal{E}}$ (V), pour les topologies des courants, comme on le voit immédiatement sur des cartes; elle se prolonge donc d'une manière unique en une multiplication $\overset{p}{\mathrm{T}} \to \overset{p}{\mathrm{T}} \wedge \alpha^q$ de $\overset{p}{\mathcal{D}'}$ (V) dans $\overset{p+q}{\mathcal{D}'}$ (V), ce qui donne une définition de la multiplication sans dualité ni transposition.

Deuxième opération : multiplication intérieure par un champ C^∞ de multivecteurs

Bornons-nous au cas d'un champ de *vecteurs* ξ, indéfiniment différentiable. Soit $\overset{p}{\omega}$ une p-forme localement sommable, paire ou impaire, et $\overset{n-p+1}{\varphi}$ une $(n-p+1)$ forme C^∞ à support compact de l'autre parité.

Alors $\overset{p}{\omega} \wedge \varphi$ est nulle, puisque de degré $n+1$. Donc :

$$(i\,(\xi)\,\overset{p}{\omega} \wedge \varphi) + (-1)^p\,(\omega \wedge i\,(\xi)\,\varphi) = i\,(\xi)\,(\omega \wedge \varphi) = 0.$$

On a donc :

$$\text{(IX, 3; 5)} \qquad \int_V i\,(\xi)\,\omega \wedge \varphi = (-1)^{p-1} \int_V \omega \wedge i\,(\xi)\,\varphi$$

(intégrales de n-formes impaires localement sommables à support compact).

Nous sommes donc amenés à définir $i\,(\xi)\,\mathrm{T}$, pour un p-courant, par :

$$\text{(IX, 3; 6)} \quad < i\,(\xi)\,\overset{p}{\mathrm{T}}, \varphi > = (-1)^{p-1} < \overset{p}{\mathrm{T}}, i\,(\xi)\,\varphi >.$$

Ce produit peut aussi se définir en prolongeant par continuité le produit correspondant pour des formes, et il a les propriétés qu'on attend de lui.

Troisième opération : cobord d'un courant

Supposons d'abord V sans bord. Soit $\overset{p}{\omega}$ une p-forme de classe C^1,

paire ou impaire, et soit φ une $(n - p + 1)$-forme C^∞ à support compact, de l'autre parité. On a alors :

$$\text{(IX, 3; 7)} \quad d(\omega \wedge \varphi) = d\omega \wedge \varphi + (-1)^p \omega \wedge d\varphi.$$

Mais, d'après la formule de Stokes, $\omega \wedge \varphi$ étant de classe C^1 à support compact et V sans bord, on a :

$$\text{(IX, 3; 8)} \qquad \int_V d(\omega \wedge \varphi) = \int_{bV} \omega \wedge \varphi = 0.$$

On a donc :

$$\text{(IX, 3; 9)} \qquad \int_V d\omega \wedge \varphi = (-1)^{p-1} \int_V \omega \wedge d\varphi$$

Nous sommes donc amenés à poser, pour un p-courant T, pair ou impair :

$$\text{(IX, 3; 10)} \qquad < d\overset{p}{T}, \varphi > = (-1)^{p-1} < T, d\varphi >,$$

de manière que, si T est une forme ω de classe C^1, dT soit la forme usuelle $d\omega$.

On a bien évidemment $dd\mathrm{T} = 0$.

D'autre part, si α est une forme C^∞, on a la formule attendue :

$$\text{(IX, 3; 10 \textit{bis})} \quad d(\overset{p}{T} \wedge \alpha) = dT \wedge \alpha + (-1)^p T \wedge d\alpha.$$

Nous laissons la démonstration au lecteur (on suivra la méthode du théorème IV du chap. v; d'ailleurs nous démontrerons plus loin cette formule dans le cas plus compliqué où V a un bord, voir (IX, 3; 25)).

Si $V^n = R^n$, et si T a la décomposition (IX, 3; 2), on a la formule usuelle

$$\text{(IX, 3; 10 \textit{ter})} \qquad \begin{cases} d\left(\sum_{I} T_I \, dx_I\right) = \sum dT_I \wedge dx_I, \\ dT_I = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{\partial T_I}{\partial x_k} \, dx_k \end{cases}$$

et aussi

$$\text{(IX, 3; 10 \textit{quarto})} \qquad dT = \sum_{k=1}^{n} dx_k \wedge \frac{\partial T}{\partial x_k}$$

pour T de degré quelconque.

On pourrait aussi définir directement dT sur une variété par la méthode de complétion. L'application $\omega \to d\omega$ est continue de $\overset{p}{\mathcal{E}}(V)$ dans $\overset{p+1}{\mathcal{E}}(V)$ pour les topologies des courants, comme on le voit trivialement sur des cartes; elle se prolonge donc par continuité, de manière unique, en une application $T \to dT$ de $\overset{p}{\mathfrak{D}'}(V)$ dans $\overset{p+1}{\mathfrak{D}'}(V)$. Les formules (IX, 3; 10 *bis*, 10 *ter*, 10 *quarto*) sont alors évidentes par continuité.

Soit $\overset{p}{\mathfrak{Z}'}$ l'espace des p-courants fermés, c'est-à-dire de cobord nul; soit $\overset{p}{\mathfrak{B}'}$ l'espace des cobords de courants de degré $p-1$; alors $\overset{p}{\mathfrak{Z}'}/\overset{p}{\mathfrak{B}'}$ est l'espace vectoriel de cohomologie de degré p de V pour les courants. On définit de même une cohomologie tordue et des cohomologies à support compact. On verra plus loin (théorème 1 p. 355) l'identité de la cohomologie des courants et de celle des formes C^∞, si V est sans bord. La formule (IX, 3; 10 *bis*) montre en tout cas trivialement que l'espace vectoriel de cohomologie des courants, somme directe des espaces de cohomologie des divers degrés, est un module sur l'algèbre de cohomologie des formes C^∞.

Exemple 1. Formes présentant des discontinuités

La formule (IX, 3; 10) est évidemment apparentée à la formule (II, 1; 6). On peut donc donner des exemples analogues à ceux du chapitre II.

Soit par exemple ω une p-forme, présentant un saut le long d'une hypersurface fermée Σ de classe C^1. On suppose donc ω de classe C^1 dans $\complement\Sigma$; en outre, si $x \in \complement\Sigma$ tend vers $a \in \Sigma$ d'un côté Σ_1 de Σ, le p-covecteur $\omega(x)$ a une limite $\omega_1(a)$, tandis que si x tend vers a de l'autre côté Σ_2, $\omega(x)$ a une autre limite $\omega_2(a)$. Le saut de ω, quand on traverse Σ dans le sens $\Sigma_1 \to \Sigma_2$, est $\omega_2(a) - \omega_1(a)$ au point a. On doit noter que ceci est purement local: globalement, il peut n'être pas possible de distinguer deux faces de Σ (exemple : ceinture de Möbius dans R^3).

De toute façon, on ne considérera ces deux fonctions ω_1, ω_2, que comme définies localement, et elles sont alors continues. On supposera en outre que les dérivées premières des coefficients de ω ont aussi des discontinuités de 1re espèce le long de Σ. La forme ω admet alors un « cobord usuel $\{d\omega\}$, calculé comme suit :

on calcule $d\omega$ dans $\complement\Sigma$, c'est une $(p+1)$-forme définie presque partout sur V, mesurable et localement bornée sur V donc définissant un $(p+1)$-courant $\{d\omega\}$. Nous cherchons à généraliser la formule (II, 3; 1) en établissant la relation entre $d\omega$, courant dérivé de ω, et $\{d\omega\}$. Nous montrerons qu'on a la formule

$$d\omega = \{d\omega\} + \Sigma \wedge \sigma, \tag{IX, 3; 11}$$

σ étant le saut de ω le long de Σ. Donnons d'abord avec précision la signification de cette formule. Supposons d'abord que Σ ait globalement 2 faces, Σ_1 et Σ_2. Choisissons sur Σ le sens de passage $\Sigma_1 \to \Sigma_2$. Nous avons déjà vu que ce sens de passage définit, en tout point a de Σ, une correspondance bijective entre les orientations de V et celles de Σ en a (voir exemple 7, p. 329).

Donc la donnée de Σ et de l'injection canonique orientée de Σ dans V (c'est-à-dire avec cette correspondance entre orientations) définit Σ comme une chaîne impaire, de dimension $n-1$ sur V, donc comme un 1-courant pair (formule (IX, 2; 6 *bis*)). Si alors σ est la forme $\omega_2 - \omega_1$ sur Σ, $\Sigma \wedge \sigma$ est un $(p+1)$-courant, déjà rencontré page 29, pair ou impair comme ω, et défini par

$$< \Sigma \wedge \sigma, \varphi > = \int_\Sigma \sigma \wedge \varphi, \tag{IX, 3; 12}$$

pour φ de degré $n-p-1$, de parité opposée à celle de ω. La formule (IX, 3; 11) est donc équivalente à

$$(-1)^{p-1} \int_V \overset{p}{\omega} \wedge \overbrace{d\varphi}^{n-p} = \int_V \{\overbrace{d\omega}^{p+1}\} \wedge \overset{n-p-1}{\varphi} + \int_\Sigma \overset{p}{\sigma} \wedge \overset{n-p-1}{\varphi} \tag{IX, 3; 13}$$

Il est facile de démontrer cette formule. Par partition de l'unité, il suffit de le faire localement. Elle est triviale au voisinage de tout point de $\complement\Sigma$. Soit donc $a \in \Sigma$. Soit Ω un voisinage de a, tel que le complément de Σ dans Ω ait 2 composantes connexes, Ω_1 et Ω_2, numérotées par les 2 faces de Σ. Soit ω_i $(i = 1, 2)$ la forme égale à ω dans Ω_i et à 0 ailleurs, et soit ψ_i la $(n-1)$-forme impaire $\omega_i \wedge \varphi$, φ à support compact dans Ω. La formule de Stokes donne :

$$\int_\Omega d\psi_i = \int_{\Omega_i} d\psi_i = \int_{b\Omega_i} \psi_i \tag{XI, 3; 14}$$

Si $i = 1$, $b\Omega_1$ est exactement la chaîne impaire Σ' de dimension $n-1$ définie ci-dessus, correspondant au sens de passage $\Sigma_1 \to \Sigma_2$;

mais, pour $i = 2$, $b\Omega_2$ est l'opposée $-\Sigma$ de cette chaîne impaire. On a donc, si $\psi = \omega \wedge \varphi$,

$$(\text{IX}, 3; 15) \quad \int_\Omega d\psi = \sum_{i=1,2} \int_{\Omega_i} d\psi_i$$
$$= \int_\Sigma (\psi_1 - \psi_2) = \int_\Sigma (\omega_1 - \omega_2) \wedge \varphi.$$

En explicitant $d\psi$, on trouve

$$\int_V \{d\omega\} \wedge \varphi + (-1)^p \int_V \omega \wedge d\varphi = -\int_\Sigma \sigma \wedge \varphi,$$

ce qui est exactement (IX, 3; 13).

Il était bien apparu que le fond de la formule (II, 2; 7) était l'intégration par parties; or celle-ci n'est autre que la combinaison de la formule $\int_a^b dF = F(b) - F(a)$, et de la formule de dérivation du produit, ou $d(FG) = dF\, G + F\, dG$; nous trouvons bien ici des généralisations de ces formules, en la formule de Stokes et celle du cobord d'un produit de formes.

Si on change le sens de traversée de Σ, on change de signe la chaîne impaire Σ, mais aussi le saut σ, et $\Sigma \wedge \sigma$ ne change pas. Comme, localement, Σ a toujours deux faces, $\Sigma \wedge \sigma$ peut toujours se définir localement, et sa définition est indépendante de la numérotation locale, donc $\Sigma \wedge \sigma$ a un sens global intrinsèque, et la formule (IX, 3; 11) est toujours vraie, même si Σ n'a pas globalement 2 faces. On peut d'ailleurs la transformer comme suit.

Soit $a \in \Sigma$, et soit Σ' l'une des faces de Σ au voisinage de a. Soit ω' la valeur de ω, sur Σ, limite du côté Σ'. La face Σ' détermine un sens de passage, de la face opposée à Σ' vers la face Σ', donc définit une chaîne impaire de dimension $(n-1)$, donc un 1-courant pair Σ'; alors $\Sigma' \wedge \omega'$ est un $(p+1)$-courant de même parité que ω. Si Σ'' est l'autre face de Σ au voisinage de a, on définit de même $\Sigma'' \wedge \omega''$. Si on pose $\Sigma_1 = \Sigma'$, $\Sigma_2 = \Sigma''$, alors ce que nous avons appelé Σ est $\Sigma'' = -\Sigma'$, de sorte que

$$(\text{IX}, 3; 16) \qquad \Sigma \wedge \sigma = \Sigma' \wedge \omega' + \Sigma'' \wedge \omega'',$$

et (IX, 3; 11) peut se remplacer par

$$(\text{IX}, 3; 17) \qquad d\omega = \{d\omega\} + \Sigma' \wedge \omega' + \Sigma'' \wedge \omega'',$$

où les 2 faces de Σ jouent des rôles symétriques; $\Sigma' \wedge \omega'$ et $\Sigma'' \wedge \omega''$ ne sont définis que localement, mais leur somme a un sens global.

Par exemple, soit Ω un ouvert de V, de bord Σ hypersurface de classe C^1, et situé, au voisinage de chaque point de Σ, d'un seul côté de Σ. Soit f une fonction de classe C^1 dans $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Sigma$, et nulle dans $\complement \overline{\Omega}$. Σ a un sens de passage comme bord de Ω, donc elle est une chaîne impaire de dimension $n - 1$, ou un 1-courant pair Σ. Alors le 0-courant pair f a pour cobord

$$df = \{df\} - f\Sigma. \tag{IX, 3; 18}$$

En termes de cobords, la formule (II, 2; 7) du chapitre II s'écrit :

$$df = \{df\} + \sigma_0 \delta, \tag{IX, 3; 19}$$

δ étant le 1-courant pair associé, par l'orientation canonique de R, à la mesure de Dirac δ. 1-courant impair.

Exemple 2

Soit Γ une chaîne, paire ou impaire, dimension k donc de degré $p = n - k$ (voir exemple 5, p. 326). La formule de Stokes appliquée à Γ donne :

$$\begin{aligned} < d\Gamma, \varphi > &= (-1)^{p-1} < \Gamma, d\varphi > \\ &= (-1)^{n-k-1} \int_\Gamma d\varphi = (-1)^{n-k-1} \int_{b\Gamma} \varphi \\ &= (-1)^{n-k-1} < b\Gamma, \varphi >. \end{aligned} \tag{IX, 3; 20}$$

Donc $\qquad d\Gamma = (n - 1)^{n-k-1}\, b\Gamma = (-1)^{p-1}\, b\Gamma$

Ceci nous amène à définir, pour tout courant T, de degré p ou de dimension k, $p + k = n$, son bord bT comme

$$b\overset{p}{T} = (-1)^{p-1}\, dT. \tag{IX, 3; 21}$$

On a alors toujours

$$< bT, \varphi > = < T, d\varphi >, \tag{IX, 3; 22}$$

et l'opération « bord » est exactement transposée de l'opération « cobord », sans changement de signe. Dans l'exemple étudié à (IX, 3; 18), si $f = 1$ dans $\overline{\Omega}$, le 0-courant pair f n'est autre que la n-chaîne impaire définie par $\overline{\Omega}$ et son injection canonique orientée dans V; alors (IX, 3; 18) donne $df = -\Sigma$, qui correspond bien, pour $p = 0$, à $bf = b\overline{\Omega} = +\Sigma$.

Exemple 3. Cobord d'un courant de Dirac (voir exemple 3, p. 325)

Soit $\vec{\mathfrak{M}}$ un 1-vecteur tangent en a à V. Il définit un $(n-1)$-courant impair $\underset{\sim}{S}$ (formule (IX, 2; 5). Son cobord $d\underset{\sim}{S}$ est un n-courant impair, qui n'est autre que le produit par $(-1)^n$ du courant $\underset{\sim}{T}$, associé au doublet de moment $\vec{\mathfrak{M}}$ en a, suivant la formule (IX, 2; 7). C'est en effet ce que montrent les formules (IX, 2; 7 et 8) :

$$< \overset{n-1}{d\,\mathrm{S}}, \varphi > = (-1)^n < \mathrm{S}, d\varphi > = (-1)^n < \mathrm{T}, \varphi >$$

ou $$d\mathrm{S} = (-1)^n \underline{\mathrm{T}}.$$

Exemple 4. L'angle solide

Reprenons les formules (IX, 2; 11 et 12) dans un espace vectoriel euclidien V de dimension n. Prenons pour J le champ des vecteurs unitaires radiaux. Pour un élément de surface dS en un point M de V, distinct de O, $\mathrm{J}_\nu\, d\mathrm{S} = \cos\theta\, d\mathrm{S}$, θ étant l'angle du rayon vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ avec la normale, orientée dans le sens de passage choisi sur S. Si r est la distance OM, l'angle solide algébrique sous lequel on voit dS de O est :

$$\frac{1}{r^{n-1}} \cos\theta\, d\mathrm{S} = \left(\frac{\vec{\mathrm{J}}}{r^{n-1}}\right)_\nu d\mathrm{S}.$$

Autrement dit, l'angle solide sous lequel on voit de O une hypersurface Σ ne passant pas par O et munie d'un sens de passage est

$$\int_\Sigma \frac{\mathrm{J}_\nu}{r^{n-1}}\, d\mathrm{S} = \int_\Sigma \underset{\sim}{\omega},$$

où $\overset{n-1}{\underset{\sim}{\omega}}$ est $(n-1)$-forme différentielle impaire dite « angle solide ».

Si $\mathrm{V} = \mathrm{R}^n$ avec sa structure euclidienne canonique et

$$r^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2,$$

les composantes de $\vec{\mathrm{J}}$ sont $\mathrm{J}_k = \dfrac{x_k}{r}$, et alors

$$\text{(IX, 3; 22}\,bis\text{)} \qquad \overset{n-1}{\underset{\sim}{\omega}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{r^{n-1}} \frac{x_k}{r}\, dx_k^{-1} \wedge \underset{\sim}{dx}.$$

La forme $\underset{\sim}{\omega}$, considérée comme définie presque partout sur R^n, est localement sommable, donc est un courant.

Cherchons, *dans* R^n, son cobord $d\omega$. C'est

$$\text{(IX, 3; 22}\,ter\text{)} \qquad d\omega = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{x_k}{r^n}\right) \underset{\sim}{dx}.$$

Mais $\frac{x_k}{r^n} = \left(-\frac{1}{n-2}\right)\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{r^{n-2}}$ (1), donc, en appliquant (II, 3; 10),

$$\text{(IX, 3; 22 \textit{quarto})} \quad d\,\overset{n-1}{\underline{\omega}} = \frac{-1}{n-2}\,\Delta\left(\frac{1}{r^{n-2}}\right)\underline{dx}$$

$$= S_n\,\overset{n}{\underline{\delta}}_r\; S_n \text{ aire de la sphère unité de } R^n.$$

Cobord d'un courant sur une variété V avec bord

Nous prendrons la même formule de définition (IX, 3; 10).

Si alors ω est une p-forme de classe C^1 sur V, son cobord $d\omega$, au sens des courants, n'est plus le même que son cobord usuel $\{d\omega\}$, *même si ω est C^∞*. La formule de Stokes donne en effet :

$$\text{(IX, 3; 23)} \quad < d\omega, \varphi > = (-1)^{p-1} < \omega, d\varphi >$$

$$= (-1)^{p-1}\int_{\underline{V}} \omega \wedge d\varphi = \int_{\underline{V}} d\omega \wedge \varphi$$

$$- \int_{\underline{V}} d(\omega \wedge \varphi) = \int_{\underline{V}} d\omega \wedge \varphi - \int_{\underline{bV}} \omega \wedge \varphi, \text{ ou}$$

$$\text{(IX, 3; 24)} \qquad d\omega = \{d\omega\} - bV \wedge \omega,$$

bV étant le 1-courant pair défini par la chaîne impaire bV de dimension $n-1$. *Tout se passe comme si on considérait la variété V comme prolongée au-delà de son bord, et ω comme prolongée par 0 : elle aurait alors une discontinuité de 1re espèce le long de* bV *et* (IX, 3; 24) *résulterait de* (IX, 3; 11). *C'est seulement si ω, de classe C^1 dans V, induit 0 sur le bord de V, que* $d\omega = \{d\omega\}$.

La formule de définition de dT doit alors s'écrire, pour éviter toute ambiguïté :

$$\text{(IX, 3; 24 \textit{bis})} \quad < d\overset{p}{\underset{\cdot\cdot}{T}}, \varphi > = (-1)^{p-1} < T, \{d\varphi\} >.$$

On a toujours ddT $= 0$. Si T est un p-courant, et α une q-forme C^∞, on aura :

$$\text{(IX, 3; 25)} \qquad < d(\overset{p}{T} \wedge \overset{q}{\alpha}), \varphi > = (-1)^{p+q-1} < T \wedge \alpha, \{d\varphi\} >$$
$$= (-1)^{p+q-1} < T, \alpha \wedge \{d\varphi\} >$$

(1) Pour $n \neq 2$; pour $n = 2$, remplacer $\frac{-1}{n-2}\frac{1}{r^{n-2}}$ par $\log r$. Le résultat final est le même

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^{p-1} < \mathrm{T}, \{d\,(\alpha \wedge \varphi)\} > \\
&\qquad\qquad + (-1)^p < \mathrm{T}, \{d\,\alpha\} \wedge \varphi\} > \\
&= < d\mathrm{T}, \alpha \wedge \varphi > + (-1)^p < \mathrm{T}, \{d\alpha\} \wedge \varphi > \\
&= < d\mathrm{T} \wedge \alpha, \varphi > + (-1)^p < \mathrm{T} \wedge \{d\alpha\}, \varphi >
\end{aligned}
$$

d'où la formule du cobord d'un produit :

$$(\mathrm{IX}, 3; 26) \quad d\,(\overset{p}{\mathrm{T}} \wedge \alpha) = d\overset{p}{\mathrm{T}} \wedge \alpha + (-1)^p\, \mathrm{T} \wedge \{d\alpha\}$$

(On remarquera qu'il ne faut pas écrire $\mathrm{T} \wedge d\alpha$, qui d'ailleurs n'aurait pas de sens, car $d\alpha$ n'est plus une forme C^∞) (¹).

Quatrième opération: dérivation d'un courant par une transformation infinitésimale

Soit ξ un champ de vecteurs C^∞, sur une variété V^n que nous supposerons d'abord sans bord. Soit $\overset{p}{\omega}$ une p-forme C^1, paire ou impaire, et φ une $(n-p)$-forme C^∞ à support compact de parité opposée. Rappelons que la transformation infinitésimale $\theta\,(\xi)$ sur les formes est une dérivation $(\theta\,(\xi)\,(\alpha \wedge \beta) = \theta\,(\xi)\,\alpha \wedge \beta + \alpha \wedge \theta\,(\xi)\,\beta)$, et peut s'exprimer par $\theta\,(\xi) = d\,.\,i\,(\xi) + i\,(\xi)\,.\,d$:

$$(\mathrm{IX}, 3; 27) \qquad \int_V \theta\,(\xi)\,\omega \wedge \varphi = \int_V \theta\,(\xi)\,(\omega \wedge \varphi) - \int_V \omega \wedge \theta\,(\xi)\,\varphi.$$

Mais $\displaystyle\int_V \theta\,(\xi)\,(\omega \wedge \varphi) = \int_V d\,(i\,(\xi)\,(\omega \wedge \varphi)) + \int_V i\,(\xi)\,d\,(\omega \wedge \varphi)$;

le dernier terme est nul, car le degré de $\omega \wedge \varphi$ est n, donc son cobord est nul; le terme précédent aussi, en vertu de la formule de Stokes, V étant sans bord. On en déduit :

$$(\mathrm{IX}, 3; 28) \qquad \int_V \theta\,(\xi)\,\omega \wedge \varphi = -\int_V \omega \wedge \theta\,(\xi)\,\varphi.$$

Nous sommes donc amenés à poser, pour un courant T, et une variété V avec ou sans bord, comme nous l'avons déjà fait pour définir le cobord d'un courant :

$$(\mathrm{IX}, 3; 29) \quad < \theta\,(\xi)\,\mathrm{T}, \varphi > = - < \mathrm{T}, \{\theta\,(\xi)\,\varphi\} >.$$

(¹) Puisque le cobord des courants n'induit plus sur les formes le cobord usuel, une formule comme (IX, 3; 26) ne peut plus se démontrer en la prolongeant par continuité de $\mathcal{E}\,(V)$ à $\mathcal{D}'\,(V)$

On peut alors donner toute une série d'exemples analogues à ceux que nous avons donnés pour le cobord. Il y aura lieu en particulier de noter que, si $\overset{\circ}{\omega}$ est de classe C^1, mais si V a un bord, $\theta(\xi)\,\omega$, calculé au sens des distributions, est différent de $\{\theta(\xi)\,\omega\}$, calculé au sens usuel, la différence étant une couche portée par bV :

$$
\begin{aligned}
<\theta(\xi)\,\omega, \varphi> &= -<\omega, \{\theta(\xi)\,\varphi\}> = -\int_V \omega \wedge \{\theta(\xi)\,\varphi\} \\
&= -\int_V \{\theta(\xi)\,(\omega \wedge \varphi)\} + \int_V \{\theta(\xi)\,\omega\} \wedge \varphi \\
&= -\int_V \{d\,(i(\xi)\,(\omega \wedge \varphi))\} + \int_V \{\theta(\xi)\,\omega\} \wedge \varphi \\
&= -\int_{bV} i(\xi)\,(\omega \wedge \varphi) + \int_V \{\theta(\xi)\,\omega\} \wedge \varphi.
\end{aligned}
$$

Utilisons la formule (IX, 3; 6) [1]

$$
\begin{aligned}
-\int_{bV} i(\xi)\,(\omega \wedge \varphi) &= -<bV, i(\xi)\,(\omega \wedge \varphi)> \\
&= -<i(\xi)\,bV, \omega \wedge \varphi> \\
&= -<i(\xi)\,(bV) \wedge \omega, \varphi>.
\end{aligned}
$$

D'où le résultat :

(IX, 3; 30) $\quad \theta(\xi)\,\omega = \{\theta(\xi)\,\omega\} - (i(\xi)\,bV)\,\omega.$

($i(\xi)\,b$V est un 0-courant pair, le signe $\wedge$ peut être supprimé entre lui et ω).

Supposons par exemple que V soit le segment $[0, 1]$ de R. L'orientation de R nous permettra de ne pas distinguer entre courants usuels ou tordus. Le bord bV est le 1-courant $\varphi \to \varphi(1) - \varphi(0)$, $\varphi \in \mathcal{D}([0, 1])$. Supposons que ξ soit le champ constant de vecteurs unité; $\theta(\xi)$ peut s'écrire $\frac{d}{dx}$, et on peut aussi écrire T' au lieu de $\theta(\xi)$ T. $i(\xi)b$V est le 0-courant $\varphi\,dx \to <bV, \varphi> = \varphi(1) - \varphi(0)$. Si alors f est une fonction de classe C^1 sur $[0, 1]$, $(i(\xi)\,bV)\,f$ est le 0-courant $\varphi\,dx \to f(1)\,\varphi(1) - f(0)\,\varphi(0)$. En appelant $\delta_{(a)}$ la mesure de Dirac en a considérée indifféremment comme 0-courant ou

[1] Cette formule supposerait ω de classe C^∞. Mais ici on peut passer à la limite en approchant ω par des formes C^∞, et ces calculs sont bien valables, si ω est seulement C^1

comme 1-courant par utilisation de la mesure dx, on voit que $(i(\xi)\, b\mathrm{V})\, f$ est $f(1)\,\delta_{(1)} - f(0)\,\delta_{(0)}$. Et alors (IX, 3; 30) devient, comme il était prévisible :

$$\text{(IX, 3; 31)} \qquad f' = \{f'\} - f(1)\,\delta_{(1)} + f(0)\,\delta_{(0)}.$$

Tout se passe, ici encore comme page 350, comme quand on prolonge V par une variété sans bord, ici R, en prolongeant f par 0.

La formule habituelle reliant $\theta(\xi)$, d, $i(\xi)$, est évidemment vraie pour les courants sur une variété, avec ou sans bord :

$$\text{(IX, 3; 32)} \qquad \theta(\xi)\,\overset{p}{\mathrm{T}} = di(\xi)\,\mathrm{T} + i(\xi)\,d\mathrm{T}.$$

On le verra en appliquant les formules de définition (IX, 3; 6), (IX, 3; 10) et (IX, 3; 29) :

$$\begin{aligned} &< \theta(\xi)\,\overset{p}{\mathrm{T}}, \overset{n-p}{\varphi} > = - < \overset{p}{\mathrm{T}}, \{\theta(\xi)\,\overset{n-p}{\varphi}\} > \\ &= - < \mathrm{T}, \{di(\xi)\,\overset{n-p}{\varphi}\} > - < \overset{p}{\mathrm{T}}, \{i(\xi)\,d\,\overset{n-p}{\varphi}\} > \\ &= (-1)^p < d\mathrm{T}, i(\xi)\,\varphi > + (-1)^p < i(\xi)\,\mathrm{T}, \{d\varphi\} > \\ &= < i(\xi)\,d\mathrm{T}, \varphi > + < di(\xi)\,\mathrm{T}, \varphi >, \end{aligned}$$

d'où le résultat. Il suffisait aussi de remarquer que la formule est vraie si T est une forme C^∞, que les formes C^∞ sont denses parmi les courants, et qu'il suffit alors de prolonger par continuité, lorsque V est sans bord.

De la même manière, si α est une forme C^∞, on a :

$$\text{(IX, 3; 33)} \qquad \theta(\xi)\,(\mathrm{T}\wedge\alpha) = \theta(\xi)\,\mathrm{T}\wedge\alpha + \mathrm{T}\wedge\{\theta(\xi)\,\alpha\}.$$

Théorèmes de de Rham en cohomologie

Soit $\overset{p}{\mathfrak{Z}}{}'$ l'espace des courants sur V, dont le cobord est nul (p-cocycles); $\overset{p}{\mathfrak{B}}{}'$ l'espace des cobords de courants de degré $p-1$; alors $\overset{p}{\mathfrak{B}}{}' \subset \overset{p}{\mathfrak{Z}}{}'$ et $\overset{p}{\mathfrak{Z}}{}'/\overset{p}{\mathfrak{B}}{}'$ est l'espace vectoriel de cohomologie de degré p de V pour les courants. On peut faire cela pour les courants pairs, ou pour les courants impairs; pour les courants à support quelconques ou à support compact, ou à Φ-support, c'est-à-dire à support appartenant à un ensemble Φ de parties fermées, saturé au sens suivant :

1° si $\mathrm{A} \in \Phi$, $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$, alors $\mathrm{B} \in \Phi$;

2° la réunion d'un nombre fini de fermés de Φ appartient à Φ;

3° tout fermé de Φ a un voisinage fermé appartenant à Φ.

Ces cohomologies sont en général différentes les unes des autres.

Par contre, on peut aussi remplacer les courants par les courants d'ordre $\leqslant m$; $\overset{p}{\mathfrak{Z}}{}'^m$ est l'espace des p-courants d'ordre $\leqslant m$ (*de parité et de support vérifiant les conditions choisies antérieurement*), de cobord nul; $\overset{p}{\mathfrak{B}}{}'^m$ l'espace des p-courants d'ordre $\leqslant m$, cobords de $(p-1)$-courants d'ordre $\leqslant m$ (de parité et support analogues). Cette cohomologie, *a priori*, pourrait dépendre de m; *on démontre qu'elle n'en dépend pas*. De même on peut prendre les courants qui sont des formes localement L^p; ici encore la cohomologie trouvée est la même. On peut enfin prendre les courants qui sont des formes C^m au sens usuel (c'est-à-dire appartenant à $\mathcal{E}^m(V)$); pourvu que le cobord soit toujours pris *au sens des courants*, on trouve toujours la même cohomologie. Précisons ce point, qui demande un peu d'attention. Soit V la boule unité de R^n, de bord la sphère unité de R^n. On peut étudier sur V la cohomologie des formes C^∞, au sens de la page 320, le cobord étant le cobord usuel. Pour le degré 0, on trouve que l'espace vectoriel de cohomologie a la dimension 1, autrement dit que le nombre de Betti est 1; parce qu'une 0-forme C^∞, ou fonction C^∞, de cobord usuel nul, est une constante arbitraire. Etudions maintenant la cohomologie des courants; l'espace vectoriel de cohomologie pour le degré 0 est $\{0\}$, le nombre de Betti nul; car un 0-courant de cobord nul ne peut être qu'une fonction constante, *mais cette constante doit être nulle, sans quoi le cobord contient une couche $\neq 0$ sur la sphère unité*. Donc la cohomologie *usuelle* des formes C^∞ et la cohomologie des courants sont distinctes. Mais si nous prenons la cohomologie des formes C^∞, *avec le cobord au sens des courants*, nous trouvons la même que celle des courants; une 0-forme C^∞ de cobord nul *au sens des courants* est nulle.

On doit donc remplacer $\overset{p}{\mathfrak{Z}}{}'$ par l'espace des p-formes usuelles de classe C^m, de cobord nul au sens des courants, c'est-à-dire, si $m \geqslant 1$, de cobord usuel nul, et *induisant* 0 *sur le bord de V*; $\overset{p}{\mathfrak{B}}{}'$ doit être remplacé par l'espace des p-formes C^m, cobords, au sens des courants, de $(p-1)$-formes C^m, c'est-à-dire, si $m \geqslant 1$, cobords usuels de $(p-1)$-formes C^m *induisant* 0 *sur le bord de V*. C'est ce qu'on appelle habituellement la cohomologie des formes sur V, *modulo le bord de V*.

L'identité de ces diverses cohomologies peut encore s'exprimer comme suit :

Théorème I (théorème de de Rham généralisé).

Soit T un p-*courant (pair ou impair),* Φ *un ensemble saturé de parties fermées de V; on suppose que T est un cocycle,* $dT = 0$.

1° *Si T a un* Φ-*support, il existe une forme* $\overset{p}{\omega}$, *de classe* C^∞, *telle que* $T - \omega$ *soit le cobord d'un* (p — 1)-*courant à* Φ-*support (T est* Φ-*cohomologue à une forme* C^∞*)* [1].

2° *Si T est le cobord d'un courant à* Φ-*support et si T est d'ordre* $\leqslant$ m *(ou est une forme* ω *de classe* C^m [2] *ou est une forme* ω *localement* L^p, *etc.), alors T est également le cobord d'un courant S à* Φ-*support qui est lui aussi d'ordre* $\leqslant$ m *(ou est une forme de classe* C^m [3] *ou une forme localement* L^p, *etc.).*

Démonstration

Soit $\mathcal{G}'^m$ le faisceau [4] des germes de p-courants, de la parité considérée, qui sont d'ordre $\leqslant$ *m ainsi que leur cobord.* C'est un faisceau fin; car, si $\alpha \in \overset{0}{\mathfrak{D}}$, et si T est un courant d'ordre $\leqslant m$ ainsi que son cobord, il en est de même de αT (à cause de

$$d(\alpha T) = \{d\alpha\} \wedge T + \alpha dT).$$

Le cobord définit une suite d'homomorphismes de faisceaux :

(IX, 3; 34)

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \xrightarrow{i} \overset{0}{\mathcal{G}}{}'^m \xrightarrow{d} \overset{1}{\mathcal{G}}{}'^m \xrightarrow{d} \overset{2}{\mathcal{G}}{}'^m \xrightarrow{d} \cdots \longrightarrow \overset{p}{\mathcal{G}}{}'^m \xrightarrow{d} \overset{p+1}{\mathcal{G}}{}'^m \longrightarrow \cdots,$$

Ici $\mathcal{F}$ est le faisceau des germes de fonctions constantes (usuelles ou tordues, suivant le cas considéré) pour tous les points de l'intérieur de V, et des germes nuls pour tous les points du bord de V;

[1] Cela implique que ω soit un cocycle, $d\omega = 0$ au sens des courants; donc $\{d\omega\} = 0$, et ω induit 0 sur le bord de V

[2] Cela implique, si $m \geqslant 1$, que ω induise 0 sur le bord de V

[3] Qui alors, si $m \geqslant 1$, induit 0 sur le bord de V

[4] Nous utilisons ici complètement la théorie des faisceaux. Pour cette démonstration, voir Godement [1], chap. II, § 4. Pour la cohomologie des courants sur une variété sans bord, voir de Rham [3], chap. IV, p. 93

une section de $\mathcal{F}$ au-dessus d'une partie ouverte connexe de V est une constante usuelle ou tordue, nulle si cette partie coupe le bord de V. D'autre part, i est l'injection naturelle de $\mathcal{F}$ dans le faisceau $\overset{0}{\mathcal{G}}{}'^m$. Si $\overset{p}{\mathcal{G}}{}'$ est le faisceau des germes de p-courants quelconques, $\overset{p}{\mathcal{G}}$ le faisceau des germes de courants qui sont des p-formes C^∞, ainsi que leur cobord, tous de la parité considérée, on a des suites d'homomorphismes analogues avec ces faisceaux, et compatibles avec les injections $\overset{p}{\mathcal{G}} \to \overset{p}{\mathcal{G}}{}'^m \to \overset{p}{\mathcal{G}}{}'$. Autrement dit, le diagramme suivant d'homomorphismes de faisceaux est commutatif (¹) :

$$
(\text{IX}, 3; 35)\quad
\begin{cases}
0 \to \mathcal{F} \to \overset{0}{\mathcal{G}} \to \overset{1}{\mathcal{G}} \to \overset{2}{\mathcal{G}} \to \dots \\
\quad\downarrow \quad\ \downarrow \quad\ \downarrow \quad\ \downarrow \quad\ \downarrow \\
0 \to \mathcal{F} \to \overset{0}{\mathcal{G}}{}'^m \to \overset{1}{\mathcal{G}}{}'^m \to \overset{2}{\mathcal{G}}{}'^m \to \dots \\
\quad\downarrow \quad\ \downarrow \quad\ \downarrow \quad\ \downarrow \quad\ \downarrow \\
0 \to \mathcal{F} \to \overset{0}{\mathcal{G}}{}' \to \overset{1}{\mathcal{G}}{}' \to \overset{2}{\mathcal{G}}{}' \to \dots
\end{cases}
$$

On sait que tout résultera de ce que les suites horizontales d'homomorphismes de faisceaux sont exactes; cela montrera que $\overset{p}{\mathfrak{Z}}{}'/\overset{p}{\mathfrak{B}}{}'$ (pour tous les cas considérés) est isomorphe à H^p (V, $\mathcal{F}$), cohomologie de degré p de V à valeurs dans $\mathcal{F}$. Nous admettrons ce théorème de la théorie des faisceaux, qui est appelé théorème de de Rham généralisé (²).

Nous avons donc à montrer que, pour $p \geqslant 1$, tout p-courant $\overset{p}{\mathrm{T}}$, de cobord nul au voisinage de a est, au voisinage de a, le cobord d'un $(p-1)$-courant $\overset{p-1}{\mathrm{S}}$, qui peut être choisi d'ordre $\leqslant m$ si T est d'ordre $\leqslant m$, et forme C^m si T est une forme C^m. On sait déjà d'autre part que, pour $p = 0$, si $\overset{0}{\mathrm{T}}$ est un 0-courant de cobord nul au voisinage de a, il est une fonction constante au voisinage de a, nulle si a est sur le bord de V; de toute façon, nous le retrouverons.

Nous sommes donc ramenés à $V = R^n$ ou R^n_-, $a =$ origine; nous identifierons les courants usuels et les courants tordus. Nous utiliserons dans R^n la convolution des courants avec des distribu-

(¹) Si nous avions pris pour $\overset{p}{\mathcal{G}}$ le faisceau des germes de p-formes C^∞, et le cobord usuel, le diagramme ne serait pas commutatif

(²) Voir Godement [1]

tions; un courant T s'écrivant $\sum_I T_I\, dx_I$ (formule (IX, 3; 2)), nous entendons par $T * S$, $S \in \mathcal{D}'$, le courant $\sum_I (T_I * S)\, dx_I$ [1].

La convolution a toujours un sens si T est à support compact. On peut également convoler des courants et distributions sur R^n_-, car la définition $U * V . \varphi = U_\xi \otimes V_\eta . \varphi(\xi + \eta)$ est valable, à cause de la stabilité de R^n_- par l'addition $(\xi, \eta) \to \xi + \eta$. De toute façon d'ailleurs on verra plus loin qu'on peut identifier les courants sur R^n_- avec les courants sur R^n, de support dans R^n_- (théorème II *bis*, p. 367), de sorte qu'on est ramené à la convolution, dans R^n, de courants et distributions à support dans R^n_-. Moyennant quelques précautions, cette convolution a les propriétés habituelles. Par exemple, il reste vrai que $\delta * V = V$, que $D^p\delta * V = D^p V$, etc. Il reste vrai aussi que la convolution d'une mesure et d'une distribution d'ordre $\leqslant m$ donne une distribution d'ordre $\leqslant m$, et de même pour une fonction localement L^p. Tout cela se voit immédiatement en considérant les distributions sur R^n_- comme des distributions sur R^n à support dans R^n_-. Mais il est inexact que la convolée d'une mesure ν et d'une fonction α de classe C^m soit encore une fonction de classe C^m; elle n'est pas nécessairement une fonction continue. Cela provient de ce que la prolongée dans R^n par 0 d'une fonction continue sur R^n_- n'est plus continue; d'ailleurs sa translatée par une translation de R^n_- n'est plus une fonction continue sur R^n_-. Mais, si Y est la fonction d'Heaviside à une variable, la convolée d'une fonction f de classe C^m sur R^n_- à support compact avec $-Y(-x_1) \otimes \delta_{x_2, \ldots, x_n}$, qui s'écrit explicitement sous la forme $\int_0^{x_1} f(\xi_1, x_2, \ldots, x_n)\, d\xi_1$, est encore une fonction de classe C^m sur R^n_-, et c'est tout ce dont nous aurons besoin.

Soit alors $\overset{p}{T}$ un p-courant au voisinage de O dans R^n ou R^n_- (rappelons que $R^n_- = \{x \in R^n; x_1 \leqslant 0\}$), tel que $dT = 0$ et que T soit d'ordre $\leqslant m$ dans un voisinage convenable de O.

Soit α une fonction de $\overset{0}{\mathcal{D}}(R^n)$, de support assez voisin de l'origine pour que $dT = 0$ et que T soit d'ordre $\leqslant m$ au voisinage de ce support, et égale à 1 au voisinage de O.

[1] On trouvera des convolutions plus générales dans NORGUET [1], Marianne GUILLEMOT [1], BRACONNIER [1]

Utilisons la méthode classique de démonstration du théorème de Poincaré. T peut s'écrire :

$$\text{(IX, 3; 36)} \qquad \overset{p}{\mathrm{T}} = dx_1 \wedge \overset{p-1}{\mathrm{L}} + \overset{p}{\mathrm{M}},$$

où L et M sont des courants ne contenant pas dx_1 dans leur expression suivant (IX, 3; 2).

Le fait que T soit un cocycle au voisinage du support de α s'écrit :

$$\text{(IX, 3; 37)} \qquad -\, dx_1 \wedge d'\mathrm{L} + dx_1 \wedge \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x_1} + d'\mathrm{M} = 0$$

ou

$$\text{(IX, 3; 38)} \qquad d'\mathrm{L} = \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x_1},\ d'\mathrm{M} = 0,$$

au voisinage du support de α; d' est la différentiation partielle par rapport à $x_2, \ldots, x_n$:

$$d'\mathrm{U} = \sum_{k=2}^{n} dx_k \wedge \frac{\partial}{\partial x_k}\,\mathrm{U}.$$

On peut déterminer un courant Λ, de degré $p-1$, tel que

$$\text{(IX, 3; 39)} \qquad \frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} = \alpha\,\mathrm{L}.$$

Pour cela on prend la convolution

$$\text{(IX, 3; 40)} \qquad \Lambda = (-\,\mathrm{Y}\,(-\,x_1) \otimes \delta_{x_2, \ldots, x_n}) * \alpha\,\mathrm{L},$$

Y étant la fonction d'Heaviside à une variable; en effet $\frac{d}{dx_1}(-\,\mathrm{Y}\,(-\,x_1)) = \delta_{x_1}$. Le courant $\alpha\,\mathrm{L}$ est d'ordre $\leqslant m$ dans tout l'espace, donc, $-\,\mathrm{Y}\,(-\,x_1) \otimes \delta_{x_2, \ldots, x_n}$ étant une mesure, Λ est d'ordre $\leqslant m$ dans tout l'espace (R^n ou R). Il en est de même de $\frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} = \alpha\,\mathrm{L}$; et aussi de $d'\Lambda$, donc de $d\Lambda$. En effet

$$\begin{aligned}\text{(IX, 3; 41)} \qquad d'\Lambda &= (-\,\mathrm{Y}\,(-\,x_1) \otimes \delta_{x_2, \ldots, x_n}) * d'\,(\alpha\,\mathrm{L}) \\ &= (-\,\mathrm{Y}\,(-\,x_1) \otimes \delta_{x_2, \ldots, x_n}) * (\{d'\alpha\} \wedge \mathrm{L}) \\ &\quad + (-\,\mathrm{Y}\,(-\,x_1) \otimes \delta_{x_2, \ldots, x_n}) * (\alpha\, d'\mathrm{L}).\end{aligned}$$

Le premier terme de la somme du deuxième membre est la convolution d'une mesure et d'un courant d'ordre $\leqslant m$ dans tout l'espace,

donc est d'ordre $\leqslant m$. D'autre part, $\alpha d'\mathrm{L} = \alpha \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x_1}$, le deuxième terme de la somme s'écrit donc

$$(\text{IX}, 3; 42) \quad (-\mathrm{Y}(-x_1) \otimes \delta_{x_2, \ldots, x_n}) * \alpha \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x_1} =$$
$$(-\mathrm{Y}(-x_1) \otimes \delta_{x_2, \ldots, x_n}) * \frac{\partial}{\partial x_1}(\alpha \mathrm{M})$$
$$+ (\mathrm{Y}(-x_1)\, \delta_{x_2, \ldots, x_n}) * \left(\left\{\frac{\partial \alpha}{\partial x_1}\right\} \mathrm{M}\right).$$

Dans cette dernière somme, le deuxième terme est d'ordre $\leqslant m$, comme convolé d'une mesure et de $\left\{\frac{\partial \alpha}{\partial x_1}\right\}$ M, d'ordre $\leqslant m$; et le premier terme vaut $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(-\mathrm{Y}(-x_1)\, \delta_{x_2, \ldots, x_n})\right) * \alpha \mathrm{M} = \delta * \alpha \mathrm{M} = \alpha \mathrm{M}$, qui est encore d'ordre $\leqslant m$. On peut partout remplacer « d'ordre $\leqslant m$ » par « forme C^m » ou « forme localement L^p » (« forme C^m » voulant dire « forme C^m au sens usuel ou $\in \mathcal{E}^m(\mathrm{V})$ », mais $\frac{\partial \Lambda}{\partial x_1}$ et $d'\Lambda$ étant pris au sens des courants).

Considérons alors le courant

$$(\text{IX}, 3; 43) \qquad \mathrm{S} = \mathrm{T} - d'\Lambda = \mathrm{M} - d'\Lambda.$$

Si nous montrons qu'il est, au voisinage de O, un cobord d'un courant, d'ordre $\leqslant m$ si T est d'ordre $\leqslant m$, etc., il en sera de même de T.

Or d'abord $\mathrm{T} - d\Lambda$ est lui-même d'ordre $\leqslant m$ au voisinage de O.

En effet, il en est ainsi de M, et nous l'avons vu pour $d'\Lambda$. D'autre part S ne contient pas dx_1. Enfin sa dérivée partielle en x_1 est nulle au voisinage de O. En effet

$$(\text{IX}, 3; 44) \quad \frac{\partial \mathrm{S}}{\partial x_1} = \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_1} d'\Lambda = \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x_1} - d' \frac{\partial \Lambda}{\partial x_1} = \frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x_1} - d'(\alpha \mathrm{L}),$$

qui, au voisinage de O, vaut $\frac{\partial \mathrm{M}}{\partial x_1} - d'\mathrm{L}$, c'est-à-dire 0.

Dans le cas où l'on travaille sur R^n, cela veut dire que S est un courant de la forme $1_{x_1} \otimes \tilde{\mathrm{S}}_{x_2, \ldots, x_n}$, au voisinage de O [1]; $d\mathrm{S} = 0$

[1] Voir théorème IV du chap. II

veut dire $d'S = 0$ ou $d'\tilde{S} = 0$; S est d'ordre $\leqslant m$, etc., si et seulement si $\tilde{S}$ l'est.

Une méthode de récurrence sur la dimension de l'espace démontrera alors le théorème cherché; il est évident dans le cas $n = 0$, et, si on le suppose démontré pour les dimensions $0, 1, 2, \ldots, n-1$, il est démontré pour la dimension n.

Si on travaille dans R^n_-, tout est encore plus simple. Puisque $\frac{\partial S}{\partial x_1} = 0$ au voisinage de O, comme $\frac{\partial}{\partial x_1}(1_{x_1}) = -\delta_{x_1}$ (sur la variété avec bord R^n_-!), nécessairement $\tilde{S}$ est nulle au voisinage de O, et tout est tout de suite terminé. (En remplaçant « distribution sur R^n_- » par « distribution sur R^n à support dans R^n_- », on peut encore dire : $\frac{\partial S}{\partial x_1} = 0$ veut dire que S est invariante au voisinage de O pour toute translation assez petite parallèle à l'axe des x_1; comme elle a son support dans $x_1 \leqslant 0$, les translations négatives montrent qu'en réalité S est nulle au voisinage de O); ce qui démontre le théorème.

Remarque. Par quoi peut-on remplacer « d'ordre $\leqslant m$ », « forme C^m », « forme localement L^p »?

Soit $\overset{0}{\mathcal{G}}$ un sous-faisceau du faisceau des germes de distributions sur R^n_-. Soit $\overset{p}{\mathcal{G}}$ (resp. $\underline{\overset{p}{\mathcal{G}}}$) le faisceau des germes de p-courants pairs (resp. impairs), dont les coefficients dans la formule (IX, 3; 2), identifiés à des distributions, soient dans $\overset{0}{\mathcal{G}}$. Pour tout ouvert U de R^n_-, soit $\Gamma(\overset{p}{\mathcal{G}}, U)$ (resp. $\Gamma(\underline{\overset{p}{\mathcal{G}}}, U)$) l'espace vectoriel des sections de $\overset{p}{\mathcal{G}}$ (resp. $\underline{\overset{p}{\mathcal{G}}}$) au-dessus de U.

On suppose que $\overset{0}{\mathcal{G}}$ a les propriétés suivantes :

1° *Invariance par difféomorphisme.* Si H est un difféomorphisme d'un ouvert U_1 de R^n_- sur un ouvert U_2, H transporte $\Gamma(\overset{0}{\mathcal{G}}, U_1)$ sur $\Gamma(\overset{0}{\mathcal{G}}, U_2)$.

2° *Stabilité par multiplication par des fonctions C^∞.* Pour tout U, le produit d'une distribution de $\Gamma(\overset{0}{\mathcal{G}}, U)$ par une fonction de $\mathcal{E}(U)$ appartient à $\Gamma(\overset{0}{\mathcal{G}}, U)$. En outre, on suppose que $\mathcal{E}(U) \subset \Gamma(\overset{0}{\mathcal{G}}, U)$.

3° *Stabilité par convolution avec la mesure*

$$\mu = - \mathrm{Y}(- x_1) \otimes \delta_{x_2, \dots, x_n}.$$

Si $\mathrm{T} \in \Gamma(\overset{0}{\mathcal{G}}, \mathrm{R}^n_-)$ a un support compact, $\mu * \mathrm{T}$ est dans $\Gamma(\overset{0}{\mathcal{G}}, \mathrm{R}^n_-)$.

Soit alors V^n une variété. On appellera $\Gamma(\overset{p}{\mathcal{G}}, \mathrm{V})$ (resp. $\Gamma(\overset{p}{\underline{\mathcal{G}}}, \mathrm{V})$) l'ensemble des p-courants pairs (resp. impairs) sur V tels que, pour toute carte H d'un ouvert Ω de V sur un ouvert de R^n_- (il est inutile de considérer les ouverts de R^n, car tout couvert borné de R^n peut, par translation, être ramené dans R^n_-), le transporté par H de la restriction de T à Ω appartient à $\Gamma(\overset{p}{\mathcal{G}}, \mathrm{H}(\Omega))$ (resp. $\Gamma(\overset{p}{\underline{\mathcal{G}}}, \mathrm{H}(\Omega))$; grâce à l'invariance par difféomorphisme du faisceau $\overset{0}{\mathcal{G}}$, il suffit de le vérifier pour les cartes d'un atlas.

[Si V est sans bord, il est un peu stupide d'utiliser un faisceau sur R^n_-. De toute façon, à un faisceau $\overset{0}{\mathcal{G}}$ sur R^n_- ayant les propriétés 1), 2), 3), on peut en associer un autre sur R^n ayant les mêmes propriétés : en tout point de R^n ses germes sont transportés par une translation (ou un difféomorphisme quelconque) des germes du faisceau donné $\overset{0}{\mathcal{G}}$ en un point de l'ouvert $x_1 < 0$.]

On pourra alors considérer l'espace des courants fermés de $\Gamma(\overset{p}{\mathcal{G}}, \mathrm{V})$ (resp. $\Gamma(\overset{p}{\underline{\mathcal{G}}}, \mathrm{V})$) à Φ-support, et l'espace des cobords de courants de $\Gamma(\overset{p-1}{\mathcal{G}}, \mathrm{V})$ (resp. $\Gamma(\overset{p-1}{\underline{\mathcal{G}}}, \mathrm{V})$) à Φ-supports, et le quotient du premier par le second. Ce sera la même que celui qui est relatif aux courants quelconques, ou aux formes C^∞ (*pour le cobord au sens des courants* ; ou pour le cobord usuel en prenant les formes C^∞ induisant 0 sur le bord de V). La démonstration est la même que précédemment; elle comporte une récurrence sur n, pour les ouverts sans bord (voir p. 360). On est amené pour cela à introduire le faisceau des germes de distributions sur R^{n-1}, $\tilde{\mathrm{S}}_{x_2, \dots, x_n}$, tels que $1_{x_1} \otimes \tilde{\mathrm{S}}_{x_2, \dots, x_n}$ soit dans $\overset{0}{\mathcal{G}}$, qui est le même que le faisceau des $\tilde{\mathrm{S}}_{x_2, \dots, x_n}$ tels que $\alpha(x_1) \otimes \tilde{\mathrm{S}}_{x_2, \dots, x_n}$ soit dans $\overset{0}{\mathcal{G}}$, pour toute $\alpha \in \mathcal{E}_{x_1}$ ou toute $\alpha \in \mathcal{D}_{x_1}$.

§ 4. Image directe d'un courant par une application C^∞.

Nous avons vu page 320 les propriétés de l'image réciproque d'une forme par une application C^∞ d'une variété U de dimension m dans une variété V de dimension n. Si H est propre, H^* définit alors une application linéaire continue de l'espace $\overset{p}{\mathfrak{D}}{}^h$ relatif à la variété V, dans l'espace $\overset{p}{\mathfrak{D}}{}^h$ relatif à la variété U (h fini ou infini).

Soit alors $\underline{T}$ un courant impair sur U. Nous définirons son image directe $H\underline{T}$ par

$$(IX, 4; 1) \qquad (H\underline{T})(\varphi) = \underline{T}(H^* \varphi).$$

Cette formule est valable si H est propre, car alors $H^* \varphi \in \mathfrak{D}$, pour $\varphi \in \mathfrak{D}$; et elle définit $H\underline{T}$ comme un courant. Si H n'est pas propre, alors on ne peut plus nécessairement définir $H\underline{T}$, mais on le peut encore toutes les fois que l'application H, restreinte au support A de $\underline{T}$, est propre.

En effet, cette hypothèse entraîne que le support de $H^*\varphi$ coupe A suivant un compact et alors le deuxième membre possède un sens; et la formule (IX, 4; 1) définit bien $H\underline{T}$ comme un courant, car c'est une forme linéaire continue sur $\mathfrak{D}(V)$. L'application $H^\cdot : \underline{T} \to H\underline{T}$ est linéaire, si H est propre. Sinon, elle est encore linéaire lorsqu'on se restreint à l'espace des courants de support contenu dans un ensemble fermé A sur lequel H est propre. Remarquons que l'image directe d'un courant à support compact existe toujours, et dans ce cas la formule (IX, 4; 1) est valable pour φ à support quelconque. *L'image directe conserve, non le degré, mais la dimension des courants*. Soit en effet $\underline{T}$ de degré p. Posons $r = m - n$, différence des dimensions de U et V; c'est un entier de signe quelconque. Si φ est de degré $n - q$, $H^*\varphi$ est aussi de degré $n - q = m - (q + r)$, donc $\underline{T}(H^*\varphi) = 0$ si $q + r \neq p$ ou $q \neq p - r$; donc $H\underline{T}$ est de degré $p - r$ (si $p - r \geqslant 0$, et nul si $p - r < 0$). On a bien $\dim \underline{T} = m - p = \dim H\underline{T} = n - (p - r)$. En particulier l'image d'un m-courant impair est un n-courant impair. Si $m = n$, alors l'image directe H conserve les degrés; mais, dans tous les cas, c'est la dimension qu'elle conserve. L'image d'un courant d'ordre $\leqslant h$ est d'ordre $\leqslant h$. En particulier, l'image d'un m-courant impair d'ordre zéro, c'est-à-dire d'une mesure, est une mesure, et c'est précisément ce qu'on appelle la mesure image

dans la théorie de l'intégration; l'image d'une mesure $\geqslant 0$ est $\geqslant 0$. En appliquant (IX, 4; 1) à $\varphi = 1$, on a toujours :

$$\text{(IX, 4; 1 } bis\text{)} \quad \int_V H\underline{T} = < H\underline{T}, 1 > = < \underline{T}, 1 > = \int_U \underline{T},$$

si $\underline{T}$ est à support compact.

La formule (IX, 4; 1) est valable pour $\varphi \in \mathcal{D}^h$, si T est d'ordre $\leqslant h$ (et si H est propre sur le support de $\underline{T}$).

Le support de $H\underline{T}$ est contenu dans l'image par H du support A de $\underline{T}$. Si en effet φ a son support dans $\complement H(A)$, alors $H^*\varphi$ a son support dans $\complement A$, et le second membre de (IX, 4; 1) est nul (H étant propre sur A, l'image H (A) est toujours fermée), et le support de $H\underline{T}$ est bien dans H (A). De cela on déduit que $H\underline{T}$ est connu dans un ouvert Ω de V, dès qu'on connaît $\underline{T}$ dans $H^{-1}(\Omega)$ (car, si $\underline{T}_1 = \underline{T}_2$ dans $H^{-1}(\Omega)$, $\underline{T}_1 - \underline{T}_2$ a son support dans $\complement H^{-1}(\Omega)$, donc $H(\underline{T}_1 - \underline{T}_2)$ dans $H(\complement H^{-1}(\Omega)) \subset \complement \Omega$, donc $H\underline{T}_1 = H\underline{T}_2$ dans Ω). On voit aussi que HT est connu dès que H est connue dans un voisinage du support de $\underline{T}$, et même qu'on peut définir $H\underline{T}$ si H n'est pas définie sur la variété entière U, mais seulement sur un voisinage du support de T (et si, comme toujours, la restriction de H à ce support est propre). Il y a naturellement transitivité des opérations définies par les images directes : L'image d'un courant $\underline{T}$ par la composée de deux applications $H_1 \circ H_2$ n'est autre que $(H_1 \circ H_2)\underline{T} = H_1(H_2\underline{T})$, à condition de faire l'hypothèse suivante : $\underline{T}$ a son support dans A sur lequel H_1 est propre, et $H_1(A) \subset B$, ensemble fermé sur lequel H_2 est propre, de sorte que $H_2 \circ H_1$ est aussi propre sur A, et que les deux membres ont a priori un sens.

Si α est une forme C^∞ sur V, on a

$$\text{(IX, 4; 2)} \qquad H\underline{T} \wedge \alpha = H(\underline{T} \wedge H^* \alpha).$$

En effet,

$$\begin{aligned} < (H\underline{T} \wedge \alpha), \varphi > &= < H\underline{T}, \alpha \wedge \varphi > \\ = < \underline{T}, H^*(\alpha \wedge \varphi) > &= < \underline{T}, H^*\alpha \wedge H^*\varphi > \\ = < \underline{T} \wedge H^*\alpha, H^*\varphi > &= < H(\underline{T} \wedge H^*\alpha), \varphi >. \end{aligned}$$

Supposons maintenant $\underline{T}$ de degré p, α de degré q; alors $H\underline{T}$ est de degré $p - r$ $(r = m - n)$, et

$$\text{(IX, 4; 3)} \quad \alpha \wedge H\underline{T} = (-1)^{(p-r)q}\, H\underline{T} \wedge \alpha$$
$$= (-1)^{(p-r)q}\, H(\underline{T} \wedge H^{*}\alpha) = (-1)^{rq}\, H(H^{*}\alpha \wedge \underline{T}) \text{ ou}$$
$$\text{(IX, 4; 4)} \qquad \alpha \wedge H\underline{T} = (-1)^{qr}\, H(H^{*}\alpha \wedge \underline{T}).$$

D'autre part, H commute avec l'opération bord et non avec l'opération cobord :

$$\text{(IX, 4; 5)} \qquad < H\, b\underline{T}, \varphi > = < b\underline{T}, H^{*}\varphi >$$
$$= < \underline{T}, dH^{*}\varphi > = < \underline{T}, H^{*}d\varphi >$$
$$= < H\underline{T}, d\varphi > = < bH\underline{T}, \varphi > \text{ (}^{1}\text{)}$$

ou

$$\text{(IX, 4; 6)} \qquad Hb\underline{T} = bH\underline{T},$$

de sorte que, pour $\underline{T}$ de degré p :

$$\text{(IX, 4; 7)} \qquad HdT$$
$$= (-1)^{p-1}\, HbT = (-1)^{p-1}\, bHT$$
$$= (-1)^{p-1+p-r+1}\, dHT \text{ ou}$$
$$\text{(IX, 4; 8)} \qquad HdT = (-1)^{r}\, dHT,\ r = m - n.$$

Soit enfin ξ un champ de vecteurs C^{∞} sur U, et supposons (ce qui n'est pas toujours le cas) qu'il existe un champ de vecteurs C^{∞}, η, sur V, image de ξ par H.

On a alors, pour $\varphi \in \mathcal{D}$ (V), $\theta(\xi)\,(H^{*}\varphi) = (H^{*}\,(\theta(\eta)\,\varphi)$, ou $\theta(\xi) \circ H^{*} = H^{*} \circ \theta(\eta)$. On en déduit, par transposition :

$$\text{(IX, 4; 8 \textit{bis})} \qquad (\theta(\eta)\, H\underline{T} = H\,(\theta(\xi)\,\underline{T}).$$

On peut réunir ce qui précède en un théorème :

Théorème II

Soit H une application indéfiniment différentiable de U^{m} dans V^{n}, et soit A un ensemble fermé de U^{m} telle que la restriction de H à A soit propre. Si $\underline{T}$ est un courant impair de U, de degré p *ou de dimension* k = m − p, *de support dans A, on peut définir son image $H\underline{T}$, courant impair sur V, de degré* p − r, r = m − n, *ou de dimension* k, *par la formule* (IX, 4; 1). *Si $\underline{T}$ est d'ordre* $\leqslant$ h, *il en est de même de $H\underline{T}$. Le support de $H\underline{T}$ est contenu dans l'image par H du support de $\underline{T}$; et $H\underline{T}$ est connu dans un ouvert Ω de V dès que $\underline{T}$ est connu*

(¹) Nous ne faisons là qu'opérer des transpositions : H^{*} et d commutent, donc leurs transposées H et b commutent

dans $H^{-1}(\Omega)$. *L'application* $\underline{T} \to H\underline{T}$ *est linéaire, lorsque* $\underline{T}$ *varie de manière que son support reste dans* A. *Si* H' *est une application* C^∞ *de* V *dans une variété* W, *et si* $H(A) \subset B$, *ensemble fermé sur lequel* H' *est propre, alors, pour* T *à support dans* A, $(H'H)\,\underline{T} = H'(H\underline{T})$. *On a les formules*

$$
(\mathrm{IX}, 4; 9) \quad \left\{
\begin{array}{l}
\mathrm{H}\underline{\mathrm{T}} \wedge \alpha = \mathrm{H}(\underline{\mathrm{T}} \wedge \mathrm{H}^* \alpha), \ \alpha \text{ forme } \mathrm{C}^\infty \text{ sur V}; \\
\overset{q}{\alpha} \wedge \mathrm{H}\underline{\mathrm{T}} = (-1)^{rq}\,\mathrm{H}(\mathrm{H}^*\alpha \wedge \underline{\mathrm{T}}), \ r = m - n; \\
b\mathrm{H}\underline{\mathrm{T}} = \mathrm{H}b\underline{\mathrm{T}}; \\
d\mathrm{H}\underline{\mathrm{T}} = (-1)^r\,\mathrm{H}d\underline{\mathrm{T}}, \ r = m - n. \\
\theta(\eta)\,\mathrm{H}\underline{\mathrm{T}} = \mathrm{H}\,\theta(\xi)\,\underline{\mathrm{T}}, \text{ si } \xi \text{ est un champ de vecteurs} \\
\mathrm{C}^\infty \text{ sur U, ayant pour image le champ } \eta\,\mathrm{C}^\infty \text{ sur V}; \\
\int_{\mathrm{V}} \mathrm{H}\underline{\mathrm{T}} = \int_{\mathrm{U}} \underline{\mathrm{T}} \text{ si } \underline{\mathrm{T}} \text{ est à support compact.}
\end{array}
\right.
$$

On a des propriétés analogues pour des courants pairs et une application orientée $\tilde{H}$ *de* U *dans* V.

Il résulte de ce théorème que H transforme les courants impairs fermés (de cobord nul) à support compact de U, en courants analogues de V, et les courants impairs de U qui sont des cobords de courants à support compact, en courants analogues de V. Donc H définit une application linéaire de l'espace vectoriel de cohomologie des courants tordus à support compact de U dans l'espace analogue de V; avec conservation des dimensions. Si H est propre, il en est de même pour les cohomologies à support quelconque; si H est une application orientée, pour les cohomologies non tordues. Cette image directe des cohomologies correspond en fait, en topologie algébrique, à l'image directe des homologies définies par les chaînes singulières à support compact; une chaîne est en effet un courant tordu. Le théorème 1 page 355, qui montre l'identité des cohomologies de courants et de formes C^∞, au moins pour U et V sans bord, permet alors de comparer les opérations H (définie ici) et H^* (définie page 320) sur la cohomologie; c'est ce que nous ferons à l'exemple 6 page 368.

Donnons quelques exemples.

Exemple 1. Image d'une mesure de Dirac

Soit $\delta_{(a)}$ la mesure de Dirac relative à $a \in \mathrm{U}$, qui est un m-courant impair. On a :

$$
(\mathrm{IX}, 4; 10) \qquad \mathrm{H}\,\delta_{(a)} = \delta_{\mathrm{H}(a)}
$$

Plus généralement, si X est un k-vecteur au point a de U, il définit un $(m-k)$-courant impair suivant l'exemple 3 page 325; l'image par H de ce courant est le $(n-k)$-courant impair qui est défini par le k-vecteur, image de X par l'application linéaire tangente à H au point a de U. Il y a bien conservation de la dimension des courants, et non du degré.

Exemple 2. Application constante

Supposons que H soit une application constante, appliquant toute la variété U sur un même point b de V. Soit alors $\underline{\mathrm{T}}$ un m-courant impair sur U à support compact. On a :

$$(\mathrm{IX}, 4; 11) \begin{cases} \mathrm{H}\underline{\mathrm{T}}(\varphi) = \underline{\mathrm{T}}(\mathrm{H}^*\varphi) = \underline{\mathrm{T}}(\varphi(a)) = \varphi(a)\,\underline{\mathrm{T}}(1) = \\ \qquad = \left(\int_{\mathrm{U}} \underline{\mathrm{T}}\right) \delta_{(a)}(\varphi), \\ \text{donc } \mathrm{H}\underline{\mathrm{T}} = \left(\int_{\mathrm{U}} \underline{\mathrm{T}}\right) \delta_{(a)}. \end{cases}$$

Cette formule est tout aussi bien valable si T est une m-forme impaire indéfiniment dérivable, et cet exemple montre alors que *l'image d'un courant défini par une forme n'est pas nécessairement défini par une forme.* Si $\underline{\mathrm{T}}$ est un courant impair de degré $< m$ sur U, son image est nulle et (IX, 4; 3) reste valable.

Exemple 3. Image d'une chaîne

Soit Γ une chaîne de U, de dimension k; on sait (exemple 5, p. 326) qu'elle définit sur U un $(m-k)$-courant impair. Son image $\mathrm{H}\Gamma$ est définie par :

$$(\mathrm{IX}, 4; 12) \quad \mathrm{H}\Gamma(\varphi) = \Gamma(\mathrm{H}^*\varphi) = \int_\Gamma \mathrm{H}^*\varphi = \int_{\mathrm{H}(\Gamma)} \varphi.$$

C'est donc précisément le courant défini par la chaîne image de Γ par H, utilisée dans la théorie des chaînes singulières. Il a toujours la même dimension k, et c'est un $(n-k)$-courant impair. D'ailleurs une chaîne sur V, définie par une variété orientée W, et une application H de W dans V, n'est autre que l'image par H de la chaîne sur W, définie par W elle-même et son orientation $\left(0\text{-courant impair } \overset{m}{\underset{\cdot}{\psi}} \to \int_{\mathrm{W}} \overset{m}{\underset{\cdot}{\psi}}\right)$.

Exemple 4. Extension d'un courant défini sur une sous-variété fermée

Soit U^m une sous-variété fermée de V^n, et soit J l'injection de U dans V. Alors J est propre. Si ω est une forme sur V, son image réciproque $J^* \omega$ n'est autre que la forme induite ω_U par ω sur U. Alors, si T est un courant impair sur U, son image $T^V = JT$, définie par $T^V(\varphi) = T(\varphi_U)$, s'appelle l'extension de T à V. T a son support dans V; l'application $T \to T^V$ est linéaire continue injective. Elle conserve la dimension, mais non en général le degré; elle conserve le degré si U et V ont même dimension. Les formules (IX, 4; 9) donnent ici

$$\text{(IX, 4; 13)} \begin{cases} \underline{T}^V \wedge \underset{a}{\alpha} = (\underline{T} \wedge \alpha_U)^V \\ \alpha \wedge \underline{T}^V = (-1)^{rq} (\alpha_U \wedge \underline{T})^V, \ r = m - n; \\ b\,(\underline{T}^V) = (b\,\underline{T})^V \\ d(\underline{T}^V) = (-1)^r (d\underline{T})^V, \ r = m - n. \end{cases}$$

Théorème II bis. *Soit V une variété, soit U une sous-variété fermée de même dimension, telle que les bords de U et de V soient sans point commun. Alors l'extension $J : T \to T^V$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel topologique $\underline{\mathcal{D}}'(U)$ des courants sur U, sur l'espace vectoriel topologique $\underline{\mathcal{D}}'_U(V)$ des courants sur V à support dans U; cet isomorphisme conserve les degrés et le cobord.*

Démonstration

Le théorème étant local par partition de l'unité, on est ramené au cas où U est R^n_- et où V est R^n; on peut alors oublier les courants et parler de distributions. La surjectivité de J se voit alors comme suit. Soit S une distribution sur R^n à support dans R^n_-. Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{D}(R^n_-)$, soit $\tilde{\varphi}$ un prolongement de φ en une fonction C^∞ sur R^n à support compact; posons $T(\varphi) = S(\tilde{\varphi})$. Le résultat est indépendant du prolongement choisi $\tilde{\varphi}$ pour φ; car, si $\tilde{\varphi}_1$ et $\tilde{\varphi}_2$ sont deux tels prolongements, $\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2$ est nulle sur R^n_- ainsi que toutes ses dérivées, et S a son support dans R^n_-, donc $S(\tilde{\varphi}_1 - \tilde{\varphi}_2) = 0$ d'après le théorème XXXIII du chapitre III. Alors $\varphi \to T(\varphi)$ est une forme linéaire sur $\mathcal{D}(R^n_-)$. Si φ_j converge vers 0 dans un $\mathcal{D}_K(R^n_-)$, on peut choisir les $\tilde{\varphi}_j$ de manière qu'elles convergent vers 0 dans

$\mathfrak{D}(R^n)$ (1); donc $\varphi \to T(\varphi)$ est continue, et T est une distribution sur R^n_-. On a $T^{R^n_-} = S$; ce qui montre la surjectivité. $T \to T^{R^n_-}$ est continue; pour montrer l'isomorphisme, nous devons montrer que, si S_j converge vers 0 dans $\mathfrak{D}'(R^n)$, T_j converge vers 0 dans $\mathfrak{D}'(R^n_-)$. Cela veut dire que $T_j(\varphi)$ converge vers 0 uniformément pour φ bornée dans $\mathfrak{D}(R^n_-)$: mais là encore des φ bornées dans $\mathfrak{D}(R^n_-)$ peuvent être prolongées en des $\tilde{\varphi}$ bornées dans $\mathfrak{D}(R^n)$ (1), d'où le résultat, puisque les S_j sont supposées converger vers 0 dans $\mathfrak{D}'(R^n_-)$.

Exemple 5. *Prolongement d'un courant défini sur un ouvert*

Soit U une partie ouverte de V^n. Alors l'injection canonique J de U dans V n'est pas propre, mais sa restriction a toute partie F de U, fermée dans V, est propre. On peut définir $J\underline{T}$ pour tout courant impair T de support dans F; $J\underline{T}$ a encore le support F. $J\underline{T}$ n'est autre que le prolongement canonique de T à V défini par recollement des morceaux, à partir de $\underline{T}$ dans U et $\underline{0}$ dans $\complement F$.

Exemple 6. *Degré topologique, image directe de* 1

Soient U et V des variétés *sans bord compactes de même dimension* n, V connexe. Si $\tilde{H}$ est une application C^∞ orientée de U dans V, elle a alors un degré topologique $d \in Z$. On peut le déterminer comme suit. D'après le théorème de Sard (2), l'ensemble des x où la dérivée $H'(x)$ n'est pas de rang n a une image B de mesure nulle dans V. Soit $y \in \complement_V B$. Alors $H^{-1}(\{y\})$ est fini. Si p est le nombre des $x \in H^{-1}(\{y\})$ où le transport d'orientation par $H'(x)$ coïncide avec celui de $\tilde{H}(x)$, et q le nombre de ceux où c'est le transport opposé, on a $d = p - q$.

Montrons que l'image $\tilde{H}(1)$ de la fonction constante 1 par l'application orientée $\tilde{H}$ n'est autre que la constante d. Tout d'abord la 4e formule (IX, 4; 9) montre que $\tilde{H}\,1$ a un cobord nul; mais, sur une variété connexe compacte sans bord, un 0-courant pair de cobord nul est une fonction constante (1° du théorème 1 de de Rham p. 355).

Pour calculer cette constante $\tilde{H}\,1$, il suffit alors de le faire au

(1) Voir le passage de φ à $\tilde{\varphi}$ à la note (2) de la page 313. A cet endroit, $\tilde{\varphi}$ est appelé Φ

(2) Voir Sard [1]

voisinage d'un point $b \in \complement_V B$. Le point b a un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ connexe tel que $H^{-1}(\mathcal{V})$ ait un nombre fini de composantes connexes $H_k^{-1}(\mathcal{V})$, $k = 1, 2, \ldots, p+q$, et que H soit un difféomorphisme de chaque $H_k^{-1}(\mathcal{V})$ sur $\mathcal{V}$. Si p est le nombre des k pour lesquels ce difféomorphisme transporte l'orientation comme $\tilde{H}$, q le nombre de ceux pour lesquels il le transporte de manière opposée, $d = p - q$.

Soit $\overset{n}{\underline{\varphi}} \in \overset{n}{\underline{\mathcal{D}}}(\mathcal{V})$. Alors $< \tilde{H}\, 1, \underline{\varphi} > = < 1, \tilde{H}^* \underline{\varphi} > = \sum_{s=1}^{p+q} \int_{H_s^{-1}(\mathcal{V})} \tilde{H}^* \underline{\varphi}$

Mais $\int_{H_s^{-1}(\mathcal{V})} \tilde{H}^* \underline{\varphi}$, par transport de structures, vaut $\pm \int_{\mathcal{V}} \underline{\varphi}$, selon que H transporte ou non les orientations de $H_s^{-1}(\mathcal{V})$ comme $\tilde{H}$; on a donc bien $< \tilde{H}\, 1, \underline{\varphi} > = < d, \underline{\varphi} >$ ou $\tilde{H}\, 1 = d$.

Le première formule (IX, 4; 9) donne alors le remarquable résultat suivant.

Soit α une forme C^∞ sur V; on a :

$$\tilde{H}\,(1 \wedge H^* \alpha) = \tilde{H} 1 \wedge \alpha \quad \text{ou}$$

$$\text{(IX, 4; 13 \textit{bis})} \qquad \tilde{H}\, H^* \alpha = d\,.\,\alpha \text{ (1)}.$$

Si alors $d \neq 0$, l'opérateur H^* est inversible à gauche, en tant qu'opérateur des espaces vectoriels de cohomologie; il est donc injectif, et, pour chaque degré p, le p-ième nombre de Betti de U est au moins égal à celui de V. L'opérateur $\tilde{H}$ des espaces vectoriels de cohomologie est inversible à droite, ce qui donne la même conclusion sur le nombre de Betti (cohomologie des formes C^∞ ou des courants sont les mêmes d'après le théorème I, p. 355). Ce résultat sur les nombres de Betti est un ancien théorème démontré par Hopf [2] par des méthodes de pure topologie algébrique, dans un cas plus général que celui des variétés.

Naturellement (IX, 4; 13 *bis*) est valable par continuité, même pour des formes α simplement continues; si la condition C du théorème III qui sera donné page 377 est réalisée, il est valable si on remplace α par un courant quelconque sur V.

Cas de variétés orientées

Si U et V sont orientées, toute application H de U dans V définit aussi une application orientée $\tilde{H}$, comme suit.

[1] Nous n'écrivons pas $d\alpha$, mais $d.\alpha$, pour qu'il n'y ait pas confusion avec le cobord de α; c'est le produit de α par d

[2] Voir Hopf [1]

Soient $\tilde{\mathrm{U}}_+$ et $\tilde{\mathrm{U}}_-$ les 2 composantes de $\tilde{\mathrm{U}}$ définies par l'orientation de U; soit $\mathrm{P}_{\tilde{\mathrm{U}}}$ la projection de $\tilde{\mathrm{U}}$ sur U, $\mathrm{P}_{\tilde{\mathrm{U}}_+}$ et $\mathrm{P}_{\tilde{\mathrm{U}}_-}$ ses restrictions à $\tilde{\mathrm{U}}_+$ et $\tilde{\mathrm{U}}_-$; la première est un isomorphisme conservant les orientations, la deuxième un isomorphisme les inversant. De même pour V. Posons :

$$\tilde{\mathrm{H}} = \begin{cases} (\mathrm{P}_{\tilde{\mathrm{V}}_+})^{-1} \cdot \mathrm{H} \cdot \mathrm{P}_{\tilde{\mathrm{U}}_+} & \text{sur } \tilde{\mathrm{U}}_+ \\ (\mathrm{P}_{\tilde{\mathrm{V}}_-})^{-1} \cdot \mathrm{H} \cdot \mathrm{P}_{\tilde{\mathrm{U}}_-} & \text{sur } \tilde{\mathrm{U}}_-. \end{cases}$$

(noter que l'application orientée obtenue n'est pas arbitraire, puisqu'elle applique nécessairement $\tilde{\mathrm{U}}_+$ dans $\tilde{\mathrm{V}}_+$ et $\tilde{\mathrm{U}}_-$ dans $\tilde{\mathrm{V}}_-$). On voit donc qu'en utilisant, soit H, soit $\tilde{\mathrm{H}}$, on peut définir, à partir de H, aussi bien l'image directe d'un courant pair que l'image directe d'un courant impair. On passe d'ailleurs de l'un à l'autre grâce à la correspondance entre courants pairs et courants impairs, définis par les orientations de U et V. Naturellement l'image d'un courant pair change de signe si l'on change l'orientation de l'une des deux variétés sans changer l'autre. Ceci montre que l'image d'un 0-courant pair $\geqslant 0$ (d'une fonction $\geqslant 0$ par exemple) n'est pas nécessairement un 0-courant pair $\geqslant 0$, pour $m = n$.

Cas d'un difféomorphisme. Transport de structure

Supposons maintenant que H soit un difféomorphisme de U^n sur V^n. Il définit alors, par simple transport de structure, un difféomorphisme de $\tilde{\mathrm{U}}$ sur $\tilde{\mathrm{V}}$, conservant les orientations, et par conséquent une application orientée $\tilde{\mathrm{H}}$. Il permet donc, comme précédemment, de trouver les images directes aussi bien des courants pairs que des courants impairs. Ces images d'ailleurs ne sont autres que celles qu'on obtient par le transport de structure H, ce qui permet d'écrire partout H au lieu de H, $\tilde{\mathrm{H}}$, suivant les cas. D'ailleurs, dans ce cas particulier, le transport de structure permet aussi de définir les images directes des *formes* paires et impaires, et il conserve la correspondance qui, à une forme paire ou impaire, fait correspondre un courant du même type. Ce que nous avons appelé H^* peut dans ce cas s'appeler aussi H^{-1}, et s'obtient par le transport de structure H^{-1}. On a d'autre part la formule :

$$\text{(IX, 4; 14)} \qquad \mathrm{H}f(y) = f(\mathrm{H}^{-1}(y)),\ \mathrm{H}f(\mathrm{H}(x)) = f(x),$$

si f est une fonction sur U, $x \in$ U, $y \in$ V. C'est pourquoi, si T est un 0-courant pair, ou même parfois un courant quelconque, on se permettra de désigner par $T_{H^{-1}(x)}$ l'image par H du courant T_x. D'autre part, on a

$$\text{(IX, 4; 15)} \qquad H\underline{T}(\varphi) = \underline{T}(H^{-1}\varphi),\ H\underline{T}(H\psi) = \underline{T}(\psi),$$

pour $\qquad \varphi \in \mathcal{D}(V),\ \psi \in \mathcal{D}(U),\ \underline{T} \in \underline{\mathcal{D}}'(U).$

Si $\qquad T \in \overset{n}{\mathcal{D}}'(U),\ \varphi \in \overset{0}{\mathcal{D}}(V),$

la première formule (IX, 4; 15) s'écrit aussi :

$$\text{(IX, 4; 16)} \qquad H\underline{T}(\varphi) = (\underline{T})_x(\varphi(H(x)))$$

ou

$$(\underline{T})_{H^{-1}(y)}(\varphi(y)) = (\underline{T})_x(\varphi(H(x))).$$

Il est bon de noter que, si d'une part H est un difféomorphisme de U^n sur V^n, et si d'autre part U et V sont des variétés orientées, les applications $\tilde{H}$ définies par les deux procédés précédents ne sont pas nécessairement les mêmes. Il ne le sont que si H est un isomorphisme des structures de variétés orientées de U et V, c'est-à-dire transporte l'orientation de U sur l'orientation V. Remarquons encore que, si H est un difféomorphisme, et si $\underline{\alpha}$ est une n-forme impaire indéfiniment différentiable et partout > 0 sur U, alors $H\underline{\alpha}$ est une forme analogue sur V. La correspondance définie par α entre 0-courants pairs et n-courants impairs, est transportée par H sur la correspondance définie par $H\underline{\alpha}$ entre 0-courants pairs et n-courants impairs.

En particulier, si V^n est une variété indéfiniment différentiable orientée, munie d'une n-forme $\underline{\alpha} > 0$ indéfiniment différentiable, et si H est un automorphisme de cette structure, c'est-à-dire un difféomorphisme de V sur elle-même, conservant l'orientation et la forme $\underline{\alpha}$, alors H conserve la correspondance entre courants pairs et impairs définie par l'orientation, et entre degrés 0 et n définie par l'orientation et $\underline{\alpha}$. On pourra donc parler de l'image par H d'une distribution de V. C'est ce qui arrivera par exemple si V = G est un groupe de Lie, muni d'une orientation invariante à gauche et d'une mesure de Haar $\underline{\alpha} = \underline{dx}$ invariante à gauche. Comme ici H (x) s'écrit aussi ax (ou $x + a$ si G est abélien et noté additivement), HT, pour un courant quelconque, pourra se noter $T_{a^{-1}x}$ ou T_{x-a}.

Comme autre exemple important, considérons un espace vectoriel V^n de dimension n sur le corps des réels, et soit H une application linéaire de V dans lui-même. C'est une application indéfiniment différentiable et les résultats généraux sont valables. H est un difféomorphisme si et seulement si dét $H \neq 0$. Si $\underline{dx}$ est une mesure de Lebesgue sur V, son image par H est $\underline{dx} \, |\text{dét } H|^{-1}$. On a en effet :

$$\text{(IX, 4; 17)} \quad H(\underline{dx}) \cdot \varphi = \underline{dx} \cdot (H^{-1} \varphi) = \int_V \varphi(H(x))\, dx =$$
$$= \int_V \varphi(y)\, |\text{dét } H^{-1}|\, dy = \frac{1}{|\text{dét } H|} \underline{dx} \cdot \varphi.$$

H laisse donc invariantes les mesures de Lebesgue, si et seulement si dét $H = \pm 1$. Enfin H conserve l'orientation si et seulement si dét $H > 0$.

Si donc H est le déterminant $+1$, et si l'on a choisi une mesure de Lebesgue $\underline{dx}$ et une orientation de V, H laisse cette structure invariante, et par suite conserve les identifications entre courants pairs et courants impairs de même degré, ainsi qu'entre degrés 0 et n. On pourra, dans ce cas, parler de distributions sur V et des images par H de distributions sur V.

Au contraire, on ne peut le faire pour dét $H \neq 1$ qu'à condition d'attribuer au mot « distribution » un sens bien précisé, par exemple 0-courant pair comme nous l'avons dit page 339. Prenons par exemple $V = R^n$, et considérons la distribution δ et une application linéaire H de V dans V. Si on considère δ comme n-courant impair $\underline{\overset{n}{\delta}}$, on a $H\underline{\overset{n}{\delta}} = \underline{\overset{n}{\delta}}$. Si on le considère comme n-courant pair, $\overset{n}{\delta}$, $H\overset{n}{\delta}$ n'a pas de sens *a priori* puisque H n'est pas une application orientée. Mais, pour dét $H \neq 0$, H est un difféomorphisme, et on peut de toute façon définir $H\delta$ par transport de structure. Si dét $H > 0$, H est un automorphisme de la structure de variété orientée de R^n, donc $H\overset{n}{\delta} = \overset{n}{\delta}$; si dét $H < 0$, H inverse l'orientation donc conserve au signe près la correspondance, définie par l'orientation, entre courants pairs et impairs, donc $H\overset{n}{\delta} = -\overset{n}{\delta}$ [1].

[1] Mais si on appelle $\widetilde{H}$ l'application orientée associée à H par l'orientation de R^n, $\widetilde{H}\overset{n}{\delta}$ a toujours un sens (mais ne peut pas se définir par transport de structure si dét $H \leqslant 0$). Alors on a toujours $\widetilde{H}\delta = \overset{n}{\delta}$, quel que soit H; voir page 371

Si on considère δ comme 0-courant impair $\overset{0}{\underline{\delta}}$, définissant sur $\overset{*}{\mathfrak{D}}$ la forme linéaire $\overset{0}{\underline{\delta}}(\varphi \overset{*}{dx}) = \varphi(0)$, où $\overset{*}{dx}$ est la forme différentielle $dx_1 \wedge dx_2 \wedge \ldots dx_n$, on aura

$$
\begin{aligned}
\text{(IX, 4; 18)}\quad \mathrm{H}\,\overset{0}{\underline{\delta}}(\varphi \overset{*}{dx}) &= \overset{0}{\underline{\delta}}(\mathrm{H}^*(\varphi\, dx)) \\
&= \overset{0}{\underline{\delta}}(\varphi(\mathrm{H}x)(\text{dét H})\, dx_1 \wedge dx_2 \ldots \wedge dx_n) = \varphi(0)(\det \mathrm{H}) \\
&= (\text{dét H})\,\overset{0}{\underline{\delta}}(\varphi \overset{*}{dx}), \text{ donc } \mathrm{H}\,\overset{0}{\underline{\delta}} = (\text{dét H})\,\overset{0}{\underline{\delta}}.
\end{aligned}
$$

Si enfin on considère δ comme 0-courant pair $\overset{0}{\delta}$, $\mathrm{H}\overset{0}{\delta}$ n'aura de sens que pour dét $\mathrm{H} \neq 0$; alors, en raisonnant comme plus haut, on aura $\mathrm{H}\overset{0}{\delta} = |\text{dét H}|\,\overset{0}{\delta}$.

Récapitulons :

$$
\begin{aligned}
\text{(IX, 4; 19)}\quad & \mathrm{H}\,\overset{*}{\underline{\delta}} = \overset{*}{\underline{\delta}},\ \mathrm{H}\,\overset{0}{\delta} = |\text{dét H}|\,\overset{0}{\delta} \\
& \mathrm{H}\,\overset{*}{\delta} = (\text{signe de dét H})\,\overset{*}{\delta},\ \mathrm{H}\,\overset{0}{\underline{\delta}} = (\text{dét H})\,\overset{0}{\underline{\delta}},
\end{aligned}
$$

si

$$\text{dét H} \neq 0.$$

§ 5. Changement de variables. Images réciproques de courants (1)

Changements de variables

Soit H une application indéfiniment différentiable de U^m dans V^n. Notons x un point courant de U, y un point courant de V. L'application s'écrit $x \to y = \mathrm{H}(x)$. Effectuer le changement de variable $y = \mathrm{H}(x)$, pour une fonction f sur V, c'est remplacer y par $\mathrm{H}(x)$ dans $f(y)$. On obtient ainsi $f(\mathrm{H}(x))$, qui définit la fonction $f_0\mathrm{H}$ sur U. Le résultat obtenu n'est donc autre que l'image réciproque de f par H, notée aussi $\mathrm{H}^* f$: $(\mathrm{H}^* f)(x) = f(\mathrm{H}(x))$. Existe-t-il un tel changement de variables pour les courants, c'est-à-dire une opération simple qui, à chaque courant T sur V, fasse correspondre une image réciproque $\mathrm{H}^*\,\mathrm{T}$, qui soit un courant sur U? Si T se note T_y, son image réciproque pourra alors se noter $\mathrm{T}_{\mathrm{H}(x)}$.

(1) Beaucoup de changements de variables dans les distributions ont été utilisés en physique. Le premier article mathématiqne sur le sujet semble être celui d'Albertoni-Cugiani [1]

Image directe des formes impaires indéfiniment différentiables

Nous allons voir que, dans certaines conditions, une telle image réciproque existe pour les courants pairs. Soit $\underline{S}$ un courant impair de degré p sur U, à support compact. Il possède une image directe $H\underline{S}$, courant impair à support compact de degré $p - r$, avec $r = m - n$, sur V. Si $\underline{S}$ est une forme différentielle impaire $\underline{\omega}$, même indéfiniment différentiable, nous avons vu (exemple 2, p. 366) que l'image $H\underline{\omega}$ n'est pas nécessairement elle-même une forme. *Mais supposons que l'image directe du courant impair $H\underline{\omega}$ défini par une forme impaire $\underline{\omega}$, indéfiniment différentiable à support compact, soit toujours une forme impaire indéfiniment différentiable ; ce que nous écrirons par $H\underline{\mathfrak{D}} \subset \underline{\mathfrak{D}}$.* Alors l'application H ainsi définie de $\mathfrak{D}_K$ dans $\mathfrak{D}_{H(K)}$, K compact de U, est continue.

Il suffit en effet d'appliquer le théorème du graphe fermé. L'application image directe $H : \underline{T} \to H\underline{T}$, de $\underline{\mathcal{E}}'_K(U)$ dans $\underline{\mathcal{E}}'_{H(K)}(V)$, est continue, donc son graphe est fermé dans $\underline{\mathcal{E}}'_K(U) \times \underline{\mathcal{E}}'_{H(K)}(V)$; *a fortiori* l'intersection de ce graphe avec le sous-espace $\underline{\mathfrak{D}}_K(U) \times \underline{\mathfrak{D}}_{H(K)}(V)$ est fermée pour la topologie de ce sous-espace, plus fine que la topologie induite.

Comme $\underline{\mathfrak{D}}_K$ et $\underline{\mathfrak{D}}_{H(K)}$ sont des espaces de Fréchet, on en déduit bien que l'application H est continue [1], donc elle l'est aussi de $\underline{\mathfrak{D}}(U)$ dans $\underline{\mathfrak{D}}(V)$. Ces circonstances ne peuvent se produire que si $m \geqslant n$, ou $r \geqslant 0$; si en effet $m < n$, H (U) est un ensemble de mesure nulle dans V (c'est le théorème de Sard [11]), et alors, si $\varphi \in \underline{\mathfrak{D}}(U)$, $H\underline{\varphi}$ a pour support un compact sans intérieur donc ne peut pas être une forme C^∞ sans être nulle; mais alors $H(\underline{\mathfrak{D}})$ serait nul, donc $H(\underline{\mathfrak{D}}')$ par passage à la limite, ce qui est absurde puisque $H \overset{m}{\delta}_{(a)} = \overset{n}{\delta}_{H(a)}$ pour tout $a \in U$.

Image réciproque des courants pairs

Posons alors, pour un courant pair T de degré p sur V :

$$(\text{IX}, 5; 1) \qquad H^* \overset{p}{T} \cdot \varphi = (-1)^{pr}\, T \cdot H\underline{\varphi},$$

ou $\quad \underline{\varphi} \cdot H^* T = H\underline{\varphi} \cdot T$ [2], quelle que soit $\overset{m-p}{\varphi} \in \overset{m-p}{\underline{\mathfrak{D}}}(U)$.

[1] Bourbaki [6] fascicule XV, chap. I, § 3, n° 3, corollaire 5 du théorème I, p. 37

[2] Pour avoir une bonne formule, on voit qu'on doit mettre H dans le terme de gauche du produit scalaire, $H\underline{\varphi}.T$ et H^* dans le terme de droite $\varphi.H^*T$

Nous définissons ainsi un courant pair H^*T de degré p, c'est-à-dire de même degré que T. Si maintenant, lorsque $\underline{\varphi}$ est seulement k fois continûment différentiable à support compact, $H\underline{\varphi}$ l'est aussi, autrement dit si l'on a $H\underline{\mathcal{D}}^k \subset \underline{\mathcal{D}}^k$, l'application H est encore continue de $\underline{\mathcal{D}}^k_K$ dans $\underline{\mathcal{D}}^k_{H(K)}$. Alors, si T est d'ordre $\leqslant k$, il en est de même de H^*T, et la formule (IX, 5; 1) reste vraie pour $\underline{\varphi} \in \underline{\mathcal{D}}^k$.

Lorsque les conditions précédentes sont réalisées, l'application H^* est linéaire de $\mathcal{D}'$ (V) dans $\mathcal{D}'$ (U), et dans le cas plus particulier ci-dessus indiqué, de $\mathcal{D}'^k_c$ (V) dans $\mathcal{D}'^k_c$ (U); elle est aussi continue, puisque transposée de l'application continue $\varphi \to H\underline{\varphi}$ de $\underline{\mathcal{D}}$ (U) dans $\underline{\mathcal{D}}$ (V) (resp. $\underline{\mathcal{D}}^k$ (U) dans $\underline{\mathcal{D}}^k$ (V)). On peut donc l'obtenir en prolongeant par continuité l'opération H^* de $\mathcal{E}$ (V) dans $\mathcal{E}$ (U). Si T est une forme différentielle ω *continue*, $H^*\omega$ coïncide avec son image réciproque usuelle, notée aussi $H^*\omega$. Il suffit, pour le montrer, de voir que $H\underline{\varphi}.\omega = \underline{\varphi}.H^*\omega$, quelle que soit $\underline{\varphi} \in \underline{\mathcal{D}}$ (U), $H^*\omega$ étant l'image réciproque *usuelle*.

Considérons en effet la formule (IX, 5; 1) écrite avec d'autres notations : T remplacé par φ, φ remplacé par ω. Elle était valable pour $\underline{\varphi} \in \underline{\mathcal{D}}'$ (U), $\omega \in \mathcal{D}$ (V), H propre sur le support de φ. Mais nous avons vu que, si φ était à support compact, on pouvait prendre ω à support quelconque (p. 323); et que, pour $\underline{\varphi}$ d'ordre 0, $\underline{\varphi} \in \underline{\mathcal{D}}'^0$, on pouvait prendre ω continue; cela donne exactement la formule cherchée $H\underline{\varphi}.\omega = \underline{\varphi}.H^*\omega$, dans les conditions où nous nous plaçons ici [1].

Propriétés élémentaires de l'image réciproque : transitivité, support, multiplication, cobord

Il y a naturellement transitivité des opérations « image réciproque ». Si H_1 et H_2 sont des applications de U dans V et de V dans W respectivement, pour lesquelles on peut définir une image réciproque, il en est de même pour $H_2 \circ H_1$, et l'image réciproque $(H_2 \circ H_1)^*$ s'obtient par composition des images réciproques : $(H_2 \circ H_1)^* = H_1^* \circ H_2^*$.

[1] On pourrait se demander ce qui en est si ω est une forme localement sommable, définie presque partout. Il nous apparaît comme peu probable que la seule hypothèse $H\underline{\mathcal{D}} \subset \underline{\mathcal{D}}$ entraîne que l'image réciproque usuelle d'une forme localement sommable soit localement sommable, et vérifie la formule $H\underline{\varphi}.\omega = \varphi.H^*\omega$

Le support de H^*T est contenu dans l'image réciproque $H^{-1}(A)$ du support A de T. En effet, si $\underline{\varphi}$ a son support dans $\complement H^{-1}(A)$, $H\underline{\varphi}$ a son support dans $H(\complement H^{-1}(A)) \subset \complement A$; par suite $H\varphi . T = 0$, donc on a bien $\varphi . H^*T = 0$. Il suit de là que, si T est connu dans un ouvert Ω de V, alors H^*T est connu dans $H^{-1}(\Omega)$. En effet, si T_1 et T_2 sont deux courants sur V, qui coïncident dans Ω, $T_1 - T_2$ a son support dans $\complement\,\Omega$. Donc $H^*(T_1 - T_2)$ a son support dans $H^{-1}(\complement\,\Omega) = \complement H^{-1}(\Omega)$ et par suite $H^*T_1 = H^*T_2$ dans $H^{-1}(\Omega)$.

La condition $H\underline{\mathfrak{D}} \subset \underline{\mathfrak{D}}$ qui permet d'affirmer l'existence d'une image réciproque est purement locale sur U. S'il existe une famille d'ouverts $(\Omega_i)_{i\in I}$ de U, telle que, pour la restriction de H à chacun d'eux Ω_i, il existe une image réciproque, alors il en est de même pour H elle-même.

(En effet, on peut grâce à une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(\Omega_i)_{i\in I}$, représenter $\underline{\varphi} \in \underline{\mathfrak{D}}(U)$ comme une somme finie $\sum_i \varphi_i$, où $\underline{\varphi}_i$ a son support dans Ω_i. D'après l'hypothèse, le courant $H\underline{\varphi}_i$ est une forme indéfiniment différentiable de V, et par suite il en est de même du courant $H\underline{\varphi} = \sum H\underline{\varphi}_i$.) D'ailleurs, dans ce cas, H^*T sera défini localement dans U : H^*T est, dans Ω_i, l'image réciproque de T par l'application H de Ω_i dans V; et H^*T, dans U, est le recollement de ces morceaux définis dans les Ω_i. Il en résulte en particulier qu'on peut définir H^*T, même si H ne vérifie pas les conditions exigées en tant qu'application de U dans V, pourvu que T ait son support dans un fermé A de V, et qu'il existe un voisinage ouvert U_1 de $H^{-1}(A)$ dans U, tel que la restriction de H à U_1 vérifie les conditions requises. On calculera en effet H_1^*T pour cette restriction H_1, le résultat trouvé ayant son support dans $H^{-1}(A)$, qui est un ensemble fermé de U; H_1^*T possède alors un prolongement canonique en un courant de U nul dans $\complement A$, que nous appellerons toujours H^*T. Le résultat est évidemment indépendant du choix du voisinage U_1; on a d'ailleurs toujours (IX, 5; 1), où $< H\varphi, T >$ a un sens comme produit scalaire de deux courants dont les supports singuliers sont disjoints (le support singulier de T est contenu dans son support A; et le support singulier de $H\underline{\varphi}$ est dans $\complement U_1$).

Nous pourrons donc énoncer la proposition :

Théorème III. *Soit H une application indéfiniment différentiable d'une variété indéfiniment différentiable U^m dans une autre V^n. Supposons que H vérifie la condition C (resp. C_k) : l'image par H d'un courant impair à support compact défini par une forme différentielle impaire indéfiniment différentiable (resp.* k *fois continûment différentiable) est une forme impaire indéfiniment différentiable (resp.* k *fois continûment différentiable). Alors, pour tout courant pair T (resp. pour tout courant pair T d'ordre* $\leqslant$ k*) de degré* p *sur V, on peut définir par (IX, 5; 1) une image réciproque H^*T, qui est un courant pair de degré* p *(resp. un courant pair de degré* p*, d'ordre* $\leqslant$ k*). L'application H^* ainsi définie est linéaire. Le support de H^*T est contenu dans l'image réciproque $H^{-1}(A)$ par H du support A de T. Si T est connue dans un ouvert Ω de V, alors H^*T est connu dans $H^{-1}(\Omega)$. Si H est difféomorphisme de U^m sur V^n, l'opération H^* existe toujours, et coïncide avec le transport de structure par H^{-1}.*

Si α est une forme paire indéfiniment différentiable (resp. k *fois continûment différentiable et si T est d'ordre* $\leqslant$ k*), et si ξ est un champ de vecteurs indéfiniment différentiable sur U^m, ayant une image directe qui soit un champ de vecteurs indéfiniment différentiable η, on a les formules :*

$$\text{(IX, 5; 2)} \quad \begin{cases} \mathrm{H}^* (\mathrm{T}_\wedge \alpha) = \mathrm{H}^* \mathrm{T}_\wedge \mathrm{H}^* \alpha \\ \mathrm{H}^* (\alpha_\wedge \mathrm{T}) = \mathrm{H}^* \alpha_\wedge \mathrm{H}^* \mathrm{T} \\ \mathrm{H}^* \, d\, \mathrm{T} = d\, \mathrm{H}^* \, \mathrm{T} \quad (\text{si T est d'ordre} \leqslant k-1) \\ \mathrm{H}^* (\theta(\eta)\, \mathrm{T}) = \theta(\xi)\, \mathrm{H}^*\mathrm{T} \ (\text{si T est d'ordre} \leqslant k-1), \end{cases}$$

les deux dernières supposant U et V sans bord [1].

Si U^m et V^n sont des ouverts de R^n, où les variables s'appellent x_i, y_j, respectivement, si $\overset{0}{T}$ est un 0-courant pair, et si H est définie par les fonctions $y_j = H_j(x_1, x_2, \ldots x_m)$, j = 1, 2 ... n, on a la formule de « dérivation des fonctions composées »:

$$\text{(IX, 5; 3)} \qquad \frac{\partial}{\partial x_i} \overset{0}{T}_{H(x)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H_j}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \overset{0}{T}}{\partial y_j}\right)_{H(x)}$$

[1] Il suffit que U soit sans bord et que H (U) ne rencontre pas le bord de V, puisque tout est local sur U. Voici un contre-exemple si U a un bord :
Soit V sans bord, $U = R_- \times V$, $R_- =]-\infty, 0]$, $H =$ projection $R_- \times V \to V$.
Soit $\overset{0}{T} = 1$; $d\,T = 0$, $H^*\,d\,T = 0$, $H^*\,T = 1 =$ chaîne U, $d\,H^*T = -\,b$ (chaîne U) $= -$ chaîne $b\,U = -$ chaîne $(\{0\} \times V) \neq 0$

On a des résultats analogues pour une application orientée $\tilde{H}$ et des courants impairs.

Tout a été démontré, sauf (IX, 5; 2 et 3), qui sont vraies pour des formes C^∞, donc, en prolongeant par continuité, pour des courants.

Il faut maintenant voir des cas où la condition C indiquée au théorème III est réalisée.

Cas où H est un difféomorphisme local

Supposons que U soit un ouvert de V. On sait alors que tout courant T de V induit un courant sur U. Ce courant induit n'est autre que l'image réciproque H^*T, correspondant à l'injection canonique H de U dans V. En effet, l'application $\underline{\varphi} \to H\underline{\varphi}$ n'est autre que l'injection naturelle de $\underline{\mathfrak{D}}$ (U) dans $\underline{\mathfrak{D}}$ (V). Cet exemple, combiné avec celui du difféomorphisme et avec le caractère local des conditions requises pour H, nous donne tout de suite un exemple bien plus intéressant : *si H est un difféomorphisme local de U dans V, alors on peut définir des images réciproques des courants pairs.* Rappelons que H est appelé difféomorphisme local, si tout point a de U possède un voisinage U_a tel que H (U_a) soit ouvert dans V et que la restriction H_a de H à U_a soit un difféomorphisme de U_a sur H (U_a); alors l'application H_a de U_a dans V est la composée du difféomorphisme H_a de U_a sur H (U_a), et de l'injection naturelle de ce dernier dans V, et, pour chacune de ces deux applications, il existe des images réciproques; il en existe donc pour l'application H_a de U_a dans V, et, par suite du caractère local, pour l'application H de U dans V. En outre, on voit explicitement comment s'exprimera H^*T pour tout courant T de V; H^*T est, dans U_a, le transporté de la restriction de T à $H_a(U_a)$, par H_a^{-1}; et, dans U, H^*T est le recollement de ces morceaux définis dans les U_a. Remarquons aussi qu'un difféomorphisme local définit canoniquement une application orientée. Car H_a définit une application orientée $\tilde{H}_a$ de U_a dans V (voir p. 370) et on définit $\tilde{H}$ par recollement des $\tilde{H}_a$. On peut donc aussi prendre les images réciproques des courants impairs.

Exemple : Changements de variables à une dimension

Nous allons tout de suite en déduire les formules relatives aux exemples les plus simples, correspondant aux applications $y = H(x)$

de la droite réelle R dans elle-même. Distinguons toujours les noms des variables x et y, respectivement pour l'objet et l'image, bien qu'ici $U = V = R$. Soit T_y un courant sur R, de support A, et supposons qu'en tout point de l'image réciproque $H^{-1}(A)$, la dérivée H' soit $\neq 0$. Alors il existe aussi un voisinage Ω de $H^{-1}(A)$, dans lequel on a partout $H' \neq 0$. Mais alors H est un difféomorphisme local de Ω dans R, et par suite H^*T existe. Nous allons exprimer explicitement cette image réciproque.

1° Soit d'abord $\overset{1}{\underline{\varphi}} \in \overset{1}{\underline{\mathfrak{D}}}_x$ une 1-forme impaire. Nous pouvons l'écrire $\psi\, \underline{dx}$, où $\underline{dx}$ est la mesure de Lebesgue sur R, considérée comme 1-courant impair. Si Ω_i est un ouvert de Ω, tel que la restriction H_i de H à Ω_i soit un difféomorphisme de Ω_i sur $H_i(\Omega_i)$, et si ψ a son support dans Ω_i, alors, par transport de structure, on a :

$$\text{(IX, 5; 4)} \qquad \begin{aligned} H(\psi(x)\,\underline{dx}) &= \psi(H_i^{-1}(y)) \quad \underline{|d(H_i^{-1}(y))|} \\ &= \psi(H_i^{-1}(y))\,\frac{\underline{dy}}{|H'(H_i^{-1}(y))|}. \end{aligned}$$

Si maintenant ψ a son support dans Ω, si $(\Omega_i)_{i\in I}$ est un recouvrement de Ω par des ouverts du type précédent, et si $(\alpha_i)_{i\in I}$ est une partition de l'unité subordonnée, on voit que :

$$\text{(IX, 5; 5)} \qquad H(\psi(x)\,\underline{dx}) = \sum_i \alpha_i(H_i^{-1}(y))$$

$$\psi(H_i^{-1}(y))\,\frac{\underline{dy}}{|H'(H_i^{-1}(y))|} = \theta(y)\,dy,$$

où θ est la fonction définie par :

$$\text{(IX, 5; 6)} \qquad \theta(y) = \sum_{H(x)=y} \frac{\psi(x)}{|H'(x)|},$$

la somme Σ désignant une somme toujours finie, en vertu de l'hypothèse faite sur H [1]. Cela montre que l'image réciproque d'un 0-courant pair $\overset{0}{T}$ est définie par

$$\text{(IX, 5; 7)} \qquad \overset{0}{T}_{H(x)} \cdot \psi(x)\,\underline{dx} = \overset{0}{T} \cdot H(\psi(x)\,\underline{dx}) = \overset{0}{T}_y \cdot \theta(y)\,\underline{dy}\ \text{[2]}.$$

[1] Pour y donné sur R, l'image réciproque $H^{-1}(\{y\})$ est peut-être un ensemble infini, mais cet ensemble ne contient qu'un nombre borné de points sur le support de ψ, puisque ce support peut être recouvert par un nombre fini des Ω_i, sur chacun desquels $H = H_i$ est bijective

[2] Comme T est de degré 0, on peut, dans (IX, 5; 1), intervertir les termes de chaque produit scalaire, sans changement de signe

2° Soit maintenant $\overset{1}{\varphi} \in \overset{1}{\mathfrak{D}}_x$ un courant représenté par une 1-forme paire. Un calcul analogue peut se faire (en remplaçant H par l'application orientée $\tilde{\mathrm{H}}$ canoniquement associée au difféomorphisme local H). Cette fois-ci $\overset{1}{\varphi} = \psi(x)\,dx$, où dx doit être pris comme une forme différentielle ordinaire de degré 1, différentielle de x, et non comme une forme impaire. On devra donc remplacer $|\mathrm{H}'|$ par H' dans (IX, 5; 5, 6 et 7), et l'on aura, à part cela, la même formule finale pour un 0-courant impair $\underset{-}{\overset{0}{\mathrm{T}}}$.

3° Soit maintenant $\overset{0}{\varphi} \in \overset{0}{\mathfrak{D}}_x$ une fonction ordinaire. Si φ a son support dans Ω_i, son image directe, définie par transport de structure, est

(IX, 5; 8) $$(\mathrm{H}_i\varphi)(y) = \varphi(\mathrm{H}_i^{-1}(y)).$$

On aura donc finalement :

(IX, 5; 8 *bis*) $$(\mathrm{H}\varphi)(y) = \sum_i \alpha_i(\mathrm{H}_i^{-1}(y))\,\varphi(\mathrm{H}_i^{-1}(y)) = \theta(y),$$

avec : $$\theta(y) = \sum_{\mathrm{H}(x)=y} \varphi(x),$$

et par suite l'image réciproque $\mathrm{H}^*\underset{-}{\overset{1}{\mathrm{T}}}_y$ d'un 1-courant impair $\underset{-}{\overset{1}{\mathrm{T}}}_y$ est donnée par :

(IX, 5; 9) $$\underset{-}{\overset{1}{\mathrm{T}}}_{\mathrm{H}(x)}\cdot\varphi(x) = \underset{-}{\overset{1}{\mathrm{T}}}_y\cdot\theta(y),\ \underset{-}{\mathrm{T}} \in \underset{-}{\overset{1}{\mathfrak{D}}}{}'_y.$$

4° Si enfin $\underset{-}{\overset{0}{\varphi}} \in \underset{-}{\overset{0}{\mathfrak{D}}}_x$ est une fonction tordue, on peut l'écrire $\underset{-}{\overset{0}{\varphi}} = \underset{-}{\varepsilon}\,\overset{0}{\psi}$ où $\overset{0}{\psi}$ est une fonction ordinaire, $\underset{-}{\varepsilon}$ la fonction tordue représentée par la constante $+1$ associée à l'orientation canonique de R et la constante -1 associée à l'orientation opposée. On doit faire attention dans le transport de structure H_i, et l'on voit facilement que $\mathrm{H}_i\varphi$ est défini par :

(IX, 5; 10) $$\mathrm{H}_i(\underset{-}{\varepsilon}\,\psi(x)) = \pm\,\underset{-}{\varepsilon}\,\psi(\mathrm{H}_i^{-1}(y)).$$

Dans cette formule, le signe $\pm$ est $+$ si $\mathrm{H}'(\mathrm{H}^{-1}(y)) > 0$ et $-$ si $\mathrm{H}'(\mathrm{H}^{-1}(y)) < 0$. Dans ces conditions, on aura :

(IX, 5; 11) $$\mathrm{H}(\underset{-}{\varepsilon}\,\psi(x)) = \underset{-}{\varepsilon}\sum \pm\,\alpha_i(\mathrm{H}_i^{-1}(y))\,\psi(\mathrm{H}_i^{-1}(y)) =$$
$$= \underset{-}{\varepsilon}\,\theta(y),\text{ avec } \theta(y) = \sum_{\mathrm{H}(x)=y} \pm\,\psi(x),\text{ où } \pm \text{ est le signe de } \mathrm{H}'(x).$$

Finalement, pour un 1-courant pair T_1 :

(IX, 5; 12) $$\overset{1}{T}_{H(x)} \cdot \underline{\varepsilon}\, \psi(x) = \overset{1}{T}_y \cdot \underline{\varepsilon}\, \theta(y).$$

Ces quatre formules montrent que le résultat obtenu dépend essentiellement de la nature du courant considéré, suivant qu'il est pair ou impair, de degré 0 ou de degré 1. Il est donc impossible de parler de l'image réciproque d'une distribution ou du changement de variable dans une distribution, sans spécifier le sens précis du mot « distribution »; ceci, parce que la fonction H n'est pas un difféomorphisme, et que, même si elle l'était, elle ne serait pas pour cela un automorphisme de la droite réelle munie de son orientation canonique et de sa mesure de Lebesgue canonique. Si T est une distribution donnée sur R, elle représente quatre courants, respectivement pairs et impairs, de degré 0 et de degré 1. Si les conditions considérées plus haut relativement à H sont vérifiées ($H'(x) \neq 0$, en tout point de $H^{-1}(A)$), ces quatre courants ont des images réciproques qui sont des courants de R de nature différente. A chacun de ces courants est associée une distribution, puisque R est munie d'une orientation et d'une mesure de Lebesgue canoniques, mais ces quatre distributions seront en général distinctes. Partons par exemple de la distribution δ_y sur R. La condition requise par H est la suivante : $H'(a) \neq 0$, pour tous les points a tels que $H(a) = 0$. Dans ces conditions, si l'on désigne par $\overset{0}{\delta}$, $\underline{\overset{0}{\delta}}$, $\overset{1}{\delta}$, $\underline{\overset{1}{\delta}}$, les quatre courants que l'on peut associer à cette distribution, les images réciproques de ces quatre courants par H seront les suivantes :

(IX, 5; 13) $$\left\{\begin{aligned} &\overset{0}{\delta}_{H(x)} = \sum_{H(a)=0} \frac{1}{|H'(a)|}\, \overset{0}{\delta}_{x-a}, \quad \underline{\overset{0}{\delta}}_{H(x)} = \sum_{H(a)=0} \frac{1}{H'(a)}\, \underline{\overset{0}{\delta}}_{x-a}, \\ &\overset{1}{\delta}_{H(x)} = \sum_{H(a)=0} (\text{signe de } H'(a))\, \overset{1}{\delta}_{x-a}, \quad \underline{\overset{1}{\delta}}_{H(x)} = \sum_{H(a)=0} \underline{\overset{1}{\delta}}_{x-a}, \end{aligned}\right.$$

et il leur correspondra par suite les quatre distributions suivantes :

(IX, 5; 14) $$\left\{\begin{aligned} &\sum_{H(a)=0} \frac{1}{|H'(a)|}\, \delta_{x-a}, \quad \sum_{H(a)=0} \frac{1}{H'(a)}\, \delta_{x-a}, \\ &\sum_{H(a)=0} (\text{signe de } H'(a))\, \delta_{x-a}, \quad \sum_{H(a)=0} \delta_{x-a}. \end{aligned}\right.$$

On aura par exemple, la formule suivante :

(IX, 5; 15) $$\overset{0}{\delta}_{x^2-a^2} = \frac{1}{2|a|}\left(\overset{0}{\delta}_{x+a} + \overset{0}{\delta}_{x-a}\right), \text{ pour } a \neq 0\,[1].$$

[1] δ_{x^2} n'a pas de sens

Parler de l'image réciproque de δ par H, ou de $\delta_{H(x)}$, n'a donc pas de sens si on ne spécifie pas de quel δ il s'agit. Nous avons indiqué page 339 que « distribution » voudrait dire « 0-courant pair ». Mais, pour δ, c'est ambigu, parce que le seul δ ayant un sens sur une variété quelconque est la mesure de Dirac, le n-courant impair $\overset{n}{\delta}_{(a)}$, $a \in V$; alors que, pour un physicien, $\delta_{H(x)}$ est relatif au 0-courant pair $\overset{0}{\delta}$ sur la droite R.

Si au lieu de partir de δ, on part de la distribution définie par une fonction f, les quatre courants qui lui correspondent sont évidemment les courants définis par les formes $f\,(H\,(x))$, $\pm\,\varepsilon f\,(H\,(x))$ ($\pm$ = signe de $H'\,(x)$), $f\,(H\,(x))\;H'\,(x)\,dx$, $f\,(H\,(x))\,|\,H'\,(x)\,|\,\underline{dx}$.

Nous l'avons déjà vu pages 379 et suivantes si f est continue. Mais c'est vrai aussi pour f localement sommable, car, au voisinage de chaque point a de R, H_a est un difféomorphisme, et $H^* y$ coïncide avec le transport de structure par H_a^{-1}, qui est bien l'image réciproque usuelle H^*. Les distributions associées à ces quatre courants sont encore quatre distributions différentes :

$$f\,(H\,(x)),\ \pm f\,(H\,(x)),\ f\,(H\,(x))\;H'\,(x),\ f\,(H\,(x))\,|\,H'(x)\,|.$$

Donnons encore un exemple intéressant.

Considérons, sur R, le 1-courant pair $\overset{1}{\underset{\bullet}{P}} = \mathrm{P}f\;Y\,(y)\,\dfrac{dy}{y}$. Effectuons le changement de variables $y = H\,(x)$, H étant un C^∞ difféomorphisme de R sur R. Supposons pour simplifier $H' > 0$; alors H conserve l'orientation de R, et on peut confondre courants pairs et impairs. Supposons de même $H\,(0) = 0$. La formule (IX, 5; 12) donne

$$\text{(IX, 5; 15 }bis\text{)}\quad \langle \overset{1}{T}_{H(x)}, \psi\,(x) \rangle = \mathrm{P}f \int_0^{+\infty} \psi\,(H^{-1}\,(y))\,\frac{dy}{y}$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_\varepsilon^{+\infty} \psi\,(H^{-1}\,(y))\,\frac{dy}{y} - \psi\,(0)\log\frac{1}{\varepsilon} \right)$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{H^{-1}(\varepsilon)}^{+\infty} \psi\,(x)\,\frac{H'\,(x)}{H\,(x)}\,dx - \psi\,(0)\log\frac{1}{\varepsilon} \right)$$
$$= \lim_{H^{-1}(\varepsilon) \to 0} \left(\int_{H^{-1}(\varepsilon)}^{+\infty} \psi\,(x)\,\frac{H'\,(x)}{H\,(x)}\,dx - \psi\,(0)\log\frac{1}{H^{-1}\,(\varepsilon)} + \psi\,(0)\log H'\,(0) \right).$$

On peut donc écrire :

(IX, 5; 15 *ter*) $$\left(\mathrm{Pf}\,Y(y)\frac{dy}{y}\right)_{y=H(x)} = \mathrm{Pf}\,Y(H(x))\frac{H'(x)}{H(x)}\,dx + \log H'(0)\,\delta.$$

Cela revient à dire, comme nous l'avions indiqué à la formule (II, 2; 25), que la méthode d'intégration par parties finies n'est pas invariante par changement de variables.

On a de même :

(IX, 5; 15 *quarto*) $$\left(\mathrm{Pf}\,Y(-y)\frac{dy}{y}\right)_{y=H(x)} = \mathrm{Pf}\,Y(-H(x))\frac{H'(x)\,dx}{H(x)} - \log H'(0)\,\delta.$$

Mais alors :

(IX, 5; 15 *quinto*) $$\left(vp\,\frac{dy}{y}\right)_{y=H(x)} = vp\,\frac{H'(x)}{H(x)}\,dx.$$

Ceci subsiste naturellement même sans supposer $H' > 0$ et $H(0) = 0$.

Les distributions « vp de Cauchy » se transforment, par changement de variables, comme les fonctions correspondantes.

Espaces fibrés: intégrale partielle d'une forme différentielle sur les fibres, image directe d'une forme différentielle de l'espace fibré, image réciproque d'un courant de la base.

Le cas étudié précédemment, du difféomorphisme local, est très particulier. Voici un cas beaucoup plus général où l'image réciproque existe :

Soit W^r et V^n deux variétés indéfiniment différentiables, et soit H la projection canonique de $U = W \times V$ sur V. Pour que U soit une variété, nous supposerons que W ou V est sans bord. Nous allons démontrer que, dans ce cas, si φ est une forme différentielle m fois continûment différentiable, il en est de même de son image directe $H\varphi$. Pour commencer, nous supposerons W orientée. Il n'y aura donc pas lieu de distinguer entre courants pairs et impairs.

Donnons d'abord une interprétation nouvelle des formes différentielles. Sur une variété U, soit ω une forme différentielle et X un

multivecteur tangent en un point a de U. Alors $< X, \omega(a) >$, produit scalaire de X et du multicovecteur $\omega(a)$, est un nombre complexe. Si l'on fait varier X, on voit que ω définit une fonction $X \to < X, \omega(a) >$, c'est-à-dire une fonction sur l'espace fibré $\mathfrak{U}$ des multivecteurs tangents à U.

La restriction de cette fonction au sous-espace vectoriel des multivecteurs tangents en un point a de U est linéaire; et réciproquement, toute fonction sur $\mathfrak{U}$, dont la restriction à chacun de ces espaces vectoriels est linéaire, est définie par une forme différentielle, sur U. Pour que ω soit m fois continûment différentiable, il faut et il suffit que la fonction qu'elle définit sur $\mathfrak{U}$ soit m fois continûment différentiable. Soit maintenant $\dot{\omega}$ une forme différentielle de degré p continue sur la variété produit $W \times V$. On sait que l'espace vectoriel tangent en un point (a, b) de $W \times V$ est canoniquement isomorphe à la somme directe des espaces vectoriels tangents au point a de W et au point b de V. Si donc X est un r-vecteur tangent en a à W, il définit canoniquement un r-vecteur tangent en (a, b) à $W \times V$, quel que soit $b \in V$. De la même manière, si Y est un $(p - r)$-vecteur tangent en b à W, il définit canoniquement un $(p - r)$-vecteur tangent en (a, b) à W, quel que soit $a \in W$. Alors on pourra, avec une notation impropre mais qui n'est pas gênante, parler de $X \wedge Y$ comme p-vecteur tangent en (a, b) à $W \times V$. La forme $\dot{\omega}$ définit donc une fonction $(X, Y) \to < X \wedge Y, \omega(a, b) >$ sur l'espace produit $\mathfrak{W} \times \mathfrak{V}$ des espaces fibrés $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{V}$ des r-vecteurs et des $(p - r)$-vecteurs tangents à W et V. Cette fonction est bilinéaire, quand X et Y varient en restant dans les espaces vectoriels de multivecteurs tangents en deux points a et b de W et V; et en outre, cette fonction est k fois continûment différentiable sur $\mathfrak{W} \times \mathfrak{V}$, si ω est k fois continûment différentiable.

Fixons le multivecteur Y. La fonction précédente définit alors une fonction continue sur $\mathfrak{W}$, dont la restriction au sous-espace de multivecteurs tangents en un point a de W est linéaire, c'est-à-dire une forme différentielle continue sur W, que nous noterons ω_y. Elle est définie par :

(IX, 5; 15 *sexto*) $$< X, \omega_y(a) > = < X \times Y, \omega(a, b) >.$$

Si ω est k fois continûment différentiable, ou continue à support compact, il en est de même de ω_y. Dans la dernière hypothèse, on

peut intégrer ω_Y sur la variété orientée W, et poser $J(Y) = \int_W \omega_Y$. La fonction $J : Y \to J(Y)$, ainsi définie, est une fonction sur $\mathcal{V}$. Elle est manifestement linéaire sur le sous-espace vectoriel des multivecteurs tangents en un point b de V. Montrons que J est continue sur $\mathcal{V}$. Puisque ω est continue, elle est séparément continue en Y lorsque X est fixé, et uniformément lorsque X parcourt un compact de $\mathcal{W}$. Cela signifie que, si Y tend vers Y_0 sur $\mathcal{V}$, alors ω_Y converge vers ω_{Y_0} uniformément sur tout compact de W, donc dans $\overset{0}{\mathcal{D}}_K$, où K est la projection sur W du support compact de ω; et par conséquent $\int_W \omega_Y$ converge vers $\int_W \omega_{Y_0}$, ce qui montre la continuité de J. *J est par conséquent une forme différentielle de degré $(p - r)$ continue sur V. On notera aussi $\int_W \omega$ cette forme J.*

Donnons quelques propriétés de l'opération que nous venons de définir.

1° Si ω est de la forme $\omega = \alpha \wedge \beta$, où α (resp. β) est une forme sur W (resp. V [1]), on a :

$$\text{(IX, 5; 16)} \quad \int_W \alpha \wedge \beta = \left(\int_W \alpha\right) \beta.$$

En effet :

$$\text{(IX, 5; 17)} \quad <\alpha \wedge \beta, X \wedge Y> = <\alpha(a), X> <\beta(b) Y>, \text{ donc}$$

$$\text{(IX, 5; 18)} \quad \omega_Y(X) = <\alpha(a), X> <\beta(b), Y>,$$

$$\omega_Y = <\beta(b), Y> \alpha, \text{ ce qui donne :}$$

$$\text{(IX, 5; 19)} \quad J(Y) = \int_W \omega_Y = <\beta(b), Y> \int_W \alpha$$

$$\text{ou } \int_W \omega = \left(\int_W \alpha\right) \beta.$$

2° Si W et V sont des ouverts de R^r et R^n (R^r muni de son orientation canonique), alors ω peut s'écrire

[1] La notation $\alpha \wedge \beta$ est impropre, comme l'était la notation $X \wedge Y$. Si L et M sont les projections canoniques de W × V sur W et V respectivement, on devrait écrire $L^*\alpha \wedge M^*\beta$

$$\omega = \sum_{\mathrm{I,J}} \omega_{\mathrm{IJ}}(w, v)\, dw_{\mathrm{I}} \wedge dv_{\mathrm{J}}, \tag{IX, 5; 20}$$

où I et J sont des parties des ensembles $(1, 2 \dots r)$, $(1, 2 \dots n)$.

Alors on voit aisément que :

$$\int_{\mathrm{W}} a = \sum_{\mathrm{I,J}} \left(\int_{\mathrm{W}} \omega_{\mathrm{I,J}}(w, v)\, dw_{\mathrm{I}}\right) dv_{\mathrm{J}}. \tag{IX, 5; 21}$$

3° Si maintenant W et V sont quelconques, on pourra toujours, grâce à une partition de l'unité, décomposer ω en une somme finie $\sum \omega_\nu$, chaque ω_ν ayant son support dans un produit d'ouverts admettant des difféomorphismes avec des ouverts de R^r et R^n respectivement. La linéarité de l'opération $\int_{\mathrm{W}}$ permet alors de calculer $\int_{\mathrm{W}} \omega$ en se ramenant à la formule (IX, 5; 21).

4° Si ω est k fois continûment différentiable, il en est de même de $\int_{\mathrm{W}} \omega$. On le voit en se ramenant, comme il est dit à 3°, au cas d'ouverts de R^r et R^n.

5° Si β est une forme différentielle continue sur V, et si on l'identifie avec celle qu'elle définit sur $\mathrm{W} \times \mathrm{V}$, et qui n'est autre que son image réciproque $\mathrm{H}^*\beta$ associée à la projection H de $\mathrm{W} \times \mathrm{V}$ sur V, on a :

$$\int_{\mathrm{W}} (\omega \wedge \beta) = \left(\int_{\mathrm{W}} \omega\right) \wedge \beta \tag{IX, 5; 22}$$

$$\text{ou } \int_{\mathrm{W}} (\omega \wedge \mathrm{H}^* \beta) = \left(\int_{\mathrm{W}} \omega\right) \wedge \beta.$$

On le voit par la même méthode que 4° en se ramenant à 2°.

6° Supposons V aussi orientée et plaçons sur $\mathrm{W} \times \mathrm{V}$ l'orientation canonique de produit. Alors l'intégrale de ω sur $\mathrm{W} \times \mathrm{V}$ se calcule par deux intégrations successives, comme on le voit encore en se ramenant à 2° et en utilisant le théorème de Fubini élémentaire :

(IX, 5; 23) $$\int_{W\times V}\omega = \int_V\left(\int_W \omega\right)^{(1)}.$$

7° Si ω est de degré r, $\int_W \omega$ est une 0-forme c'est-à-dire une fonction. Sa valeur en un point b de V n'est autre que l'intégrale de la forme induite par ω sur $W \times \{b\}$.

8° Soit à calculer $\int_W d\omega$. En localisant et en prenant les notations de (IX, 5; 20), on peut écrire

$$d\omega = d_W\omega + (-1)^{\text{card I}} d_V\omega.$$

Mais l'intégrale sur W ne retient que les composantes $\omega_{I,J}\, dw_I \wedge dv_J$ pour lesquelles card $I = r$. D'autre part, *si W est sans bord*, $\int_W d_W\,\omega = 0$ d'après Stokes; et d_V commute avec $\int_W$; donc :

(IX, 5; 23 *bis*) $$\int_W d\omega = (-1)^r d\int_W \omega.$$

Cette formule ne subsiste pas si W a un bord bW; cependant elle subsiste toutes les fois qu'on peut appliquer Stokes comme plus haut, c'est-à-dire si ω induit 0 sur $bW \times V$. En réalité la formule subsiste toujours, à condition de raisonner au sens des courants comme on le verra à (IX, 5; 24).

Soit maintenant $\underline{\omega}$ une forme impaire sur $W \times V$. Comme W est orientée, elle définit une correspondance biunivoque entre les orientations locales de V et celles de $W \times V$, donc un isomorphisme canonique entre $(W \times V)^{\sim}$ et $W \times \tilde{V}$. Alors $\underline{\omega}$ définit une forme ordinaire $\tilde{\omega}$ sur $W \times \tilde{V}$, anti-invariante par la symétrie σ de $\tilde{V}$.

(1) Naturellement, si c'est V qui est orientée, on peut définir une opération $\int_V$ avec des propriétés analogues. On posera :

$$\omega_X(Y) = \langle X \wedge Y, \omega(a,b)\rangle,\ K(X) = \int_V \omega_X,\ \text{d'où } \int_V \omega.$$

On aura :

$\int_V \alpha\wedge\beta = \left(\int_V \beta\right)\alpha$, $\int_{R^n}\sum_{I,J}\omega_{I,J}\, dw_I\wedge dv_J = \sum_{I,J}\left(\int_{R^n}\omega_{I,J}\, dv_J\right) dw_I$, et, si W est aussi orientée, $\int_{W\times V}\omega = \int_W\left(\int_V\omega\right)$. Dans l'un comme dans l'autre cas, on a considéré le produit $W \times V$, *où W est écrite avant V*. Si l'on effectue la symétrie canonique $W \times V \to V \times W$, on change l'orientation, donc l'intégrale de ω sur le produit; mais les définitions des intégrales partielles sur W et V changent aussi

(Cette forme dépend donc de l'orientation de W, et change de signe avec elle.) Donc $\int_W \tilde{\omega}$ est une forme ordinaire de $\tilde{V}$, σ-anti-invariante, c'est-à-dire une forme impaire sur V, que nous noterons $\int_W \underline{\omega}$. Mais si on change l'orientation de W, $\tilde{\omega}$ change de signe et aussi son intégrale sur W, donc $\int_W \underline{\omega}$ ne change pas. Cette opération $\int_W$ sur les formes impaires a des propriétés analogues à celles de la même opération sur les formes paires; dans (IX, 5; 16) on pourra prendre $\underline{\beta}$ impaire, dans (IX, 5; 20) les $\underline{dv_J}$ seront des formes impaires, dans (IX, 5; 22) $\underline{\beta}$ sera une forme impaire, dans (IX, 5; 23) V et W ne seront pas orientées et $\underline{\omega}$ sera une forme impaire.

Nous considérerons l'application H, projection canonique de $W \times V$ sur V, et l'application $\tilde{H}$, projection canonique de $(W \times V)^{\sim} = W \times \tilde{V}$ sur $\tilde{V}$, donc donnant une application orientée encore notée $\tilde{H}$ de $W \times V$ sur V. On peut donc parler des projections sur V des formes paires ou impaires de $W \times V$. Montrons alors que

$$\int_W \omega = \tilde{H}\omega \text{ et que } \int_W \underline{\omega} = H\underline{\omega}.$$

Il suffit de le faire pour l'un d'eux, par exemple le premier; en utilisant (IX, 5; 1) et (IX, 5; 22 et 23), on aura, pour $\varphi \in \mathcal{D}$:

$$\text{(IX, 5; 23 } ter\text{)} \quad \tilde{H}\omega \cdot \underline{\varphi} = \omega \cdot \tilde{H}^* \underline{\varphi} = \int_{W \times V} \omega \wedge \tilde{\underline{H}}^* \underline{\varphi} =$$

$$= \int_V \left(\int_W \omega \wedge \tilde{H}^* \underline{\varphi} \right) = \int_V \left[\left(\int_W \omega \right) \wedge \underline{\varphi} \right] = \left(\int_W \omega \right) \cdot \varphi.$$

Donc $\tilde{H}\,\omega = \int_W \omega$, comme nous voulions le montrer.

Nous avions déjà vu que $\int_W \omega$ dépendait de l'orientation de W, (et aussi du fait que, dans l'écriture de U comme produit $W \times V$, on plaçait W avant V). On le voit de nouveau dans $\tilde{H}\,\omega$, car la définition de $\tilde{H}$ à partir de H dépend des mêmes choses. Mais on a vu que, si ω est une forme impaire, $\int_W \underline{\omega}$ n'en dépendait plus; son

expression par $H\underline{\omega}$ le montre bien. Il en résulte, tout étant local sur $U = W \times V$, qu'on peut définir l'intégrale $\int_W \underline{\omega} = H\underline{\omega}$ d'une forme impaire $\underline{\omega}$, même si W n'est pas orientable. C'est seulement $\int_W \underline{\omega}$ et $H\underline{\omega}$ que nous considérerons désormais.

Soit maintenant U^{r+n} un espace fibré de classe C^∞ sur V^n $(r \geqslant 0)$. Nous supposerons que V est sans bord, ou que toutes les fibres sont sans bord (de manière que U soit bien une variété, avec bord éventuellement).

Pour tout ouvert V_i de V au-dessus duquel U est isomorphe à un produit $W \times V_i$, on peut, par une carte, définir l'intégrale d'une forme $\underline{\omega}$ sur les fibres, et le résultat est indépendant de la carte, puisque c'est l'image directe par H; par partition de l'unité, on passera à U tout entière : si $\overset{\bullet}{\omega}$ est une p-forme impaire continue sur U, à support compact, son intégrale sur les fibres est une $(p-r)$ forme impaire continue sur V; elle est de classe C^k si $\underline{\omega}$ est de classe C^k; et elle n'est autre que ${}^{H}\underline{\omega}$, H étant la projection canonique de U sur V. Si alors $\underline{T}$ est un p-courant impair sur U, à support compact, sa projection $H\underline{T}$, $(p-r)$-courant impair, pourra être appelée aussi son intégrale sur les fibres (extension de l'exemple 2, p. 325).

Toutes les conditions d'application du théorème III sont réalisées, et il existe donc une image réciproque $H^*\overset{\bullet}{T}$ de tout courant pair sur V; c'est un courant de même degré p sur U, et d'ordre $\leqslant k$ si T est d'ordre $\leqslant k$.

Cette intégration sur les fibres joue un rôle important en théorie des espaces fibrés à fibre vectorielle. Soit E un espace fibré C^∞ à fibres vectorielles de dimension finie r sur une variété sans bord. On supposera choisies sur les fibres E_x, $x \in V$, des structures euclidiennes, variant C^∞ avec x. Soit U l'espace fibré des boules unités B_x des fibres E_x. Alors U est fibré en boules sur V. Soit $\underline{\omega}$ une p-forme impaire sur U, de classe C^1, *induisant* 0 *sur le bord de U* (qui est fibré en sphères sur V). On peut alors appliquer (IX, 5; 23 *bis*). Alors $\int_{\text{fibres}} \underline{\omega}$ est une $(p-r)$-forme impaire sur V, fermée si ω est fermée. On en déduit une application linéaire de l'espace vectoriel de cohomologie réelle tordue de degré p de U *modulo son*

bord dans l'espace vectoriel de cohomologie réelle tordue de degré $p - r$ de V, appelée *homomorphisme de Thom-Gysin.*

Il n'est même nullement nécessaire de supposer U fibré sur V, car tout est *local sur U :* Soit H une application C^∞ d'une variété U^{n+r} sur une variété V^n faisant de U une variété *localement fibrée* sur V, c'est-à-dire telle que tout point de U ait un voisinage U_i difféomorphe à $W_i \times V_i$, W_i variété C^∞, V_i ouvert de V, W_i ou V_i sans bord, le difféomorphisme transformant H en la projection canonique $W_i \times V_i \to V_i$. Alors tout subsiste. *Or ceci signifie simplement que $H: U^{n+r} \to V^n$, est de rang constant n, au moins dans le cas de variétés U^m et V^n sans bord.*

Bien que H ne fibre pas nécessairement globalement U sur V, on convient d'appeler fibres les images réciproques des points, $H^{-1}(\{y\})$, $y \in V$; ce sont des variétés, sans bord, si U et V sont sans bord.

On peut donc énoncer, en globalisant les formules (IX, 5; 16 à 23) qui ne sont autres que les formules déjà vues (IX, 4; 9) :

Image réciproque des courants dans le cas d'une application de rang n *de U^m dans V^n*

Théorème IV. Soient U^m, V^n, des variétés C^∞, et soit H une application C^∞ de U dans V, faisant de U une variété localement fibrée sur V (par exemple partout de rang n, *si U et V sont sans bord).*

Pour tout p*-courant impair $\underline{T}$ sur U, à support compact, l'image $H\underline{T}$ est un* (p — r)*-courant impair sur V, qu'on appelle aussi intégrale de $\underline{T}$ sur les fibres et qu'on note $\int_{\text{fibres}} \underline{T}$. Si on convient d'appeler $\omega_{H(x)}$ l'image réciproque $H^*\omega$ d'une forme paire ω sur V, on a les formules :*

$$(\text{IX}, 5; 24)\quad \left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\text{fibres}} (\underline{T} \wedge \alpha_{H(x)}) = \left(\int_{\text{fibres}} \underline{T}\right) \wedge \alpha, \ \alpha \textit{ forme } C^\infty \textit{ sur } V; \\ \displaystyle\int_{\text{fibres}} (\alpha_{H(x)} \wedge \underline{T}) = (-1)^{rq}\, \alpha \wedge \int_{\text{fibres}} \underline{T}; \\ \displaystyle \mathrm{b} \int_{\text{fibres}} \underline{T} = \int_{\text{fibres}} \mathrm{b}\, \underline{T}; \\ \displaystyle \mathrm{d} \int_{\text{fibres}} \overset{\mathrm{p}}{\underline{T}} = (-1)^r \int_{\text{fibres}} \mathrm{d}\, \underline{T}; \\ \displaystyle \int_V \int_{\text{fibres}} \underline{T} = \int_U \underline{T}. \end{array}\right.$$

Si $\underline{T}$ est un courant d'ordre $\leqslant$ k, il en est de même de $\int_{\text{fibres}} \underline{T}$.

Si $\underline{T}$ est une p-forme impaire de classe C^k (au sens usuel), $\int_{\text{fibres}} \underline{T}$ est une (p — r)-forme impaire de classe C^k.

Il existe une image réciproque $(H^*T)_x = T_{H(x)}$ des courants pairs T sur V. Si T est un p-courant pair, il en est de même de $T_{H(x)}$; si T est d'ordre $\leqslant$ k ou est une forme de classe C^k, il en est de même de $T_{H(x)}$ On a les formules :

$$\text{(IX, 5; 25)} \quad \begin{cases} (\underline{T} \wedge \alpha)_{H(x)} = T_{H(x)} \wedge \alpha_{H(x)}, \ \alpha \text{ forme } C^\infty \text{ sur } V; \\ (\alpha \wedge T)_{H(x)} = \alpha_{H(x)} \wedge T_{H(x)}; \\ (d\,T)_{H(x)} = d\,(T_{H(x)}), \text{ si U est sans bord [1].} \end{cases}$$

Les exemples donnés antérieurement, où H était un difféomorphisme local, sont des cas particuliers de celui-ci, avec $m = n$, $r = 0$.

Il semble probable que le théorème III s'applique dans des conditions un peu plus générales que le théorème IV, mais « à peine ».

Applications et exemples

Exemple 1. Définition de $T_{\xi^{-1}x}$ pour un 0-courant pair T sur un groupe de Lie G

Soit G un groupe de Lie. Prenons, pour application H, l'application $(x, \xi) \to \xi^{-1}x$ de $G \times G$ dans G; soit $\overset{0}{T} \in \overset{0}{\mathfrak{D}}{}'(G)$. Nous considérerons d'abord l'isomorphisme J de $G_x \times G_\xi$ sur $G_w \times G_v$ défini par :

$$\text{(IX, 5; 25 } bis) \quad w = x, \ v = \xi^{-1}\,x; \quad x = w, \ \xi = wv^{-1}.$$

Alors H n'est autre que la composée de J et de la projection $(w, v) \to v$ de $G_w \times G_v$ sur G_v. Comme il existe des images réciproques pour chacune de ces deux applications, il en existe aussi pour H. Soit $\overset{2n}{\underline{\varphi}}$ une $2n$-forme impaire C^∞ à support compact sur $G_x \times G_\xi$, qui peut par conséquent s'écrire $\psi\,(x, \xi)\ \underline{dx\,d\xi}$, où dx désigne une mesure de Haar (invariante à gauche) particulière sur G. Cherchons son image directe $H\overset{2n}{\underline{\varphi}}$. Soit $\overset{0}{\theta} \in \mathfrak{D}_v$. On a :

[1] Si U a un bord, la note [1] de la page 79 donne un contre-exemple. Si U est sans bord, comme il est localement fibré sur V, H (U) ne rencontre pas le bord de V

$$\text{(IX, 5; 26)}\quad H\varphi\cdot\theta = \varphi\cdot H^*\theta = \iint_{G\times O} \theta(\xi^{-1}x)\,\psi(x,\xi)\,\underline{dx\,d\xi} =$$

$$= \int_G \underline{dw} \int_O \theta(\xi^{-1}w)\,\psi(w,\xi)\,\underline{d\xi} = \int_O \underline{dw} \int \theta(\eta^{-1})\,\psi(w, w\eta)\,\underline{d\eta}\,(^1) =$$

$$= \int_O \underline{dw} \int_G \theta(\nu)\,\psi(w, w\nu^{-1})\,(\Delta(\nu))^{-1}\,d\nu\,(^2)$$

$$= \int_G \theta(\nu)\,(\Delta(\nu))^{-1}\,d\nu \int_O \psi(w, w\nu^{-1})\,dw\,(^3)$$

et par suite

$$\text{(IX, 5; 27)}\quad H\,(\psi(x,\xi)\,\underline{dx\,d\xi}) = \left[(\Delta(\nu))^{-1}\int_G \psi(w, w\nu^{-1})\,dw\right]\underline{d\nu}.$$

On vérifie bien trivialement $\left(\text{par dérivation sous le signe } \int\right)$ que le second membre est une forme indéfiniment différentiable sur G_v. Alors l'image réciproque $H^*\overset{0}{T}$ sera définie par :

$$\text{(IX, 5; 28)}\quad \overset{0}{T}_{\xi^{-1}x}\cdot\psi(x,\xi)\,\underline{dx\,d\xi} = \overset{0}{T}_v\cdot \left[(\Delta(\nu))^{-1}\int_G \psi(w, w\nu^{-1})\,dw\right]\underline{d\nu}.$$

Supposons en particulier fixée une fois pour toutes, sur G, une mesure de Haar $\underline{dx}$ invariante à gauche. Appelons alors $\overset{0}{\delta}$ le 0-courant pair associé à la distribution de Dirac $\underline{\overset{*}{\delta}}$ de l'origine par la mesure de Haar : $\underline{\overset{*}{\delta}} = \overset{0}{\delta}\,\underline{dx}$. Autrement dit on a $\overset{0}{\delta}.\psi(x)\,\underline{dx} = \psi(0)$. L'image réciproque est alors définie par :

$$\text{(IX, 5; 29)}\quad \overset{0}{\delta}_{\xi^{-1}x}\cdot\psi(x,\xi)\,\underline{dx\,d\xi} = \int_G \psi(w,w)\,dw.$$

Par abus de langage, si G est muni une fois pour toutes d'une mesure de Haar invariante à gauche et d'une orientation inva-

(1) En posant $\xi^{-1}w = \eta^{-1}$ ou $\xi = w\eta$, pour w fixé. Comme $d\xi$ est une mesure de Haar invariante à gauche, $d\xi = d\eta$

(2) En posant $\eta = \nu^{-1}$. Ici $\Delta(\nu)$ est le module de G (voir Weil [1], p. 40)

(3) L'interversion des intégrations est légitime, puisque $(\Delta(\nu))^{-1}\,\theta(\nu)\,\psi(w, w\nu^{-1})$ est continue à support compact

riante à gauche, auquel cas on pourra parler sans ambiguïté de distributions sur G, nous appellerons $T_{\xi^{-1}x}$, où T est une distribution sur G, la distribution associée au 0-courant pair $\overset{0}{T}_{\xi^{-1}x}$ à partir du 0-courant pair $\overset{0}{T}$. Plus particulièrement encore, si V est un espace vectoriel muni d'une mesure de Lebesgue et d'une orientation, et si T est une distribution sur V, on définira la distribution $T_{x-\xi}$ par :

$$\text{(IX, 5; 30)} \quad T_{x-\xi} \cdot \psi(x, \xi) = T_v \cdot \int_V \psi(w, w - v)\, dw.$$

En particulier, on aura :

$$\text{(IX, 5; 31)} \quad \delta_{x-\xi} \cdot \psi(x, \xi) = \int_V \psi(w, w)\, dw. \text{ [1]}$$

Le courant $T_{\xi^{-1}x}$ joue un rôle important dans la convolution des courants sur le groupe de Lie; voir Norguet [1], Marianne Guillemot [1], Braconnier [1].

Exemple 2. Courants liés à une forme quadratique sur un espace vectoriel de dimension finie

Soit V un espace vectoriel de dimension finie m sur R, et soit Q une forme quadratique sur V. Alors Q est une application C^∞ de V dans R; ici $r = m - 1$. Pour tout p-courant impair $\overset{p}{\underline{T}}$ sur V, à support compact, il existe donc une image directe $Q\underline{T}$, $(p - m + 1)$-courant impair sur R; les seuls cas non triviaux sont en fait $p = m - 1$ et $p = m$. Si Q est définie positive, V est euclidien pour Q, et $Q : V \to R$ est propre; donc on peut même supposer T à support quelconque, et on a par exemple :

$$\text{(IX, 5; 32)} \quad \begin{cases} Q\overset{n}{\underline{\delta}} = \overset{1}{\underline{\delta}} \\ Q\overset{n}{\underline{\widehat{dx}}} = \dfrac{1}{2} S_n\, t^{\frac{n-2}{2}} \overset{1}{\underline{\widehat{dt}}}, \end{cases}$$

où S_n est l'aire de la sphère unité dans V, soit $\dfrac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$.

[1] On retrouvera une démonstration de ces formules dans Schwartz [11], formule (I,4; 21), p. 105

En effet, si $\varphi \in \overset{0}{\mathfrak{D}}(\mathrm{R})$, et si on appelle aussi r la fonction $\sqrt{\mathrm{Q}}$:

$$(\mathrm{IX}, 5; 33) \qquad < \mathrm{Q}\,(dx), \underline{\varphi} > = < dx, \varphi^{\circ}\mathrm{Q} >$$
$$= \int_{\mathrm{V}} \varphi\,(r^2)\,\underline{dx} = \int_0^{+\infty} \varphi\,(r^2)\,\mathrm{S}_n\, r^{n-1}\, dr$$
$$= \int_0^{+\infty} \varphi\,(t)\,\mathrm{S}_n\, t^{\frac{n-1}{2}} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = < \mathrm{S}_n \frac{t^{\frac{n-2}{2}}}{2}, \varphi >.$$

Ces formules sont systématiquement utilisées dans Schwartz [13], exposés 7, 8, 9, pour l'étude des distributions sur V, invariantes par les opérateurs orthogonaux relatifs à Q. Si on appelle $\mathfrak{D}'$ (V ; Q) l'espace de ces distributions, identifié à $\overset{n}{\underline{\mathfrak{D}}'}$ (V; Q), et si $\mathfrak{D}'$ (R_+) est identifié à $\overset{1}{\underline{\mathfrak{D}}'}$ (R_+), on montre que *Q : $\underline{T} \rightarrow Q\underline{T}$ est un isomorphisme de $\mathfrak{D}'$ (V; Q) sur $\mathfrak{D}'$ (R_+).*

Revenons maintenant au cas général où Q est de signature quelconque, mais non dégénérée. Alors l'application Q : V $\rightarrow$ R, a le rang 1 en tout point distinct de l'origine O, et le rang 0 à l'origine. Donc on peut appliquer le théorème IV; si T est un courant pair sur R, $\mathrm{T}_{\mathrm{R}(x)}$ est un courant pair de même degré sur V — O, évidemment invariant par le groupe orthogonal de V relativement à Q. Les propriétés de T_{Q} ont été étudiées par de Rham [4], Methee [1], Carmen Braga [1]. On démontre que, si on identifie les distributions sur R et sur V — O aux 0-courants pairs, *l'opération* Q^* : T $\rightarrow$ T_{Q} *est un isomorphisme de* $\mathfrak{D}'$ (R) *sur* $\mathfrak{D}'$ *(V — O ; Q) lorsque Q n'est ni définie positive ni définie négative* (¹).

On notera que, si Q est définie positive ou définie négative, on peut étudier $\mathfrak{D}'$ (V; Q) par l'image directe des courants impairs de dimension 0; sinon on ne peut étudier que $\mathfrak{D}'$ (V — O; Q), et cette fois par l'image réciproque des courants pairs de degré 0.

Appliquons par exemple la formule (IX, 5; 3). Soit $\mathrm{V} = \mathrm{R}^n$, $\mathrm{Q}\,(x_1, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_{n-1}^2 - x_n^2$. Soit T un 0-courant pair sur R, et T′, T″, ses 2 premières dérivées. Alors

$$(\mathrm{IX}, 5; 34) \qquad \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathrm{T}_{x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2-x_n^2}) = \pm\, 2x_i\, \mathrm{T}'_{x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2-x_n^2},$$

$\pm$ signifiant + si $i = 1, 2, \ldots, n-1$, et — si $i = n$.

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\mathrm{T}_{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2-x_n^2} = 4x_i^2\,\mathrm{T}''_{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2-x_n^2} \pm 2\,\mathrm{T}'_{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2-x_n^2}.$$

(¹) Si Q est définie positive ou négative, c'est un isomorphisme de $\mathfrak{D}'$ $(\mathrm{R}_+ - \mathrm{O})$ sur $\mathfrak{D}'$ (V — O; Q)

En posant $\square = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ (d'Alembertien) :

$$
\text{(IX, 5; 35)} \quad \begin{aligned} &\square\, T_{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2-x_n^2} \\ &= 4\,(x_1^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - x_n^2)\, T''_{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2-x_n^2} \\ &+ 2\,n\, T'_{x_1^2+\cdots+x_{n-1}^2-x_n^2} \\ &= S_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2-x_n^2}, \end{aligned}
$$

où S est le 0-courant pair $4\,T''_t + 2\,n\,T'_t$ sur R. Donc $T_{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_{n-1}^2-x_n^2}$ aura un d'Alembertien nul, si et seulement si T vérifie sur R l'équation différentielle $4t T'' + 2n T' = 0$.

Exemple 3. Soit H une application C^∞ de U^n dans R; on supposera que H' est $\neq 0$ en tout point de U. Alors H est de rang constant 1, et on peut appliquer le théorème IV, si U est sans bord.

Soit $a \in R$; $H^{-1}(\{a\})$ est une hypersurface Σ_a de U. Elle est canoniquement munie d'un sens de passage, celui des H croissants (une courbe transversale à Σ_a a pour sens positif en un point de Σ_a celui pour lequel H est croissante). Elle définit donc une chaîne tordue de dimension $n - 1$, ou un 1-courant pair, que nous appellerons encore Σ_a (exemple 7, p. 328). Pour la définition de cette chaîne tordue, on utilise l'injection orientée de Σ_a dans U; pour définir cette injection orientée, rappelons qu'en un point de Σ_a, l'orientation transversale positive (sens des H croissants) suivie d'une orientation de Σ_a, donne l'orientation correspondante de U. Cela revient à dire ceci; H définit localement une fibration de U, c'est-à-dire une expression de U comme produit de R par Σ_a; on considère qu'on écrit le produit en mettant R d'abord : $R \times \Sigma_a$. Si alors $\overset{n-1}{\underline{\omega}}$ est une $(n-1)$-forme impaire continue sur U, elle induit une $(n-1)$-forme impaire sur Σ_a, et $< \Sigma_a, \underline{\omega} >$ est l'intégrale sur Σ_a de cette forme induite.

D'autre part $H\underline{\omega}$ est une 0-forme impaire sur R, son intégrale sur les fibres $\int_{\text{fibres}} \underline{\omega}$. Cette intégrale se calcule suivant la méthode indiquée page 383 et suivantes. Mais là on doit, dans la fibration locale de U par H, c'est-à-dire dans l'expression locale de U comme produit, écrire $\Sigma_a \times R$ et non $R \times \Sigma_a$ (note (¹) page 387);

Donc $\int_{\text{fibres}} \overset{n-1}{\underline{\omega}} = \mathrm{H}\overset{n-1}{\underline{\omega}}$ est, sur R, la fonction $x \to (-1)^{n-1} \int_{\Sigma_x} \overset{n-1}{\underline{\omega}} =$
$= (-1)^{n-1} < \Sigma_x, \underline{\omega} > = < \omega, \Sigma_x >.$

Alors l'image réciproque $\mathrm{H}^*\overset{1}{\mathrm{T}}$ d'un 1-courant pair $\overset{1}{\mathrm{T}}$ sur R est un 1-courant pair donné par :

$$(\mathrm{IX}, 5\,; 36) \quad < \overset{n-1}{\underline{\varphi}}, \mathrm{H}^*\,\mathrm{T} > = < \mathrm{H}\,\varphi, \mathrm{T} > = < < \overset{n-1}{\underline{\varphi}}, \Sigma_x >, \mathrm{T}_x > = (-1)^{n-1} < \int_{\Sigma_x} \overset{n-1}{\underline{\varphi}}, \mathrm{T}_x >$$

d'où l'on déduit :

$$(\mathrm{IX}, 5\,; 37) \quad < \mathrm{H}^*\overset{1}{\mathrm{T}}, \overset{n-1}{\underline{\varphi}} > = < \mathrm{T}_x, \int_{\Sigma_x} \overset{n-1}{\underline{\varphi}} >.$$

En particulier :

$$(\mathrm{IX}, 5\,; 38) \quad < \mathrm{H}^*\,\overset{1}{\delta}_{(a)}, \overset{n-1}{\underline{\varphi}} > = \int_{\Sigma_a} \overset{n-1}{\underline{\varphi}} \quad \text{ou}$$

$$(\mathrm{IX}, 5\,; 39) \qquad \mathrm{H}^*\,\overset{1}{\delta}_{(a)} = \Sigma_a,$$

en désignant par $\overset{1}{\delta}_{(a)}$ le 1-courant pair associé à $\overset{1}{\underline{\delta}}_{(a)}$ par l'orientation de R.

Soit Y la fonction d'Heaviside sur R; on a $d\mathrm{Y} = \delta$ (courants pairs). La commutativité de H^* avec d donne :

$$(\mathrm{IX}, 5\,; 40) \qquad d\,(\mathrm{Y} \circ \mathrm{H}) = \Sigma_0,$$

ce qui n'est autre que la formule de Stokes ou (IX, 3; 18).

§ 6. Transformation de Fourier des courants tempérés sur un espace vectoriel de dimension finie (1)

Soit V^n un espace vectoriel de dimension finie n sur R. Pour tout p, on définit trivialement l'espace $\overset{p}{\mathcal{S}}(\mathrm{V}) = \overset{p}{\mathcal{S}}$ des p-formes C^∞ à décroissance rapide ainsi que leurs dérivées, et l'espace analogue $\overset{p}{\underline{\mathcal{S}}}(\mathrm{V}) = \overset{p}{\underline{\mathcal{S}}}$ de p-formes tordues. Le dual de $\overset{n-p}{\underline{\mathcal{S}}}$ est l'espace $\overset{p}{\mathcal{S}'}$ des p-courants pairs tempérés, le dual de $\overset{n-p}{\mathcal{S}}$ est l'espace $\overset{p}{\underline{\mathcal{S}'}}$ des p-courants tordus tempérés. Un courant est tempéré si et seulement

(1) Cette étude est due à Scarfiello [1].

si, après choix d'une base de V, son expression suivant (IX, 3; 2) a des coefficients qui sont des distributions tempérées.

La transformée de Fourier $\mathcal{F}$ d'une $\varphi \in \overset{n}{\underline{\mathcal{S}}}(V)$ est une fonction $\psi \in \overset{0}{\mathcal{S}}(V')$, V' dual de V, définie par

$$\text{(IX, 6; 1)} \qquad \psi(y) = \int_V \exp(-2\, i\, \pi\, x.y)\, \overset{n}{\underline{\varphi}}(x),$$

où $x.y$ est le produit scalaire de $x \in V$ et $y \in V'$. Ainsi $\mathcal{F}$ envoie $\overset{n}{\underline{\mathcal{S}}}(V)$ dans $\overset{0}{\mathcal{S}}(V')$, et de même $\overset{n}{\underline{\mathcal{S}}}(V')$ dans $\overset{0}{\mathcal{S}}(V)$.

C'est d'ailleurs un isomorphisme, comme on le voit en choisissant une base de V; et $\overline{\mathcal{F}}$ a la même propriété.

Par transposition

$$\text{(IX, 6; 2)} \qquad < \mathcal{F}\, \overset{n}{\underline{T}}, \overset{n}{\underline{\varphi}} > = < \overset{n}{T}, \mathcal{F}\, \overset{n}{\varphi} >,$$

$\mathcal{F}$ est un isomorphisme de l'espace $\overset{n}{\underline{\mathcal{S}'}}(V)$ des n-courants impairs tempérés sur V sur l'espace $\overset{0}{\mathcal{S}'}(V')$ des 0-courants pairs tempérés sur V'; de même avec échange des rôles de V et V', et de même pour $\overline{\mathcal{F}}$. Par tensorisation avec un espace vectoriel de dimension finie E sur C, $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$ sont des isomorphismes de $\overset{n}{\underline{\mathcal{S}'}}(V) \otimes E$ sur $\overset{0}{\mathcal{S}'}(V') \otimes E$.

Nous allons maintenant définir les images de Fourier de courants tempérés de type quelconque. Soit $\overset{k}{\omega}_V$ la k-forme « identique » de V à valeurs dans $\overset{k}{\Lambda}(V)$, forme qui, à chaque k-vecteur de V associe ce k-vecteur lui-même. Alors, si $\overset{p}{\underline{T}} \in \overset{p}{\underline{\mathcal{S}'}}(V)$, $\overset{p}{\underline{T}} \wedge \overset{n-p}{\omega}_V$ est un n-courant impair à valeurs dans $\overset{n-p}{\Lambda}(V)$, c'est-à-dire un élément de $\overset{n}{\underline{\mathcal{S}'}}(V) \otimes \overset{n-p}{\Lambda}(V)$. On peut donc prendre son image de Fourier par la tensorisation ci-dessus, avec $E = \overset{n-p}{\Lambda}(V)$. Donc $\mathcal{F}(\overset{p}{\underline{T}} \wedge \overset{n-p}{\omega}_V)$ est un 0-courant pair tempéré sur V' à valeurs dans $\overset{n-p}{\Lambda}(V)$. Mais $\overset{0}{\mathcal{S}'}(V') \otimes \overset{n-p}{\Lambda}(V)$ est canoniquement isomorphe à $\overset{n-p}{\mathcal{S}'}(V')$; en effet une fonction sur V' à valeurs dans $\overset{n-p}{\Lambda}(V)$ est exactement un champ de $(n-p)$-covecteurs sur V', c'est-à-dire une $(n-p)$-forme sur

V′, et cette identification se prolonge par continuité aux courants tempérés (voir d'ailleurs les sections-distributions d'espaces fibrés à fibres vectorielles, p. 339). Donc $\overset{p}{\underline{\mathrm{T}}} \to \mathcal{F}\,(\overset{p}{\underline{\mathrm{T}}} \wedge \overset{n-p}{\overline{\omega_{\mathrm{V}}}})$ est une application linéaire continue de $\overset{p}{\underline{\mathcal{S}'}}\,(\mathrm{V})$ dans $\overset{n-p}{\overline{\mathcal{S}'}}\,(\mathrm{V}')$. Nous l'appellerons $\overset{p\to n-p}{\mathcal{F}_{\omega}}$; l'opération $\overset{p\to n-p}{{}_{\omega}\mathcal{F}}$ serait définie par $\overset{p}{\underline{\mathrm{T}}} \to \mathcal{F}\,(\overset{n-p}{\overline{\omega_{\mathrm{V}}}} \wedge \overset{p}{\underline{\mathrm{T}}})$. On définirait de même $\overset{p\to n-p}{\overline{\mathcal{F}}_{\omega}}$ et $\overset{p\to n-p}{{}_{\omega}\overline{\mathcal{F}}}$. Si maintenant on appelle $\overset{k}{\omega}_{\mathrm{V}}$ la k-forme tordue « identique » à valeurs dans $\overset{k}{\underline{\Lambda}}\,(\mathrm{V})$, qui, à chaque k-vecteur tordu de V, fait correspondre lui-même, on définira $\overset{p\to n-p}{\mathcal{F}_{\underline{\omega}}}$, application $\overset{p}{\mathrm{T}} \dashrightarrow \mathcal{F}\,(\overset{p}{\mathrm{T}} \wedge \underline{\overset{n-p}{\omega_{\mathrm{V}}}})$ de $\overset{p}{\mathcal{S}'}\,(\mathrm{V})$ dans $\underline{\overset{n-p}{\mathcal{S}'}}\,(\mathrm{V}')$; et de même les autres applications, avec ${}_{\underline{\omega}}\mathcal{F}$ et avec $\overline{\mathcal{F}}$.

Tel est le mécanisme de la transformation de Fourier pour les courants pairs et impairs tempérés. On en déduira aisément ses principales propriétés. D'abord c'est un isomorphisme et la formule de réciprocité de Fourier s'écrit

$$(\mathrm{IX}, 6; 3) \qquad {}_{\omega_{\mathrm{V}'}}\overset{n-p\to p}{\overline{\mathcal{F}}} \circ \overset{p\to n-p}{\mathcal{F}_{\omega_{\mathrm{V}}}} = \text{identité},$$

avec 7 autres formules analogues. Autrement dit, pour avoir l'inverse d'une transformation de Fourier, on échange $\mathcal{F}$ et $\overline{\mathcal{F}}$, on échange ω et $\underline{\omega}$, et la droite avec la gauche pour la place de ω par rapport à $\mathcal{F}$.

Démontrons cette formule. Prenons pour cela une base de V, de sorte que $\mathrm{V} = \mathrm{V}' = \mathrm{R}^n$. Mais, comme nous l'avons déjà fait en réalité partout au chapitre VII, nous maintiendrons V et V′ distincts; nous appellerons $\vec{e}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, la base de $\mathrm{V} = \mathrm{R}^n$, $\vec{\mathrm{f}}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, la base duale de V′; nous appellerons x_i les fonctions coordonnées sur V, y_i les fonctions coordonnées sur V′. L'orientation de R^n permet d'identifier courants pairs et impairs, ce que nous ferons.

Alors on peut écrire

$$(\mathrm{IX}, 6; 4) \qquad \overset{p}{\mathrm{T}} = \sum_{\mathrm{I}} \mathrm{T}_{\mathrm{I}}\, dx_{\mathrm{I}},$$

I parties ordonnées à p éléments de $\{1, 2, \ldots, n\}$;

$$\text{(IX, 6; 5)} \qquad \overset{n-p}{\omega_{\mathrm{V}}} = \sum_{\mathrm{J}} \vec{e}_{\mathrm{J}}\, dx_{\mathrm{J}},$$

J parties ordonnées à $n - p$ éléments de

$$\{1, 2, \ldots, n\},\ \mathrm{J} = \{j_1, j_2, \ldots, j_{n-p}\},\ j_1 < j_2 < \cdots < j_{n-p},$$

$$\vec{e}_{\mathrm{J}} = \vec{e}_{j1} \wedge \vec{e}_{j2} \wedge \cdots \wedge \vec{e}_{j_{n-p}} \in \overset{n-p}{\vec{\Lambda}}(\mathrm{V});$$

$$\text{(IX, 6; 6)} \qquad \overset{p}{\vec{\mathrm{T}}} \wedge \overset{n-p}{\omega_{\mathrm{V}}} = \sum_{\mathrm{J}=\complement \mathrm{I}} \mathrm{T}_{\mathrm{I}}\, \vec{e}_{\mathrm{J}}\, dx_{\mathrm{I}} \wedge dx_{\mathrm{J}} =$$

$$= \sum_{\mathrm{J}=\complement \mathrm{I}} \mathrm{T}_{\mathrm{I}}\, \vec{e}_{\mathrm{J}}\, (-1)^{\rho(\mathrm{I},\mathrm{J})}\, dx,$$

$\rho(\mathrm{I}, \mathrm{J})$ signature de la permutation $\{\mathrm{I}, \mathrm{J}\}$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$, dx mesure de Lebesgue;

$$\text{(IX, 6; 7)} \quad \mathrm{S} = \mathcal{F}(\overset{p}{\vec{\mathrm{T}}} \wedge \overset{n-p}{\omega_{\mathrm{V}}}) = \sum_{\mathrm{J}=\complement \mathrm{I}} \mathcal{F}(\mathrm{T}_{\mathrm{I}})\, \vec{e}_{\mathrm{J}}\, (-1)^{\rho(\mathrm{I},\mathrm{J})},$$

où T_{I} est la distribution associée à $\mathrm{T}_{\mathrm{I}}\, dx$ par la mesure de Lebesgue de R^n, $\mathcal{F}(\mathrm{T}_{\mathrm{I}})$ son image de Fourier suivant le chapitre VII, identifiée à un 0-courant sur $\mathrm{R}^n = \mathrm{V}'$; on doit identifier S à un $(n-p)$-courant sur V', en identifiant les $\vec{e}_i$ aux différentielles des coordonnées sur $\mathrm{V}' = \mathrm{R}^n$, on remplace donc $\vec{e}_{\mathrm{J}}$ par dy_{J}:

$$\text{(IX, 6; 8)} \qquad \overset{n-p}{\mathrm{S}} = \sum_{\mathrm{J}=\complement \mathrm{I}} (\mathcal{F}\,\mathrm{T}_{\mathrm{I}})_y\, (-1)^{\rho(\mathrm{I},\mathrm{J})}\, dy_{\mathrm{J}};$$

$$\text{(IX, 6; 9)} \qquad \overset{p}{\omega_{\mathrm{V}'}} = \sum_{\mathrm{K}} \vec{f}_{\mathrm{K}}\, dy_{\mathrm{K}},$$

K parties ordonnées à p éléments de $\{1, 2, \ldots, n\}$;

$$\text{(IX, 6; 10)} \quad \overset{p}{\omega_{\mathrm{V}'}} \wedge \overset{n-p}{\mathrm{S}} = \sum_{\mathrm{J}=\complement \mathrm{I}} \mathcal{F}(\mathrm{T}_{\mathrm{I}})\, (-1)^{\rho(\mathrm{I},\mathrm{J})}\, dy_{\mathrm{I}} \wedge dy_{\mathrm{J}}\, \vec{f}_{\mathrm{I}}$$

$$= \sum_{\mathrm{I}} \mathcal{F}(\mathrm{T}_{\mathrm{I}})\, \vec{f}_{\mathrm{I}}\, dy;$$

$$\text{(IX, 6; 11)} \quad \overline{\mathcal{F}}\,(\omega_{V'} \wedge \overrightarrow{\overset{n\to p}{S}}) = \sum_{I} T_I\, \bar{f}_I = \sum_{I} T_I\, dx_I\,;$$

ce qui montre la formule (IX, 6; 3).

Toute la théorie étudiée est invariante par les automorphismes de la structure c'est-à-dire les opérateurs linéaires inversibles de V. Si donc H est un tel opérateur, $\check{H}$ son contragrédient (ou transporté comme opérateur sur V′ par transport de structure, $\check{H} = ({}^tH)^{-1}$), on aura nécessairement, pour tout p et tout $\overset{p}{T} \in \overset{p}{\mathcal{D}'}(V)$:

$$\overset{p\to n-p}{\overline{\mathcal{F}_{\omega_V}}}\,(H\underline{\overset{p}{T}}) = \check{H}\,(\overset{p\to n-p}{\overline{\mathcal{F}_{\omega_V}}}\,\underline{T})$$

et les autres formules analogues.

Si en particulier on prend $V = R^n = V'$, $p = n$, et qu'on identifie 0 et n-courants pairs ou impairs à des distributions, on voit cependant que, dans le 1er membre, H est l'image directe d'un n-courant impair, et, dans le 2e, $\check{H}$ est l'image directe d'un 0-courant pair, de sorte qu'on tombera inévitablement sur les difficultés indiquées page 371. Pour $\overset{n}{T}$, $H\overset{n}{T}$ est celui qui a été défini au chapitre I, à la formule (I, 5; 6); *si $\mathcal{F}T$ est une fonction continue* f, on a $(\check{H}f)(y) = f(\check{H}^{-1}(y)) = f({}^tHy)$; on retrouve la formule (VII, 6; 11), dont nous avions annoncé alors la généralisation possible.

ALBERTONI-CUGIANI

[1] « *Sul problema del cambiamento di variabili nelle teoria delle distribuzioni* ». Nuovo Cimento, vol. VIII, nº 11, 1951, p. 1-15 et vol. X, nº 2, 1953, p. 1-17.

ARENS

[1] « *Duality in linear spaces* ». Duke Math. Journal, 14 (1947), p. 787-794.

ARSAC

[1] « *Transformation de Fourier et théorie des distributions* ». Paris, Dunod, 1961.

AUTHIER

[1] « *Sur une classe d'ensembles convexes liés à la transformation de Laplace* ». Journal d'Analyse Math, Jérusalem, à paraître.

BANACH

[1] « *Théorie des opérations linéaires* ». Monografje Matematyczne, Varsovie-Lwow, 1932.

BANACH-STEINHAUS

[1] « *Sur le principe de condensation des singularités* ». Fundamenta Mathematicae, tome IX (1927), p. 57.

DE BARROS-NETO

[1] « *Analytic distribution kernels* ». Trans. Amer. Math. Soc. vol. 100 (1961), p. 425-438.

DE BARROS NETO-BROWDER

[1] « *The analyticity of kernels* ». Canadian Journ. of Math. vol. 13 (1961), p. 645-649.

BERNSTEIN (S.)

[1] « *Leçons sur les propriétés extrémales et la meilleure approximation des fonctions analytiques d'une variable réelle* ». Paris, Gauthier-Villars, 1926.

[2] « *Sur l'analyticité des solutions des équations aux dérivées partielles elliptiques* ». Leipzig, Teubner, 1904.

BESICOVITCH

[1] « *Almost periodic functions* ». Cambridge, 1932.

BEURLING

[1] « *Sur les spectres des fonctions* ». Colloque Analyse Harmonique Nancy. CNRS, Paris, Gauthier-Villars, 1949, p. 9-30.

BOAS

[1] « *Functions with positive derivatives* », Duke Math. Journal, 8 (1941), p. 163-172.

[2] « *Poissons's summation formula in* L^2 ». Journal of London Math. Society, 21 (1946), p. 102-105.

BOCHNER

[1] « *Vorlesungen über Fouriersche Integrale* ». Leipzig, 1932.

[2] « *Linear partial differential equations, with constant coefficients* ». Annals of Math., 47 (1946), p. 202-212.

[3] « *Several complex variables* », Princeton, 1948.

[4] « *Bounded analytic functions in several variables and multiple Laplace integrals* ». American Journal of Mathematics, 59 (1937), p. 732.

BOAGEN

[1] « *Note on Poissons' formula* ». Journal of London Math. Society, 19 (1944), p. 213-219.

BOURBAKI

[1] « *Topologie générale. Structures topologiques et structures uniformes* ». Fascicule II, quatrième édition corrigée, Paris, Hermann, 1964.

[2] « *Topologie générale. Utilisation des nombres réels en topologie générale* ». Fascicule VIII, deuxième édition, Paris, Hermann, 1958.

[3] « *Sur les espaces de Banach* ». Comptes rendus Académie des Sciences, 206 (1938), p. 1701-1704.

[4] « *Topologie générale. Groupes topologiques. Nombres réels* ». Fascicule III, troisième édition, Paris, Hermann 1961.

[5] « *Sur certains espaces vectoriels topologiques* ». Annales de l'Institut Fourier, tome II, 1950, p. 5-16.

[6] « *Espaces vectoriels topologiques* ». Fascicules XV et XVIII, deuxièmes éditions. Paris, Hermann (1966, 1964).

[7] « *Intégration* ». Fascicule XIII, deuxième édition corrigée. Paris, Hermann, 1965.

[8] « *Topologie générale : Espaces fonctionnels. Dictionnaire* ». Fascicule X, deuxième édition, Paris, Hermann, 1961.

[9] « *Algèbre multilinéaire* ». Paris, Hermann, 1958.

BRACONNIER

[1] « *La convolution des courants* ». Comptes rendus Ac. Sciences, t. 252 (1961), p. 60-62.

BRAGA Carmen Lys

[1] « *Transformation de Fourier des Distributions invariantes* ». Département de Physique de la Faculté des Sciences de São Paulo, 1960.

BRELOT

[1] « *Étude de l'équation de la chaleur* $\Delta u = cu$, $c \geqslant 0$, *au voisinage d'un point singulier du coefficient* ». Annales École Norm. Sup., 48 (1931), p. 153-246.

[2] « *Étude des fonctions sous-harmoniques au voisinage d'un point* ». Paris, Hermann, 1934.

[3] « *Fonctions sous-harmoniques, presque sous-harmoniques ou sous-médianes* ». Annales Univ. Grenoble, 21 (1945), p. 75-90.

Browder-de Barros Neto
Voir de Barros Neto-Browder [1]

Bruhat
[1] « *Distributions sur un groupe localement compact et applications à l'étude des représentations des groupes* p-*adiques* ». Bull. Soc. Math. de France, 89 (1961), p. 43-75.
[2] « *Sur les représentations induites des groupes de Lie* ». Bull Soc. Math. de France, t. 84 (1956), p. 97-205.

Burbau
[1] « *Les solutions élémentaires des équations aux dérivées partielles totalement hyperboliques d'ordre plus grand que 2 et à un nombre impair de variables indépendantes* ». Comptes rendus Académie des Sciences, 225 (1947), p. 852-854.
[2] « *Les solutions élémentaires des équations lineaires aux dérivées partielles totalement hyperboliques d'ordre plus grand que 2 et à 4 variables indépendantes* ». Comptes rendus Académie des Sciences, 226 (1948), p. 150-152.
[3] « *Essai sur l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles* ». Mémoires Académie Royale Belgique, 15 (1936), p. 1-115.
[4] « *Les solutions élémentaires des équations linéaires aux dérivées partielles* ». Mémoires Académie Royale Belgique, 15 (1936), p. 1-37.

Carleman
[1] « *L'intégrale de Fourier et questions qui s'y rattachent* ». Uppsala, 1944.

Carson
[1] « *The Heaviside operational calculus* ». Bull. Amer. Math. Soc., 32 (1926), p. 43-68.

Cartan-Schwartz
[1] « *Théorème d'Atiyah-Singer sur l'indice d'un opérateur différentiel elliptique* » (Séminaire Cartan 1963-64), École Norm. Sup., Paris, 1964.

Chevalley
[1] « *Theory of Lie groups* ». Princeton, 1946.

Choquet
[1] « *Différences d'ordre supérieur* ». Intermédiaire des recherches mathématiques, 1 (1945), p. 31.

Choquet-Deny
[1] « *Sur quelques propriétés des moyennes, caractéristiques des fonctions harmoniques et polyharmoniques* ». Bull. Société Math. de France, 72 (1944), p. 118-141.

Courant-Hilbert
[1] « *Methoden der Mathematischen Physik* », Berlin, Springer, 1937.

Crum
[1] « *On the resultant of two functions* ». Quarterly Journal Math., 12 (1941), p. 108-111.

Cugiani-Albertoni
Voir Albertoni-Cugiani [1]

DENY
[1] « *Les potentiels d'énergie finie* ». Acta Mathematica, 82 (1950), p. 107-183.

DENY-CHOQUET
Voir CHOQUET-DENY [1]

DIEUDONNÉ
[1] « *La dualité dans les espaces vectoriels topologiques* ». Annales École Norm. Sup. 59 (1942), p. 108-139.
[2] « *Une généralisation des espaces compacts* ». Journal de Math. pures et appliquées, 23 (1944), p. 65-76.
[3] « *Dérivées et différences de fonctions de variables réelles* ». Annales École Norm. Sup., 61 (1944), p. 231-248.
[4] « *Sue les fonctions continues numériques définies dans un produit de 2 espaces compacts* ». Comptes rendus Académie Sciences, 205 (1937), p. 593-595.

DIEUDONNÉ-SCHWARTZ
[1] « *La dualité dans les espaces $\mathcal{F}$ et $\mathcal{LF}$* ». Annales de l'Institut Fourier, tome I (1949), p. 61-101.

DIRAC
[1] « *The physical interpretation of the quantum dynamics* ». Proc. of the Royal Society, London, section A, 113 (1926-27), p. 621-641.

DOETSCH
[1] « *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation* ». Berlin, Springer, 1937.

DOLBEAULT
[1] « *Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe* ». Annals of Math. Vol. 64 (1956), p. 83-130, et vol. 65 (1957), p. 282-330.

DUFRESNOY
[1] « *Sur le produit de composition de 2 fonctions* ». Comptes rendus Académie des Sciences, 225 (1947), p. 857-859.

EDWARDS
[1] « *Functional analysis, theory and applications* ». Holt, Rinehart and Wiston, Chicago, 1965.

EHRENPREIS
[1] « *Solutions of some problems of division* ». Amer. Journal of Math., vol. 76, nº 4 (1954), p. 883-903.
[2] « *The division problem for distribations* ». Proc. Nat. Acad. Sc., USA, 41-10 (1955), p. 756-758.
[3] « *Completely inversible operators* ». Proc. Nat. Acad. Sc., USA, 41-11 (1955), p. 945-946.

FANTAPPIÉ
[1] « *Theoria de los funcionales analyticos y sus aplicaciones* ». Barcelone, 1943.

FREDHOLM
[1] « *Sue l'intégrale fondamentale d'une équation différentielle elliptique à coefficients constants* ». Rendiconti Circolo Mat. Palermo, 25,1908.

FRIEDRICHS

[1] « *On differential operators in Hilbert spaces* ». Amer. Journal Math. 61 (1939), p. 523-544.

[2] « *Differentiability of the solutions of linear elliptic differential equations* ». Communications on pure and applied mathematics, vol. 6 (1953), p. 299-326.

FROSTMAN

[1] « *Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles* ». Lund, Univers. Matemat. Seminarium, 3 (1935), p. 1-115.

GÅRDING

[1] « *Linear hyperbolic partial differential equations with constant coefficients* ». Acta Mathematica, vol. 85, 1950, p. 1-62.

GARNIR

[1] « *Sur la formulation des problèmes aux limites dans la théorie des distributions* ». Bull. Société Royale des Sciences de Liège (1951), p. 497-513.

[2] « *Sur la formulation des problèmes aux limites dans la théorie des distributions* ». Bull. Société Royale des Sciences de Liège (1951), p. 639-649.

[3] « *Sur deux équations de la théorie des distributions* ». Bull. Société Royale des Sciences de Liège (1951), p. 650-666.

[4] « *Sur les distributions résolvantes des opérateurs de la physique mathématique* ». Bull. Société Royale des Sciences de Liège (1951), p. 174-296.

[5] « *Sur la transformation de Laplace des distributions* ». C.R.Ac. Sci. tome 234 (1952), p. 583-585.

GEL'FAND et SHILOV

[1] « *Fourier Transforms of rapidly increasing functions, and questions of uniqueness of the solution of Cauchy's problem* ». Uspehi Matem. Nauk (N.S.) 8, nº 6 (58), (1953), p. 3-54.

GEL'FAND, SHILOV, GRAEV, VILENKIN

5 tomes actuellement parus de « *Obobchennie Funktsii* » ou « *Fonctions généralisées* ». Éditions physico-mathématiques, Moscou, à partir de 1959. Traductions françaises, américaines, allemandes.

GILLIS

[1] « *Sur les formes différentielles et la formule de Stokes* ». Mémoires de l'Académie royale de Belgique, 20 (1943), p. 1-95.

GODEMENT

[1] « *Théorie des faisceaux* ». Deuxième édition, Hermann, Paris, 1965.

GROTHENDIECK

[1] « *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires* ». Memoirs of the American Mathematical Society, nº 16 (1955), p. 1-911 (chapitre I) et p. 1-140 (chapitre II).

[2] « *Résumé des résultats essentiels dans la théorie des produits tensoriels topologiques et des espaces nucléaires* ». Annales de l'Institut Fourier, tome IV (1952), p. 73-112.

[3] « *Sur les espaces de solutions d'une classe générale d'équation aux dérivées partielles* ». Journal d'Analyse Mathématique (Jérusalem), vol. II (1952-53), p. 243-280.

[4] « *Sur les espaces $\mathcal{F}$ et $\mathcal{DF}$* ». Summa Brasiliensis Mathematicae, vol. III (1954), p. 57-122.

[5] « *Espaces vectoriels topologiques* ». Soc. Math. de São Paulo, Brésil, 1958.

GUILLEMOT-TESSIER Marianne

[1] « *Convolution des courants sur un groupe de Lie* ». Ann. de l'École Norm. Sup., tome 79 (1962), p. 321-352.

HADAMARD

[1] « *Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques* ». Paris, Hermann, 1932 (nouvelle édition).

HALPERIN

[1] « *Introduction to the theory of distributions* ». University of Toronto Press, 1952.

HEAVISIDE

[1] « *On operators in Mathematical Physics* ». Proc. of the Royal Society, London, 52 (1893), p. 504-529 et 54 (1894), p. 105-143.

HELGASON

[1] « *Differential geometry and symmetric spaces* ». Acad. Press, New-York, 1962.

HERGLOTZ

[1] « *Ueber die Integration linearer partieller Differential gleichungen mit konstanten Koeffizienten* ». Bericht Verhandlungen Sächsischen Akademie Wissenschaften, Leipzig, 78 (1926), p. 93-126 et 287-318.

HILBERT

[1] « *Gründzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* ». Göttinger Nachr.,(1910), p. 1-65.

HILBERT-COURANT

Voir COURANT-HILBERT [1].

HOPF

[1] « *Zur algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten* ». Journal für reine und angewandte Mathematik, 163, § 3 et 4, 1930.

HÖRMANDER

[1] « *On the theory of general partial differential operators* ». Acta Mathematica, vol. 94 (1955), p. 162-248.

[2] « *On the division of distributions by polynomials*. Arkiv för Mat., Kungl. Svenska Vetenskapsakad., 3, nº 53 (1958), p. 555-568.

[3] « *Linear partial differential operators* », Springer, Berlin, 1963.

HORVATH

[1] « *Topological vector spaces* ». University of Maryland, 1963.

HOVE (VAN)

[1] « *Un prolongement de l'espace fonctionnel de Hilbert* ». Mémoires Académie Royale Belgique, 34 (1938), p. 604-616.

JOHN

[1] « *General properties of solutions of linear elliptic partial differential equations* ». Symposium of spectral theory and differential problems, Oklahoma, p. 113-175.

KODAIRA

[1] « *Harmonic fields in Riemannian manifolds (generalized potential theory)* ». Annals of Math. 50 (1949), p. 587-665.

[2] « *The theorem of Riemann-Roch on compact analytic surfaces* ». Amer. Journal of Mathematics, vol. 73, nº 4 (1951), p. 813-875.

KODAIRA-de RHAM

[1] « *Harmonic Integrals* ». Lectures, Institute for Advanced Study, Princeton, 1950.

KÖNIG

[1] « *Neue Begründüng der Theorie der Distributionen von L. Schwartz* ». Mathem. Nachrichten, vol. 9, fasc. 3 (1953), p. 129-148.

[2] « *Multiplikation von Distributionen* ». Math. Annalen, vol. 128 (1955), p. 420-452.

KOREVAAR

[1] « *Distributions defined by fundamental sequences* ». Ned. Akad. Wetenskap. Proc., vol. 58, 1955.

KÖTHE

[1] « *Die Stufenräume, eine einfache Klasse linearer vollkommener Räume* ». Math Zeit., 51 (1948), p. 317-345.

[2] « *Ueber die Vollständigkeit einer Klasse lokalkonvexer Räume* ». Mathem. Zeitschrift, vol. 52, fasc. 5 (1950), p. 627-630.

KRYLOFF

[1] « *Sur l'existence des dérivées généralisées des fonctions sommables* ». Comptes rendus Académie des Sciences URSS, 55 (1947), p. 375-378.

LAVOINE

[1] « *Transformation de Fourier des pseudo-fonctions* ». Centre Nat. Recherche Scient., Paris, 1963.

[2] « *Calcul symbolique des distributions et pseudo-fonctions* », Centre Nat. Recherche Scient., Paris, 1959.

LAX

[1] « *On Cauchy problem for hyperbolic equations, and the differentiability of solutions of elliptic equations* ». Communications of pure and applied mathematics (1955), p. 615-631.

LERAY

[1] « *Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace* ». Acta Math., 63 (1934), p. 193-248.

[2] «*Hyperbolic differentialequations*». Lectures, Institute for Advanced Study, Princeton, 1954.

[3] Conférence au Séminaire Bourbaki, ou cours à l'Institute for Advanced Study de Princeton, 1951.

LEVI (E.-E.)

[1] « *Sulle equazione lineari totalmente ellitiche alle derivati parziali* ». Rendiconti Circolo Mat. Palermo, 24 (1907), p. 275-317.

LIGHTHILL

[1] « *An introduction to Fourier Analysis and generalized functions* ». Cam. Univ. Press, New-York, 1958.

LIONS

[1] « *Problèmes aux limites en théorie des distributions* ». Acta Mathematica 94 (1955), p. 13-153.

[2] « *Supports dans la transformation de Laplace* ». Journal d'Analyse Mathématique, vol. 2 (1952-53), p. 369-380.

LIONS-SCHWARTZ

[1] « *Problèmes aux limites sur des espaces fibrés* ». Acta Mathematica, vol. 94 (1955), p. 155-159.

LOJASIEWICZ

[1] « *Division d'une distribution par une fonction analytique de variables réelles* ». C. R. Ac. R. Sc. Paris, 246 (1958) p. 683-686.

[2] « *Sur le problème de la division* ». Studia Math., t. 18 (1959), p. 87-136.

MACKEY

[1] « *On infinite dimensional linear spaces* ». Trans. Amer. Math. Soc., 57 (1945), p. 156-207.

[2] « *On convex topological lineur spaces* ». Transactions Amer. Math. Society, vol. 60 (1946), p. 519-537.

[3] « *Laplace Transform for locally compact abelian groups* ». Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 34 (1948), p. 156.

MALGRANGE

[1] « *Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution* ». Annales de l'Institut Fourier, tome VI (1955-56), p. 271-354.

[2] « *Équations aux dérivées partielles à coefficients constants. Solution élémentaire* ». C.R. Ac. Sc. Paris, t. 237 (1953), p. 1620-1622.

[3] « *Équations aux dérivées partielles à coefficients constants. Équations avec second membre* ». C. R. Ac. Sc. Paris, t. 238 (1954), p. 196-198.

[4] « *Sur une classe d'opérateurs différentiels hypo-elliptiques* ». Bull. Soc. Math. France, t. 85 (1957), p. 283-306.

MARTINEAU

[1] « *Sur les fonctionnelles analytiques et la transformation de Fourier-Borel* ». Journal d'analyse Math., Jerusalem, vol. 11 (1963), p. 1-164.

METHÉE

[1] « *Sur les distributions invariantes dans le groupe des rotations de Lorentz* ». Commentarii Math. Helvetici, vol. 28 (1954), p. 1-49.

[2] « *Transformées de Fourier de distributions invariantes liées à la résolution de l'équation des ondes* ». Colloques Internat. du CNRS, Paris, Colloque sur la Théorie des équations aux dérivées partielles (1956), p. 145-163.

[3] « *Systèmes différentiels du type de Fuchs en théorie des distributions* ». Comm. Math. Helvet., vol. 33 (1959), p. 38-46.

MIKUSINSKI

[1] « *Sur la méthode de généralisation de Laurent Schwartz et sur la convergence faible* ». Fundamenta Mathematicae, 35 (1948), p. 235-239.

[2] « *Sur les fondements du calcul opératoire* ». Studia Mathematica, tome XI, 1949, p. 41-70.

[3] « *L'anneau algébrique et ses applications dans l'analyse fonctionnelle* ». Annales Universitatis Mariae Curie-Sklodowska, Lublin, vol. 2, 1, section A (1947), p. 1-48, et vol. 3, 1, section A, (1949), p. 1-82.

[4] « *Une définition des distributions* ». Bull. Acad. Polon. Sci., t. III (1955), p. 589-591.

[5] « *Une introduction élémentaire à la théorie des distributions de plusieurs variables* ». C. I. M. E., Institut Math. Univ., Rome 1962.

[6] « *Operational Calculus* ». Pergamon Press, New-York, 1959.

[7] « *Une démonstration simple du théorème de Titchmarsh sur la convolution* ». Bull. Acad. Pol. Sc. vol. 7, nº 12 (1959), p. 715-717.

MIZOHATA

[1] « *La théorie des équations aux dérivées partielles : hypoellipticité des opérateurs différentiels elliptiques* ». Centre Nat. Recherche Scient. 1956, Paris; p. 165-177.

NIRENBERG

[1] « *Remarks on strongly elliptic partial differential equations* ». Communications on pure and applied mathematics, VIII (1955), p. 648-674.

NORGUET

[1] « *Problèmes sur les formes différentielles et les courants* ». Ann. Inst. Fourier, Grenoble, vol. 11 (1960), p. 1-88.

ORNSTEIN

[1] « *A non-inequality for differential operation in the L^1-norm* ». Arch. for Rat. Mechanics and Analysis. vol. 2 (1962), p. 40-49.

PALAIS

[1] « *Seminar on the Atiyah-Singer index theorem* ». Princeton Univ. Press, 1965.

PALEY-WIENER

[1] « *Fourier transforms in the complex domain* ». Amer. Math. Soc. Colloquium, New-York, 1934.

PALLU DE LA BARRIÈRE

[1] « *Sur les formules de transformation des intégrales multiples* ». Kongelige Norske Vidensk, Selskab, 21 (1948), p. 28-31.

[2] « *Sur une généralisation des formes différentielles extérieures* ». Kongelige Norske Vidensk, Selskab, 21 (1948), p. 35-38.

PETROWSKY

[1] « *Sur l'analyticité des solutions des systèmes d'équations différentielles* ». Recueil Math. (Mat. Sbornik), 5-47 (1939), p. 3-70.

[2] « *Ueber das Cauchysche Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen* ». Recueil Math. (Mat. Sbornik), 2-44 (1937), p. 815-868.

PLANCHEREL-POLYA

[1] « *Fonctions entières et intégrales de Fourier multiples* ». Commentarii Math. Helvet, 9 (1936-37), p. 224-248.

POL (VAN DER) et NIESSEN

[1] « *Symbolic calculus* ». Phil. Mag., 13 (1932), p. 537-577.

POLYA-PLANCHEREL

Voir PLANCHEREL-POLYA [1].

POPOVICIU

[1] « *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles* ». Mathematica, Cluj, 8 (1934), p. 1-85.

RADO

[1] « *Subharmonic functions* ». Ergebnisse, 5, Berlin, 1937.

RHAM (DE)

[1] « *Ueber mehrfache Integrale* ». Abhandlungen Math. Seminar Hansischen Univ., 12 (1938), p. 313-339.

[2] « *Relations entre la topologie et la théorie des intégrales multiples* ». Enseignement Math., n° 3-4 (1936), p. 213-228.

[3] « *Variétés différentiables.* Formes, courants, formes harmoniques ». Paris, Hermann, 1955.

[4] « *Solutions élémentaires d'équations aux dérivées partielles du second ordre à coefficients constants* ». Colloque Henri Poincaré, Paris CNRS, 1955.

RHAM (de) -KODAIRA

Voir KODAIRA-de RHAM [1].

RIESZ (Fr.)

[1] « *Sur les opérations fonctionnelles linéaires* ». Comptes rendus Académie des Sciences, 149 (1909), p. 974-976.

[2] « *Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel* ». Acta Math., 48 (1926), p. 329-343 et 54 (1930), p. 321-360.

RIESZ (M.)

[1] « *L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy pour l'équation des ondes* ». Bull. Société Math. France, 66, 1938.

[2] « *L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy* ». Acta Math. 81 (1949), p. 1-223.

[3] « *Sur les fonctions conjuguées* ». Math. Zeit., 27 (1927), p. 218-244.

[4] « *Intégrales de Riemann-Liouville et potentiels* ». Acta Litter. Scient. regiae Univ. hungar., 9 (1938), p. 1-42.

RISS

[1] « *Éléments de calcul différentiel et théorie des distributions sur les groupes abéliens localement compacts* ». Acta Mathematica, 89 (1953), p. 45-150.

ROCHA DE BRITO Eliana

[1] « *Separação de espaco e tempo nas distribucões invariantes da solucão da equacão das ondas* ». Universidade do Brasil, Rio de Janeiro, à paraître.

ROUMIEU

[1] « *Sur quelques extensions de la notion de distribution* ». Ann. École Norm. Sup., t. 77 (1960), p. 41-121.

SARD

[1] « *The measure of critical values of differentiable maps* », Bull. Amer. Math. Doc., t. 48 (1942), p. 883-890.

SATO

[1] « *Theory of hyperfunctions* ». Journ. Fac. Sc. Univ. Tokyo, vol. 8 (1959), p. 139-194, et vol. 8 (1960), p. 387-437.

SCARFIELLO

[1] « *Sur le changement de variables dans les distributions et leurs transformées de Fourier* ». Nuovo Cimento, 12 (1954), p. 471-482.

SCHWARTZ

[1] « *Généralisation de la notion de fonction, de dérivation, de transformation de Fourier, et applications mathématiques et physiques* ». Annales Univ. Grenoble, 21 (1945), p. 57-74.

[2] « *Généralisation de la notion de fonction et de dérivation; théorie des distributions* ». Annales Télécommunications, 3 (1948), p. 135-140.

[3] « *Théorie des distributions et transformation de Fourier* ». Annales Univ. Grenoble, 23 (1947-48), p. 7-24.

[4] « *Théorie générale des fonctions moyenne-périodiques* ». Annals of Math., 48 (1947), p. 857-929.

[5] « *Sur certaines familles non fondamentales de fonctions continues* ». Bull. Société Math. France, 72 (1944), p. 141-145.

[6] « *Sur l'impossibilité de la multiplication des distributions* ». Comptes Rendus Ac. Sciences, tome 239 (1954), p. 847-848.

[7] « *Théorie des noyaux* ». Proc. International Congress of Mathematicians, États-Unis, 1950.

[8] « *Coueant associé à une forme différentielle méromerphe sur une variété analytique complexe* ». Colloque de géométrie différentielle, Strasbourg, CNRS, 1953.

[9] « *Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles* ». Jour. d'Analyse Math., Jérusalem, vol. 4 (1954-55), p. 1-61, p. 88-148.

[10] « *Distributions à valeurs vectorielles* ». Annales de l'Institut Fourier, tome 7, 1957 et tome 8, 1959.

[11] « *Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques. Espaces vectoriels topologiques nucléaires. Applications* ». Séminaire, Institut Henri Poincaré, Paris, 1954.

[12] « *Équations aux dérivées partielles* ». Séminaire, Institut Henri Poincaré, Paris, 1955.

[13] « *Division par une fonction holomorphe sue une variété analytique complexe* ». Summa Brasiliensis Mathematicae. vol. 3 (1955), p. 181-209.

[14] « *Cours de Méthodes Mathématiques de la Physique* ». Paris, C. D. U., 1955, et « *Méthodes Mathématiques pour les Sciences Physiques* ». Paris, Hermann, 1965.

[15] « *Analyse et synthèse harmonique dans les espaces de distributions* ». Canadian Journal of Mathematics, 3 (1951), p. 503-512.

[16] Séminaire 1959-60, Institut Henri-Poincaré. Paris, 1960.

[16 *bis*] « *Ecuaciones diferenciales parciales elipticas* ». Univ. Nac. de Colombia, Bogota, 1956.

[17] « *Applications of distributions to the study of elementary particules in relativistic quantum mechanics* » à paraître, Gordon-Breach, New-York.

[18] « *Functional Analysis* ». New-York University, 1964.

[19] « *Convergence de distribution dont les dérivées convergent* ». Studies in Math. Analysis and related topics, Stanford Univ. Press. 1962.

SCHWARTZ-LIONS

Voir LIONS-SCHWARTZ [1].

SCHWARTZ-DIEUDONNÉ

Voir DIEUDONNÉ-SCHWARTZ [1].

SEBASTIÃO E SILVA

[1] « *Sur une construction axiomatique de la théorie des distributions* ». Révista Fac. Ciencias Lisboa, 2e série, A, vol. 4 (1955), p. 79-186.

[2] « *Sur l'axiomatique des distributions, et ses modèles possibles* ». C. I. M. E., Inst. Math. Uni., Rome, 1962.

[3] « *Les fonctions, analytiques comme ultra-distributions dans le calcul opérationnel* ». Math. Annalen, vol. 136 (1958), p. 58-96.

[4] « *Sur l'espace des fonctions holomorphes à croissance lente à droite* ». Portugaliae Math., vol. 17 (1958), p. 1-17.

SEELEY

[1] « *Extension of C∞ functions defined in a half space* ». Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 69 (1963), p. 625.

[2] « *Regularisation of singular integral operators on compact manifolds* ». Amer. Journ. of Math. vol. 83 (1961), p. 265-275.

SHILOV-GEL'FAND

Voir GEL'FAND-SHILOV [1].

SOBOLEFF

[1] « *Sur quelques évaluations concernant les familles de fonctions ayant des dérivées à carré intégrable* ». Comptes rendus Académie des Sciences URSS, 1 (1936), p. 279-282.

[2] « *Sur un théorème d'analyse fonctionnelle* ». Recueil Mat. (Math. Sbornik), 4 (1938), p. 471-496.

[3] « *Sur un théorème de l'analyse fonctionnelle* ». Comptes rendus Académie Sciences URSS, 20 (1938), p. 5-9.

[4] « *Méthode nouvelle à résoudre le problème de Cauchy pour les équations hyperboliques normales* ». Recueil Mat. (Math. Sbornik), 1 (1936), p. 39-71.

STEINHAUS-BANACH

Voir BANACH-STEINHAUS [1]

TEMPLE

[1] « *Generalized functions* ». Proc. Roy. Soc., t. 228 (1955), p. 175-190.

TITCHMARSH

[1] « *Theory of Fourier Integrals* ». Oxford, 1937.

TREVES

[1] « *Lectures in functional analysis* ». Academic Press, New-York, 1966.

WATSON

[1] « *Theory of Bessel functions* ». Cambridge, 1944 (2e édition).

WEIL (A.)
[1] « *L'intégration dans les topologiques et ses applications* ». Paris, Hermann, 1940.

WEYL (H.)
[1] « *The method of orthogonal projection in potential theory* ». Duke Journ., vol. 7 (1940), p. 411-444.

WHITNEY
[1] « *Differentiable manifolds* ». Annals of Math., 37 (1936), p. 645-680.
[2] « *Derivatives, difference quotients, and Taylor's formula* ». Bull. Amer. Math. Soc., 40 (1934), p. 89-94 et Annals of Math., 35 (1934), p. 476-481.
[3] « *Functions differentiable on the boudaries of regions* ». Annals of Math., 35 (1934), p. 482-485.

WHITNEY
[4] « *Analytic extensions of differentiable functions defined in closed sets* », Trans. Amer. Math. Soc., vol. 36 (1934), p. 63-89.

WIDDER
[1] « *Laplace Transform* ». Princeton University Press, 1946.

WIENER
[1] « *The Fourier integral and certain of its applications* ». Cambridge, 1933.

WIENER-PALEY
Voir PALEY-WIENER [1].

WIGHTMAN
[1] « *PCT, spin, statistics, and all that* ». New York, Benjamin, 1964.

YOSIDA
[1] « *Functional Analysis* ». Springer, Berlin, 1965.

YOUNG (L.-C.)
[1] « *Generalized curves and the existence of an attained absolute minimum in the calculus of variations* ». Comptes rendus Soc. Sc. Varsovie, 30 (1937), p. 212-234.

ZEILON
[1] « *Das Fundamentalintegral der allgemeinen particllen linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten* ». Arkiv Mat., Astron. och Fysik, 6 (1911), p. 1-32.
[2] « *Sur les intégrales fondamentales des équations à caractéristiques réelles de la physique mathématique* ». Arkiv Mat., Astron. och Fysik, 9 (1913), p. 1-70.

ZYGMUND
[1] « *Trigonometrical series* ». Dover Publication, New-York, 1955.

Absolnment continue (fonction, mesure)........................ 18, 54
Borélien (ensemble), borélienne (fonction).............................. 15
Borné (ensemble de distribntions)....................... 72, 74, 86, 195
Bornée sur R^n (distribution).. 200
Calcul opérationnel, symbolique. Voir symbolique.
Cauchy (problème de)...................................... 133, 178
Cauchy (valeur principale de).................................... 42, 48
Chaînes 326
Chaleur (équation de la)...................................... 145,289
Champ de vecteurs, de dérivation.................................. 51
Cobord 343
Cohomologie 321, 853
Complètement inversible (distribntion)........................ 212, 296
Convolution des fonctions (produit de).............................. 151
Convolution des distribntions (prodnit de)................... 153, 246, 268
Convolution (équation de)...................................... 208, 281
Convolution (inéquation de).. 218
Continne (absolnment), voir absolument continue.
Continne (forme linéaire).. 16, 24
Continuité séparée, séparément continue (application bilinéaire). 73, note (1), 9
Convergence de distribntions.................................. 71, 76, 86
Convergente (suite... de distribntions).......................... 86, 197
Convergeant vers 0 à l'infini (distribution).......................... 200
Conche multiple... 102, 127
Courants (usnels, tordus, pairs, impairs)............................. 322
Croissance lente (distribution à).................................... 237
Croissance lente (fonction indéfiniment dérivable à).............. 243, 246, 268
Décomposition de Riesz... 219
Décroissance rapide (distribution à)......................... 244, 246, 268
Décroissance rapide (fonction indéfiniment dérivable à)................ 234
Degré topologique.. 368
Dérivation (polynôme de).. 164
Dérivée d'ordre non entier.. 174
Dérivée d'nne distribution.............................. 35, 87, 80, 15
Dérivée d'une distribution.............................. 35, 87, 80, 159
Dérivées partielles (équation anx)........................ 128, 208, 281
Différentielle (équation).. 130

Dirac (courants de) 325
Distribution 24
Doublet 20
Dirac (mesure de) 19
Directe (image... d'une distribution) 31
Division (problème de la) 123, 282
Dual (d'un espace vectoriel topologique) 67
Élémentaire (noyau) 138
Élémentaire (solution) 135, 211, 286
Elliptique (opérateur différentiel, équation) 146, 215, 295
Équation aux dérivées partielles, voir dérivées.
Équation de convolution, voir convolution.
Équation différentielle, voir différentielle.
Équation intégrale 208, 281
Exponentielle, exponentielle-polynôme 169
Extension d'une distribution 32, 102, 114, 268
Filtres 19
Finie (partie) 38
Forme différentielle (usuelle, tordue, paire, impaire) 314, 315
Fourier (intégrale de ...usuelle) 231
Fourier (série de) 224
Fourier (transformation de) 223, 396
Harmonique (fonction) 146, 216, 283
Heaviside (fonctions d') 36, 114
Hermite (polynômes d') 261
Holomorphe (fonction) 48, 216, 283
Homogène (équation) 128, 130, 209, 282
Hypoelliptique 142
Hyperbolique (équation aux dérivées partielles) 49, 136, 177, 216, 290
Image directe d'un courant 362
Image réciproque d'un courant 373
Image réciproque d'une forme 320
Indépendante de x_1 (distribution) 55, 113, 268
Inéquation de convolution, voir convolution.
Intégrale dépendant d'un paramètre 104
Intégrale d'un courant 325
Intégrale d'une distribution 88, 118, 256
Intégrale de Fourier, voir Fourier.
Intégrale (équation), voir équation.
Intégrale partielle d'une forme différentielle sur les fibres 383
Inversible (distribution) 211, 296
Inversible (distribution complètement), voir complètement inversible.
Laplace (équation de), laplacien 45, 145, 214, 216, 283, 288
Laplace (transformation de) 264, 299
Lente (croissance). Voir croissance.
Limité à gauche (support) 172, 177
Local, principe de localisation 26
Méromorphe (fonction) 48

Mesure 15
Mesure de Dirac, voir Dirac.
Multiple (couche) ; voir couche.
Multiplication des distributions.............................. 116, 245, 268
Noyau élémentaire, voir élémentaire.
Ondes (équations des).. 50, 178, 290
Opérationnel (calcul), voir symbolique.
Ordre (d'une dérivée).. 14
Ordre (d'une distribntion)........ 26, 64, 86, 88, 91, 93, 96, 118, 191, 193
Parabolique (équation aux dérivées partielles)................... 145, 289
Paramétrix 144, 218
Parseval (formule de).. 231
Partielles (éqnations anx dérivées), voir dérivée.
Partie finie, voir finie.
Partition de l'nnité.. 22
Périodique (distribution)... 229
Périodique (presque); voir presque périodique.
Poisson (formule de).. 46, 214, 254
Polyharmonique (fonction)........................... 45, 145, 213, 283, 288
Positif (distribution de type)..................................... 274
Positive (distribution, mesure)................................... 28
Potentiel 214
Presque-périodique (distribution)................................. 206
Presque-surharmonique (fonction).................................. 219
Primitive d'une distribution...................................... 51, 55
Produit de convolution, voir convolution.
Produit direct, voir direct.
Produit multiplicatif, voir multiplication.
Pseudo-fonction 40
Rang d'une dérivée.. 14
Rapide (décroissance), voir décroissance.
Recollement des morceaux 27
Réflexivité 74
Régularisation, régulariser....................................... 165
Régulier (support).. 98
Régulier (système différentiel)................................... 130
Restriction d'une fonction.. 32
Section-distribution d'nn espace fibré à fibrê vectorielle........ 339
Séparée (continnité), voir continuité.
Série de Fourier, voir Fourier.
Sommable (fonction)... 18
Sommable sur R^n (distribution).................................. 203
Sommatoire (formule... de Poisson), voir Poisson.
Spectre d'une distribution.. 251, 271
Sphérique (distribution).. 237
Subordonnée (partition)... 22
Support (d'nne fonction, d'une distribution). 17, 28, 87, 98, 99, 154, 156, 170, 177
Support régulier, voir régulier.

Surharmonique (distribution) 220
Surharmonique (presque), voir presque.
Symbolique (calcul) 171, 176
Symétrie (opération) 167, 251
Tempérée (distribution) 237
Tensoriel (produit) 104, 120, 134, 154, 158, 268
Topologie 1, 16, 24, 69, 76
Tore 224
Trace 167, 173, 256, 275
Transformation infinitésimale 351
Transformation de Fourier, Laplace, voir Fourier, Laplace.
Translation d'une distribution 55, 78, 159, 161, 205, 239
Transposée (image... d'une fonction) 32
Type positif, voir positif.
Valeur principale de Cauchy 42, 383
Variété indéfiniment différentiable 31, 313
Vectoriel (espace... topologique), voir topologie.
Vectorielle (distribution) 30

δ mesure de Dirac, p. 19.
$\delta_{(x_\nu)}$ masse $+1$ au point x_ν, p. 19.
$Y(x)$ fonction d'Heaviside, p. 36, 114.
$H_n(x)$ polynôme d'Hermite, p. 261.
Fonctions de Bessel :

$$\left\{\begin{aligned}
J_\nu(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} \\
I_\nu(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{k=\infty} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} \\
Y_\nu(x) &= \frac{J_\nu(x)\cos\pi\nu - J_{-\nu}(x)}{\sin\pi\nu} \\
H_\nu^{(1)}(x) &= J_\nu(x) + iY_\nu(x) \\
H_\nu^{(2)}(x) &= J_\nu(x) - iY_\nu(x) \\
K_\nu(x) &= \pi\,\frac{[I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)]}{2\sin\pi\nu}
\end{aligned}\right.$$

Pseudo-fonctions monômes Y_m, p. 43.
Pseudo-fonctions Pf r^m, p. 45.
Distributions L_m, p. 47.
Distributions Z_l, fonctions s, p. 49, 50.
$|x|$, dx, $\frac{\partial}{\partial x}$, $p!$, C_p^q, x^p, D^p, p. 14-15.
$x \cdot y = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$, p. 231.

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}.$$

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \cdots - \frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2}, \text{ p. } 50;$$

$\gg 0$ de type positif, p. 274.
Opérations $^\vee$ et $^\sim$, p. 167, 251.
V, $\tilde{V}$, p. 315 ω, $\underline{\omega}$, $\tilde{\omega}$, p. 317.
$i(\xi)$, produit intérieur, p. 318.
notations $\beta^{-1}\wedge\alpha$, $\alpha\wedge\beta^{-1}$, p. 319.
$\theta(\xi)$, transformation infinitésimale, p. 351.
Cobord d, bord b, p. 343.
Courants Γ, $\Gamma\wedge\omega$, p. 327-328.

($\mathcal{C}$), p. 15; ($\mathcal{C}'$), p. 17; ($\mathcal{C}_K$), p. 16; ($\mathcal{C}_\Omega$) p. 20; ($\mathcal{C}'_\Omega$), p. 20; ($\mathcal{D}$), pp. 21, 65; ($\mathcal{D}'$), pp. 25, 71; ($\mathcal{D}_K$), pp. 24, 64; ($\mathcal{D}_\Omega$), p. 26; (D'_Ω), p. 26; ($\mathcal{D}^m$), pp. 21, 24; ($\mathcal{D}'^m$), p. 26; $(\mathcal{D})_{V_n}$, p. 31; $(\mathcal{D})_{V^n}$, p. 31; ($\mathcal{E}$), ($\mathcal{E}^m$), p. 88; ($\mathcal{E}'$), ($\mathcal{E}'^m$), p. 89; $(\mathcal{D})_x$, $(\mathcal{D}')_x$, p. 107; ($\mathcal{D}_+$), ($\mathcal{D}_-$), ($\mathcal{D}'_+$), ($\mathcal{D}'_-$), p. 172; ($\mathcal{D}_{+\Gamma}$), ($\mathcal{D}_{-\Gamma}$), ($\mathcal{D}'_{+\Gamma}$), ($\mathcal{D}'_{-\Gamma}$), p. 177; ($\mathcal{D}_{L^p}$), p. 199; ($\mathcal{B}$), ($\mathcal{B}$), p. 199; ($\mathcal{D}_{L^p}$), p. 200; ($\mathcal{B}'$), ($\mathcal{B}'$), p. 200; ($\mathcal{B}_{pp}$), ($\mathcal{B}'_{pp}$), p. 206; ($\mathcal{S}$), p. 233); ($\mathcal{S}'$), p. 237; ($\mathcal{O}_M$), p. 243; ($\mathcal{O}'_C$), p. 244; $\mathcal{S}(\Gamma)$, $\mathcal{S}'(\Gamma)$, $\mathcal{O}'_C(\Gamma)$, p. 303; $\dot{\mathcal{D}}^m$, $\dot{\mathcal{D}}$, $\mathcal{D}$, p. 314; $\dot{\mathcal{D}}^m$, $\dot{\mathcal{D}}$, $\mathcal{D}$, p. 316; $\dot{\mathcal{D}}'^m$, $\dot{\mathcal{D}}'$, $\mathcal{D}'$, $\dot{\mathcal{D}}'^m$, $\dot{\mathcal{D}}'$, $\mathcal{D}'$, p. 323.

RELATIONS D'INCLUSION ENTRE CES ESPACES

Chaque signe $E \subset F$ ou $\underset{F}{\overset{E}{\cap}}$ marque que E est contenu dans F, avec une topologie plus fine :

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & p \leqslant q & & & & & & & & \\
(\mathcal{D}) & \subset & (\mathcal{S}) & \subset & (\mathcal{D}_{L^p}) & \subset & (\mathcal{D}_{L^q}) & \subset & (\dot{\mathcal{B}}) & \subset & (\mathcal{B}) & \subset & (\mathcal{O}_M) & \subset & (\mathcal{E}) \\
\cap & & \cap & & \cap & & \cap & & \cap & & \cap & & \cap & & \cap \\
(\mathcal{E}') & \subset & (\mathcal{O}'_C) & \subset & (\mathcal{D}'_{L^p}) & \subset & (\mathcal{D}'_{L^q}) & \subset & (\dot{\mathcal{B}}') & \subset & (\mathcal{B}') & \subset & (\mathcal{S}') & \subset & (\mathcal{D}'). \\
 & & & & & & p \leqslant q & & & & & & & &
\end{array}
$$

IMPRIMÉ EN FRANCE - BOISSEAU - TOULOUSE
DÉPOT LÉGAL QUATRIÈME TRIMESTRE 1966
NUMÉRO D'ÉDITION 5551 C
HERMANN, ÉDITEURS DES SCIENCES ET DES ARTS